Самостоятельное изучение учебного материала

Прямая в пространстве

Изучите вопросы:

1. Понятие об уравнении линии в пространстве.
2. Прямая в пространстве. Виды уравнений прямой.
3. Взаимное расположение прямых.
4. Угол между прямыми.

1. Понятие об уравнении линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение поверхностей $F_1\ (x, y, z) = 0$ и $F_2\ (x, y, z) = 0$, поэтому её представляют в виде системы уравнений этих поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Эту систему называют *общими уравнениями* линии в пространстве.

Линию в пространстве можно рассматривать и как траекторию движущейся точки, поэтому ее уравнения можно записать в *параметрическом* виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = g(t). \end{cases}$$

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

2. Прямая в пространстве. Виды уравнений прямой

Рассмотрим прямую в пространстве.

1) Если прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, то ее уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой.*

Вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ называется *направляющим вектором* прямой.

Пример 1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;4)$ параллельно вектору $\vec{s}=(-3;4;1)$.

Решение.

Подставив в уравнение (1) координаты точки M_0 и вектора $\vec{s}$, получим канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-4}{1}.$$

2) Рассмотрим уравнение прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Введем параметр *t:*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

Выразим x, y, z:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \quad (2) \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Получили *параметрические уравнения прямой.*

Пример 2. Составить параметрические уравнения прямой $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-4}{1}$.

Решение.

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-4}{1}=t,$$

$$\begin{cases} x=1-3t, \\ y=-2+4t, \\ z=4+t. \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения прямой.

3) Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример 3. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(-1;-2;5)$ и $M_2(3;-1;4)$.

Решение.

Подставим в уравнение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ координаты точек M_1, M_2, получим уравнения данной прямой:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y+2}{-1+2}=\frac{z-5}{4-5},$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{-1}.$$

3. Взаимное расположение прямых

Прямая l_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

прямая l_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2}$, то есть $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$;

2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0$, то есть $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

4. Угол между прямыми

Угол между прямыми плоскостями l_1 и l_2 находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|},$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}.$$