Лекция №3
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Две системы с одним и тем же числом неизвестных называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одно и то же множество решений.

Эквивалентные преобразования систем линейных алгебраических уравнений

1. Перемена местами двух уравнений.
2. Умножение обеих частей какого-либо уравнения на действительное число, не равное нулю.
3. Прибавление к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого уравнения, умноженного на одно и то же действительное число.
4. Вычеркивание из системы уравнения вида $0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = 0$, так как ему удовлетворяют любые значения неизвестных.

Любое конечное число эквивалентных преобразований приводит исходную систему в ей равносильную.

Метод Гаусса[1] — метод последовательного исключения неизвестных.

Он состоит из двух этапов:

1. *Прямой ход.* С помощью элементарных преобразований систему приводят к равносильной системе ступенчатого вида.
2. *Обратный ход.* Из ступенчатой системы последовательно определяют неизвестные.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим *прямой ход* метода Гаусса, разбив его на шаги.

1 шаг: исключим с помощью первого уравнения x_1 из всех других уравнений, начиная со второго.

Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменяем порядок уравнений, выбрав первым такое уравнений, в котором коэффициент при x_1 не равен нулю).

---

[1] Гаусс Фридрих Карл (1777—1855) — немецкий математик

Разделим первое уравнение на a_{11}, чтобы коэффициент при x_1 стал равным 1 (на практике этого, чаще всего, достигают, меняя местами уравнения или слагаемые в уравнениях):

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы (1.2) на ($-a_{21}$), затем на ($-a_{31}$), …, ($-a_{m1}$) и прибавим, соответственно, ко второму, третьему, …, m-му уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \quad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

где a'_{ij}, b'_i — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после первого шага.

2 шаг: аналогично, с помощью второго уравнения полученной системы исключим x_2 из всех уравнений, начиная с третьего.

Пусть $a'_{22} \neq 0$. Разделим второе уравнение на a'_{22}:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \ldots + \dfrac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = \dfrac{b'_2}{a'_{22}}, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \quad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на $\left(-a'_{32}\right)$, затем на $\left(-a'_{42}\right)$, …, $\left(-a'_{m2}\right)$ и прибавим соответственно к третьему, четвертому, …, m-му уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m, \end{cases}$$

где a''_{ij}, b''_i — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после второго шага.

Продолжаем этот процесс, пока не приведем систему к ступенчатому виду. Если при этом получаются уравнения вида 0 = 0, то их вычеркиваем, т.к. они являются тождествами. Если же появляется уравнение вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$, то, следовательно, система несовместна.

В результате прямого хода может быть получена система *треугольного* или *трапецеидального* ступенчатого вида.

Если получается система *треугольного* вида

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = l_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = l_2, \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = l_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = l_n, \end{cases}$$

в которой число уравнений n равно числу неизвестных n, то она имеет единственное решение, т.е. является совместной определенной. Это решение находится в результате обратного хода. Из последнего уравнения системы (1.4) определяется x_n. Подставляем его в предпоследнее уравнение и находим x_{n-1}. Затем определяем $x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

Применяя метод последовательного исключения неизвестных, удобнее решать систему, когда в первом уравнении коэффициент при x_1 равен 1. Поэтому поменяем местами первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

С помощью первого уравнения исключим неизвестное x_1 из всех остальных уравнений, начиная со второго. Для этого первое уравнение умножим на (–2) и прибавим ко второму и третьему. Затем первое уравнение умножим на (–1) и прибавим к четвертому. Получится система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -5, \\ -2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

С помощью второго уравнения исключим неизвестное x_2 из всех остальных уравнений, начиная с третьего. Второе уравнение прибавим к третьему, четвертое уравнение перепишем без изменений, т.к. в нем неизвестного x_2 нет:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -6x_3 - x_4 = -5, \\ -2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Разделим обе части четвертого уравнения на (–2) и поменяем его местами с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ -6x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$$

С помощью третьего уравнения исключим неизвестное x_3 из четвертого. Умножим третье уравнение на 6 и прибавим к четвертому:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ -7x_4 = 7. \end{cases}$$

Получили систему треугольного вида.

Из последнего уравнения найдем $x_4 = -1$.

Подставим значение x_4 в третье уравнение и найдем x_3:

$$x_3+1=2,$$
$$x_3=1.$$

Подставим значения x_3 и x_4 во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2+1-1=0,$$
$$x_2=0.$$

Подставим значения x_3, x_4, x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1+0+5-2=1,$$
$$x_1=-2.$$

Данная система имеет единственное решение:

$$x_1=-2;\ x_2=0;\ x_3=1;\ x_4=-1.$$

Ответ: $(-2;0;1;-1)$.