

Лекция №27.
Основные понятия о дифференциальных уравнениях.
Дифференциальные уравнения первого порядка

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях
2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка.
3. Теорема Коши.
4. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $yy' + x = 0$ — дифференциальное уравнение первого порядка;
 $y'' - 6y' + 8y = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = e^x$ есть решение уравнения $y' - y = 0$, т.к. при подстановке ее в уравнение получаем тождество $e^x - e^x = 0$.

2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешить относительно производной y' , то получим

$$y' = f(x, y),$$

дифференциальное уравнение первого порядка, **разрешенное относительно производной**.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в **дифференциальной форме**

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C)$, которое является функцией переменной x и произвольной постоянной C .

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, то такое решение называется **частным интегралом** дифференциального уравнения.

График любого частного решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**. Общему решению $y = \varphi(x, C)$ соответствует **семейство интегральных кривых**.

На практике искомое частное решение дифференциального уравнения первого порядка получают из общего решения исходя из **начальных условий**
$$y(x_0) = y_0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, геометрически означает выделение из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y = \varphi(x, C)$, единственной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) .

Задача отыскания частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши**.

3. Теорема Коши

Теорема 1 (Коши) (о существовании и единственности решения):

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку (x_0, y_0) , то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Точки, в которых условия теоремы существования и единственности нарушаются, называются **особыми точками**.

4. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$.

Его особенность состоит в том, что при дифференциалах dx и dy стоят произведения функций, по отдельности зависящих от x , от y .

Разделим обе части уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$, получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0.$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Решить уравнение $x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $(1 - y^2)(1 - x^2)$, получим

$$\frac{x}{1 - x^2} dx + \frac{y}{1 - y^2} dy = 0.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{x}{1 - x^2} dx + \int \frac{y}{1 - y^2} dy = 0.$$

Получим:

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - x^2| - \frac{1}{2} \ln|1 - y^2| = C.$$

Преобразуя, получим общий интеграл:

$$(1 - x^2)(1 - y^2) = C.$$

Рассмотрим способ решения уравнения $y' = f(x)g(y)$.

Его особенность состоит в том, что в правой части стоит произведение функций, по отдельности зависящих от x , от y .

Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Умножим обе части уравнения на dx :

$$dy = f(x)g(y)dx.$$

Разделим на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Пример:

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \operatorname{tg}x(y+1)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 0$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение (общий интеграл). Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}x(y+1).$$

Умножим обе части уравнения на dx :

$$dy = \operatorname{tg}x(y+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = \operatorname{tg}x dx.$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \operatorname{tg}x dx.$$

Получим:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| + C \text{ — общий интеграл.}$$

Подставим в общий интеграл начальные условия $x = \pi$, $y = 0$ и найдем соответствующее им значение C :

$$\ln 1 = -\ln|\cos \pi| + C,$$

$$C = 0.$$

Подставим найденное значение $C = 0$ в общий интеграл и получим частный интеграл, удовлетворяющий заданным начальным условиям:

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x|.$$

Преобразуем:

$$y+1 = \frac{1}{\cos x}.$$

Тогда $y = \frac{1}{\cos x} - 1$ — частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $y = f(x, y)$ называется **однородной порядка n** , если для произвольного числа t выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, $f(x, y) = x^2 - xy$ — однородная функция второго порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка, называется **однородным**.

Для решения этого уравнения следует привести его к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и сделать замену:

$$u = \frac{y}{x},$$

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u.$$

В результате замены получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = \varphi(u),$$

$$u'x = \varphi(u) - u,$$

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

$$x du = (\varphi(u) - u) dx,$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение может быть в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Для его решения разделим обе части на dx :

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

т.е. получили уравнение предыдущего вида.

Пример: Решить уравнение $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$.

Решение.

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части на dx :

$$x^2 - y^2 + xy \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x^2 - y^2 + xy y' = 0,$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Сделаем замену:

$$u = \frac{y}{x},$$

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u,$$

получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = u - \frac{1}{u},$$

$$u'x = -\frac{1}{u},$$

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u},$$

$$xdu = -\frac{1}{u} dx,$$

$$udu = -\frac{dx}{x},$$

$$\int udu = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| + C \text{ — общий интеграл.}$$