Самостоятельное изучение учебного материала

Матрицы. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Изучите вопросы:

1. Понятие матрицы.
2. Виды матриц.
3. Действия над матрицами.
4. Обратная матрица.
5. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

1. Понятие матрицы.

Матрицей называется прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества, состоящая из m строк и n столбцов.

Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — элемент матрицы;

$i = 1, 2, 3\dots, m$ — номер строки;

$j = 1, 2, 3\dots, n$ — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m\times n$ (или размерности $m\times n$) и пишут $A_{m\times n}$.

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

Наиболее часто рассматривают матрицы, элементами которых являются числа.

2. Виды матриц:

1. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, называется *квадратной матрицей n-го порядка*.

2. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называются *диагональной*.

3. Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали равны единице, называют *единичной*. Обозначается буквой E.

4. Квадратная матрица называется *верхней (нижней) треугольной*, если все элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю.

5. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

6. Матрица, содержащая один столбец (одну строку), называется *матрицей-столбцом (матрицей-строкой)*.

Две матрицы A и B одного размера называются *равными*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

3. Действия над матрицами.

1) Сложение матриц.

Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C = A + B$ той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 1. Вычислить сумму матриц A и B, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & 4+6 \\ 3+2 & -5+3 \\ 1+0 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$ той же размерности, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т.е. $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пример 2. Вычислить $2A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

3) Умножение матриц.

Произведение матриц AB можно вычислить только, если *число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B*. В результате получим матрицу C, у которой столько же строк, как и у матрицы A, и столько же столбцов, как и у матрицы B. При этом каждый элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, p$.

Схема умножения матриц представлена на рис. 3.

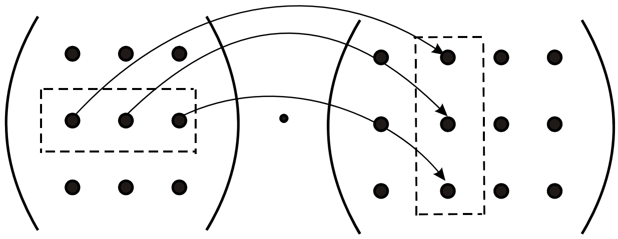

Рис. 3 Схема умножения матриц

П р и м е р 3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C= AB$.

Решение.

Вычислим элементы матрицы C:

$c_{11}=3\cdot 3+(-2)\cdot 2=9-4=5$ (сумма произведений элементов 1-й строки матрицы A на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B);

$c_{12}=3\cdot 4+(-2)\cdot 5=12-10=2$ (сумма произведений элементов 1-й строки матрицы A на соответствующие элементы 2-го столбца матрицы B);

$c_{21}=5\cdot 3+(-4)\cdot 2=15-8=7$ (сумма произведений элементов 2-й строки матрицы A на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B);

$c_{22}=5\cdot 4+(-4)\cdot 5=20-20=0$ (сумма произведений элементов 2-й строки матрицы A на соответствующие элементы 2-го столбца матрицы B).

Тогда $C = AB=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$.

4. Обратная матрица.

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ — невырожденная, так как ее определитель $\Delta A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=8+3=11\neq 0$, а матрица $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ — вырожденная, так как ее определитель $\Delta B=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{vmatrix}=6-6=0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta A \neq 0$.

План нахождения обратной матрицы

1. Находим ΔA — определитель матрицы A.

2. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составляем из них матрицу A^*.

3. Транспонируем матрицу A^* и получаем союзную матрицу $\tilde{A}$.

4. Находим обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\tilde{A}$.

Проверить правильность нахождения обратной матрицы A^{-1} можно, исходя из определения, вычислив AA^{-1} или $A^{-1}A$. Должна получиться единичная матрица E.

Пример 4. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем определитель матрицы A:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 6 + 18 - (8 - 18 + 15) = -1.$$

Т.к. $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 9 = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 6) = -9,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 2) = 8,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1,$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-(6+6)=-12,$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}-1 & -9 & -5\\ 1 & 14 & 8\\ -1 & -12 & -7\end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее (поменяем строки со столбцами) и запишем союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -9 & 14 & -12\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\tilde{A}$;

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -9 & 14 & -12\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & -14 & 12\\ 5 & -8 & 7\end{pmatrix}.$$

5. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим неоднородную систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов.

Тогда данную систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$AX = B.$$

Если матрица A невырожденная, т.е. $\Delta A \neq 0$, то для нее существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим обе части матричного уравнения слева на A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Используя свойство ассоциативности произведения матриц, имеем

$$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B.$$

Так как по определению обратной матрицы $A^{-1}A = E$, то

$$EX = A^{-1}B.$$

Так как $EX = X$, то матрица неизвестных находится по формуле:

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

П р и м е р 1. Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Запишем данную систему уравнений в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем матричное уравнение $A \cdot X = B$, где $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A.

Найдем определитель матрицы A:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 6 + 18 - (8 - 18 + 15) = -1 .$$

Т.к. $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} .$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 9 = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 6) = -9,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 2) = 8,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1,$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-(6+6)=-12,$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}-1 & -9 & -5\\ 1 & 14 & 8\\ -1 & -12 & -7\end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее (поменяем строки со столбцами) и запишем союзную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -9 & 14 & -12\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\tilde{A}$;

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -9 & 14 & -12\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & -14 & 12\\ 5 & -8 & 7\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $X=A^{-1}\cdot B$:

$$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & -14 & 12\\ 5 & -8 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}.$$

Выполним умножение матриц:

$$x_1=1\cdot5+(-1)\cdot4+1\cdot1=5-4+1=2,$$
$$x_2=9\cdot5+(-14)\cdot4+12\cdot1=45-56+12=1,$$
$$x_3=5\cdot5+(-8)\cdot4+7\cdot1=25-32+7=0.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение:

x_1=2, x_2=1, x_3=0.

Ответ: (2;1;0).