Лекция № 1
Определители. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Определители 2-го и 3-го порядков.
2. Понятие об определителе n-го порядка.
3. Основные свойства определителей.
4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Вычисление определителей третьего порядка разложением по строке (столбцу).
6. Общие сведения о системах линейных уравнений.
7. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.

1. Определители 2-го и 3-го порядков.

Определителем 2-го порядка называется выражение, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

где a_{ij} — элемент определителя, i — номер строки, j — номер столбца.

Определитель обозначается греческой буквой Δ (дельта).

Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ определителя, a_{12}, a_{21} — побочную. Схема вычисления определителя 2-го порядка представлена на рис. 1. Элементы изображены точками.

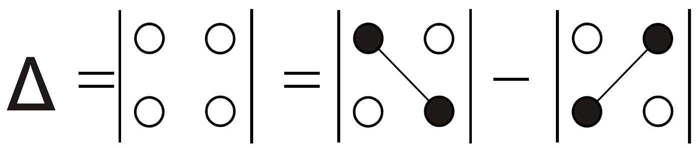

Рис. 1. Схема вычисления определителя 2-го порядка

П р и м е р 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - (-2)\cdot 4 = 18 + 8 = 26.$$

Определителем 3-го порядка называется выражение, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Данный способ вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольников.

Схема вычисления определителя 3-го порядка по правилу треугольников представлена на рис. 2.

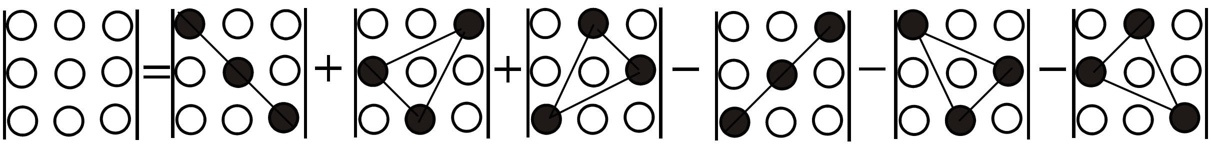

Рис. 2 Схема вычисления определителя 3-го порядка

Пример 2. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}$, используя правило треугольников.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-4) + 7\cdot(-3)\cdot 6 + (-2)\cdot(-8)\cdot 5 -$$
$$- 6\cdot 4\cdot 5 - (-3)\cdot(-8)\cdot 3 - 7\cdot(-2)\cdot(-4) =$$
$$-48 - 126 + 80 - 120 - 72 - 56 = -342.$$

2. Понятие об определителе n-го порядка.

Определитель, в котором n строк и n столбцов называют определителем n-го порядка. Оределители n-го порядка вычисляют путем разложения по элементам какой-либо строки (столбца).

3. Основные свойства определителей:

1. Определитель не изменяется при замене строк соответствующими столбцами.

2. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то изменится знак определителя.

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

4. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

5. Определитель равен нулю в следующих случаях:

а) все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю;

б) определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца);

в) элементы каких-либо двух строк (столбцов) пропорциональны.

4. Миноры и алгебраические дополнения.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из данного вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 3. Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Найдите M_{12} и M_{22}.

Решение.

Чтобы найти M_{12} вычеркнем 1-ю строку и 2-й столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 - (-3)\cdot 1 = -7 .$$

M_{22} найдем, вычеркивая 2-ю строку и 2-й столбец:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 2\cdot(-3) = 21 .$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Пример 4. Дан определитель $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. Найдите A_{13}.

Решение.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-5) \cdot 6 + 5 \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot 6 - 6 \cdot (-5) \cdot 5 - 5 \cdot 1 \cdot 6 - 7 \cdot (-2) \cdot 0 =$$
$$= 175 - 12 + 150 - 30 = 283.$$

5. Вычисление определителей третьего порядка разложением по строке (столбцу).

Теорема Лапласа. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения.

Раскладывать определители лучше по той строке (столбцу), в которой (котором) больше нулей. При этом нули можно получить искусственно с помощью свойств определителей.

Пример 5. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель путём разложения его по элементам третьей строки, так как она содержит наибольшее количество нулей

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2-3) = 5.$$

6. Общие сведения о системах линейных уравнений.

Системы линейных уравнений представляют собой один из важнейших разделов линейной алгебры. Они являются одним из основных инструментов математического моделирования различных процессов.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где a_{ij} — числовые коэффициенты при неизвестных,

$i = 1, 2, \ldots, m$ — номер уравнения,

$j = 1, 2, \ldots, n$ — номер неизвестной,

x_j — неизвестные,

b_i — свободные члены.

Решением системы называется совокупность чисел (c_1, c_2, …, c_n), при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет одно решение, и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Если в системе все свободные члены b_i равны нулю, то она называется *однородной*, а если хотя бы один из свободных членов b_i не равен нулю, то она называется *неоднородной*.

Две системы с одним и тем же числом неизвестных называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одно и то же множество решений.

Эквивалентные преобразования систем линейных алгебраических уравнений:

1. Перемена местами двух уравнений.

2. Умножение обеих частей какого-либо уравнения на действительное число, не равное нулю.

3. Прибавление к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого уравнения, умноженного на одно и то же действительное число.

4. Вычеркивание из системы уравнения вида $0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = 0$, так как ему удовлетворяют любые значения неизвестных.

Любое конечное число эквивалентных преобразований приводит исходную систему в ей равносильную.

7. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы* (*главным определителем системы*):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим определитель, полученный из определителя Δ путем замены первого столбца (коэффициенты при x_1) столбцом свободных членов. Обозначим его через Δx_1:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим определитель, полученный из определителя Δ путем замены второго столбца (коэффициенты при x_2) столбцом свободных членов. Обозначим его через Δx_2:

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим определитель, полученный из определителя Δ путем замены третьего столбца (коэффициенты при x_3) столбцом свободных членов. Обозначим его через Δx_3:

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Итак, если определитель системы $\Delta \neq 0$, то решение системы можно найти по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \end{cases}$$

Эти формулы называются *формулами Крамера.*

Теорема Крамера. Если определитель системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, Δ_{x_i} получается из определителя Δ путем замены i-го столбца определителя Δ столбцом свободных членов.

П р и м е р 6. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Решение.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

т. к. $\Delta \neq 0$, то система совместная и определенная.

Вычислим определитель Δx_1, который получается из определителя Δ путем замены 1-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1,$$

Вычислим аналогично Δx_2:

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Найдем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = -1, \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = 1.$$

Осуществим проверку правильности полученного решения, подставив его в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} -1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (–1; 1).

П р и м е р 7. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ по формулам Крамера. Сделать проверку.

Решение.

Найдем определитель системы по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-2)(-3) \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 - 2(-3) \cdot 1 - 2(-2)(-2) = 15.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Найдем это решение по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \; i = 1, 2, 3.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1(-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \cdot 0 -$$

$$-0 \cdot 1 \cdot 1 - 2(-3) \cdot 8 - 1 \cdot (-2)(-2) = 30.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1(-2) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 8(-3) \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 - 0(-3) \cdot 1 - 2 \cdot 8(-2) = -45.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{30}{15} = 2, \\ x_2 = \dfrac{\Delta\ x_2}{\Delta} = \dfrac{-45}{15} = -3, \\ x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{0}{15} = 0. \end{cases}$$

Итак, $(-2; -3; 0)$ — решение системы.

Сделаем проверку. Подставим найденные значения $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$ во все уравнения данной системы:

$$\begin{cases} 2 - 2 \cdot (-3) + 0 = 8, \\ 2 \cdot 2 - 3 - 3 \cdot 0 = 1, \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Получили верные равенства. Следовательно, $(-2; -3; 0)$ — решение системы.

Ответ: $(-2; -3; 0)$.