# Самостоятельное изучение учебного материала

## Прямая на плоскости

***Изучите вопросы:***

1. Понятие уравнения линии на плоскости.
2. Различные формы уравнения прямой на плоскости
3. Точка пересечения двух прямых
4. Угол между двумя прямыми
5. Расстояние от точки до прямой

### 1. Понятие уравнения линии на плоскости

*Линия на плоскости* рассматривается как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойствам. Например, окружность радиуса $R$ есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстоянии $R$ от некоторой фиксированной точки $C$ — центра окружности.

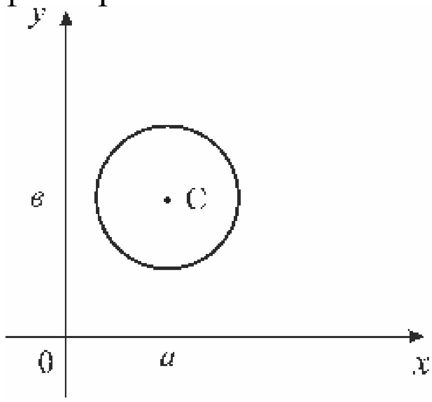


*Рис. Окружность*

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение линии на плоскости с помощью уравнения.

*Уравнением линии* на плоскости $Oxy$ называется такое уравнение $F(x; y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты $x$ и $y$ каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные $x$ и $y$ в уравнении линии называются *текущими координатами.*

Для того чтобы установить, лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки $A$ уравнению этой линии.

***Пример:*** Выяснить, лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x+y+3=0$.

*Решение.*

Подставим в уравнение линии вместо *x* и *y* координаты точки *K*, получим $2\cdot(-2)+1+3=0$. Следовательно, точка *K* лежит на данной линии. Точка *L* не лежит на данной линии, так как $2\cdot 1+1+3\neq 0$.

## 2. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

### *1) Общее уравнение прямой.*

Всякое уравнение первой степени относительно *x* и *y*, то есть уравнение вида

$$Ax+By+C=0,$$

где *A*, *B*, *C* — постоянные коэффициенты, причем *A* и *B* не равны нулю одновременно, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Частные случаи:

1. Если $C=0$, то прямая $Ax+By=0$ проходит через начало координат.
2. Если $A=0$, то прямая $By+C=0$ параллельна оси *Ox*.
3. Если $B=0$, то прямая $Ax+C=0$ параллельна оси *Oy*.
4. Если $B=C=0$, то прямая совпадает $x=0$ совпадает с осью *Oy*.
5. Если $A=C=0$, то прямая $y=0$ совпадает с осью *Ox*.

### *2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.*

Если в общем уравнении прямой $B\neq 0$, то разрешив его относительно *y*, получим уравнение вида

$$y=kx+b,$$

где $k=-\dfrac{A}{B}$.

Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

*Угловой коэффициент* $k=tg\varphi$, где $\varphi$ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси *Ox*.

Свободный член уравнения *b* равен ординате точки пересечения прямой с осью *Oy*.

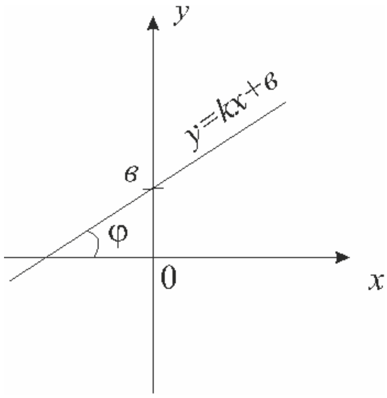


*Рис. Изображение прямой* $y = kx + b$

### *3) Уравнение прямой в отрезках.*

Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то разделив все его члены на $(-C)$, получим уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Его называют *уравнением прямой в отрезках*, где $a$ — абсцисса точки пересечения прямой с осью $Ox$, $b$ — ордината точки пересечения прямой с осью $Oy$. Поэтому $a$ и $b$ называют *отрезками прямой на осях координат*.

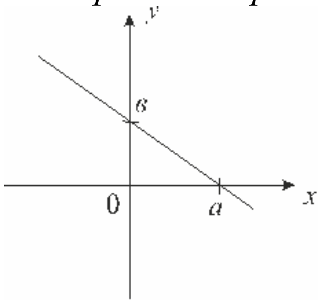


*Рис. Изображение прямой* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

***Пример:*** Дано общее уравнение прямой $2x - 5y + 10 = 0$. Написать уравнение этой прямой в отрезках на осях. Построить прямую.

*Решение.*

Перенесем свободный член уравнения в правую часть:

$$2x - 5y = -10.$$

Разделим обе части уравнения на (– 10), получим:

$$\frac{2x}{-10} - \frac{5y}{-10} = 1.$$

Выполнив сокращения, получим уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1.$$

Здесь отрезки, отсекаемые прямой на осях: $a = -5$, $b = 2$.

Построим прямую.

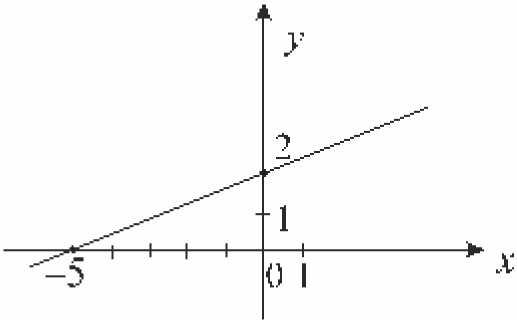


*Рис. Изображение прямой* $\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$.

***Пример:*** Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=3$, $b=4$.

*Решение.*

Используя формулу $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, имеем:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Приведем это уравнение к виду общего уравнения прямой. Для этого умножим обе части уравнения на 12, получим общее уравнение данной прямой:

$$4x+3y-12=0.$$

***4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.***

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеющей угловой коэффициент $k$, имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

***Пример:*** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ под углом $135^\circ$ к положительному направлению оси $Ox$.

*Решение.*

Найдем угловой коэффициент прямой:

$$k=tg135^\circ=tg(180^\circ-45^\circ)=-tg45^\circ=-1.$$

Подставим найденное значение $k=-1$ и координаты точки $A$ в формулу $y-y_0=k(x-x_0)$:

$$y+3=-1(x-2),$$
$$y+3=-x+2,$$
$$x+y+1=0.$$

***5) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.***

Если заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

а угловой коэффициент прямой

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

***Пример:*** Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-4;5)$.

*Решение.*

Для составления уравнения прямой *AB* подставим в формулу $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ координаты точек *A* и *B*, получим:

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-(-3)}{5-(-3)}, \qquad \frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{8},$$

$$8(x-2)=-6(y+3),$$

$$4(x-2)=-3(y+3),$$

$$4x-8=-3y-9,$$

$$4x+3y+1=0.$$

## 3. Точка пересечения двух прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Координаты точки пересечения двух прямых находятся путем решения системы уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

***Пример:*** Найти точку пересечения двух прямых $2x-3y+5=0$ и $x-5y+6=0$.

*Решение.*

Решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ x-5y=-6. \end{cases}$$

Воспользуемся правилом Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -3\\ -6 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}}=\frac{25-18}{-10+3}=-1,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & -6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}}=\frac{-12+5}{-10+3}=1.$$

Итак, прямые пересекаются в точке $(-1;1)$.

## 4. Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

По формуле

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

вычисляется тот из смежных углов между прямыми, который получается при повороте прямой (I) против часовой стрелки вокруг точки пересечения прямых до совпадения с прямой (II).

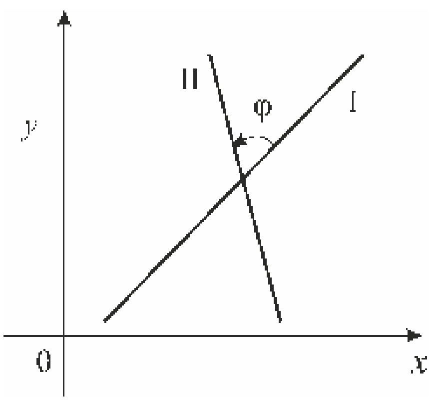


*Рис. Угол между двумя прямыми*

Если прямые не изображены в системе координат, то для нахождения угла между ними используют формулу:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

при этом порядок угловых коэффициентов выбирают произвольно.

***Условие перпендикулярности*** двух прямых: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$, если $k_1\neq 0$.

***Условие параллельности*** прямых: $k_1=k_2$.

***Пример:*** Определить острый угол между прямыми $y = 3x + 1$ и $y = -2x - 5$.

*Решение.*

Угловые коэффициенты данных прямых: $k_1 = 3$, $k_2 = -2$. Так как прямые не изображены в системе координат, то используем формулу $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, получаем:

$$tg\varphi = \left|\frac{-2-3}{1+3\cdot(-2)}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = |1| = 1.$$

Следовательно, $\varphi = arctg1 = 45^\circ$.

***Пример:*** Показать, что прямые $7x + 3y - 5 = 0$ и $14x + 6y + 1 = 0$ параллельны.

*Решение.*

Найдем угловые коэффициенты прямых по формуле $k = -\frac{A}{B}$:

$$k_1 = -\frac{7}{3} \text{ и } k_2 = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}.$$

Угловые коэффициенты прямых равны, следовательно, они параллельны.

***Пример:*** Показать, что прямые $2x - 3y + 7 = 0$ и $6x + 4y - 3 = 0$ перпендикулярны.

*Решение.*

Найдем угловые коэффициенты прямых по формуле $k = -\frac{A}{B}$:

$$k_1 = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3} \text{ и } k_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Угловые коэффициенты прямых противоположны по знаку и обратны по величине, то есть $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, прямые перпендикулярны.

## 5. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

***Пример:*** Найти расстояние от точки $M(4;-3)$ до прямой $3x+4y-10=0$.

*Решение.*

По формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ имеем:

$$d=\frac{|3\cdot4+4(-3)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2.$$