Обзорная лекция №9
Числовые и степенные ряды

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие числового ряда и его суммы. Свойства сходящихся рядов.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости.
5. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда.

При решении ряда математических задач приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Из теории действительных чисел известно, что означает сумма любого конечного числа слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

1. Понятие числового ряда и его суммы. Свойства сходящихся рядов

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1,\ u_2,\ ...,u_n,\ ...$, соединенных знаком сложения:

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n .$$

Числа $u_1,\ u_2,\ ...,u_n,\ ...$ называются *членами ряда*, а член u_n — *общим* или n-м *членом ряда*.

Общий член ряда есть функция $f\left(n\right)$ натурального аргумента, т.е. $n\in N$.

Примеры:

1. Найти несколько первых членов ряда с общим членом $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$.

Решение.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+...$$

2. Найти общий член ряда $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{8}{8}+...$.

Решение.

Нетрудно убедиться, что $u_n=\dfrac{2n}{n+4}$.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \dots\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n .$$

Сумма n первых членов ряда S_n называется *n-й частичной суммой ряда.*

Ряд называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S называется *суммой* ряда.

Можно записать

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S .$$

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Пример.

Рассмотрим *геометрический ряд*, т.е. ряд, составленный из членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} .$$

Решение.

Известно, что сумма n первых членов геометрической прогрессии, т.е. n-я частичная сумма ряда при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{n\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

Возможно несколько случаев:

1) если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \frac{a}{1-q}, \text{ так как } \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

следовательно, ряд сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-q};$$

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{aq^n}{q-1} - \dfrac{a}{q-1}\right) = \infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$,

следовательно, ряд расходится;

3) если $q = 1$, то ряд примет вид $a + a + \dots + a + \dots$, его n-я частичная сумма $S_n = a + a + .. + a = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, т.е. ряд расходится.

4) если $q = -1$, то ряд примет вид $a - a + a - a + \dots + \left(-1\right)^n a + \dots$, его n-я частичная сумма $S_n = 0$ при n четном, $S_n = a$ при n нечетном, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *сходится к сумме* $S = \dfrac{a}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Примеры.

Исследовать данные ряды на сходимость. Если ряд сходится, найти его сумму.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{15}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{10}{3}\right)^n$

Решение.

1) Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{15}\right)^n$ сходится, так как $q = \dfrac{7}{15} < 1$. Преобразовав общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{15}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7}{15}\right)^{n-1} \dfrac{7}{15}$, видим, что $a = \dfrac{7}{15}$.

Следовательно, сумма ряда $S = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{\frac{7}{15}}{1 - \frac{7}{15}} = \dfrac{7}{8}$.

2) Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{10}{3}\right)^{n+1}$ расходится, так как $q = \dfrac{10}{3} > 1$.

Свойства сходящихся рядов:

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и имеет сумму *S*, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n + \ldots$ также сходится и имеет сумму *SC*.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$ также сходится, и его сумма равна $S_1 + S_2$.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

Ряд $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, полученный из данного ряда отбрасыванием его первых *n* членов, называется *n-м остатком ряда.*

Тогда сумму ряда можно представить в виде

$$S = S_n + r_n.$$

4. Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Установить сходимость (расходимость) ряда путем определения S_n и вычисления $\lim_{n\to\infty} S_n$ возможно далеко не всегда из-за трудностей при нахождении S_n. Проще это можно сделать на основании признаков сходимости.

При решении ряда математических задач приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Из теории действительных чисел известно, что означает сумма любого конечного числа слагаемых. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема 1 (необходимый признак сходимости): Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство.

Представим n-й член ряда в виде $u_n = S_n - S_{n-1}$. Так как ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Пример.

Проверить выполнимость необходимого признака сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{15}\right)^n$.

Решение.

Выше доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{15}\right)^n$ сходится и $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$, то необходимый признак сходимости выполняется.

3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Следствие (достаточный признак расходимости): Если предел общего члена u_n при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство.

Предположим противное, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Тогда по теореме 1 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, что противоречит условию $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$

Решение.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Замечание. Рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, не недостаточный признак сходимости ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то из этого еще не следует, что ряд сходится.

Например, рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

называемый ***гармоническим***.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, но ряд расходится (доказательство расходимости будет приведено ниже).

2) Первый признак сравнения рядов.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$, называется рядом с положительными членами.

Теорема (признак сравнения): Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем члены ряда (1) не превосходят членов ряда (2), т.е. при любом n

$$u_n \le v_n .$$

Тогда:

1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Замечание. Условие теоремы не обязательно должно выполняться с первых членов рядов.

Приведем «эталонные» ряды, часто используемые для сравнения:

1) геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$;

2) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится;

3) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \ge 1$.

Примеры.

Исследовать сходимость ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$;   2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Решение.

1) Сравним данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ со сходящимся геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (его знаменатель $q = \frac{1}{2} < 1$).

Так как $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$, то по признаку сравнения данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ сходится.

2) Сравним данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, то по признаку сравнения данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

3) Второй (предельный) признак сравнения рядов.

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Пример.

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$.

Решение.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n^2+3} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+3} = 2 \neq 0$, то данный ряд, так же как и гармонический, расходится.

4) Признак Даламбера.

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му члену: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$. Тогда, если $d<1$, то ряд сходится; если $d>1$, то ряд расходится; если $d=1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример. Исследовать сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Решение.

1) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} = 3 > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

5) Интегральный признак Коши

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами. Рассмотрим функцию $f(x)$, где $x \in [1;+\infty)$ и $f(n) = u_n$. Если функция $f(x)$ непрерывная, невозрастающая на $x \in [1;+\infty)$, то если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример.

Исследовать сходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ где $x \in [1;+\infty)$. Она положительная и убывающая. Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$. Так как несобственный интеграл расходится, то по интегральному признаку Коши и ряд расходится.

4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

Ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, где $u_n > 0$, называется ***знакочередующимся рядом***.

Например, $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ — знакочередующийся ряд.

Теорема (Признак Лейбница): Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, то ряд сходится.

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенству $0 < S < u_1$.

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ называется ***условно сходящимся***, если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, составленный из абсолютных величин его членов.

При практическом использовании сходящихся знакочередующихся рядов обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Допускаемая при этом абсолютная погрешность не превышает модуля первого отброшенного члена.

Пример: Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$.

Требуется:

1) исследовать его на сходимость по признаку Лейбница;
2) если ряд сходится, исследовать его на абсолютную сходимость;
3) вычислить приближенное значение суммы, взяв три первых члена ряда;
4) оценить допускаемую при этом погрешность.

Решение

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}-\frac{4}{10000}+\ldots$ является знакочередующимся.

Проверим, выполняется ли признак Лейбница, согласно которому, если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел модуля общего члена ряда при $n\to\infty$ равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится.

Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ монотонно убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{10}>\frac{2}{100}>\frac{3}{1000}>\frac{4}{10000}>\ldots$$

Найдем предел модуля общего члена ряда при $n\to+\infty$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{10^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(10^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10^x\ln 10}=0.$$

Согласно признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится.

2) Выясним, как сходится знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$, условно или абсолютно. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}.$$

Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{10^{n+1}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n}=$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10}<1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ сходится. Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}$ сходится абсолютно.

3) Вычислим приближенное значение суммы ряда, взяв три первых члена:

$$S\approx S_3=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}=0,1-0,02+0,003=0,983.$$

4) Оценим погрешность вычисления.

Если ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток по модулю не превышает абсолютной величины первого члена остатка.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{10^n}=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}-\underbrace{\frac{4}{10000}+\frac{5}{100000}+\ldots}_{\text{остаток ряда}};$$

$$|a_4|=\left|-\frac{4}{10000}\right|=0,0004.$$

Поэтому погрешность вычислений $\delta\le 0,0004$.

5. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда

Ряд $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где x — переменная величина; a_n, x_0 — числа, называется ***степенным***.

Для $x_0 = 0$ получаем степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Областью сходимости степенного ряда называется множество значений *x*, для каждого из которых соответствующий числовой ряд сходится.

Определение области сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ базируется на теореме Абеля.

Теорема Абеля: Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0$, то он абсолютно сходится при всех значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если же степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

Из теоремы Абеля следует существование такого числа $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, при $|x| > R$ — расходится.

Число *R* называют ***радиусом сходимости***.

Интервал $(-R; R)$ называют интервалом сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ находится по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всегда сходится при $x = 0$.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при любом значении *x*, то $R = \infty$.

Пример: Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение

Возьмем последовательно n = 1, 2, 3, … . Тогда данный ряд записывается в виде:

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3}+\frac{5^2x^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5^3x^3}{3^2\cdot 3^3}+\ldots+\frac{5^n x^n}{n^2\cdot 3^n}+\ldots .$$

Это степенной ряд. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}5^n x^n}\right|=\frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{5}{3}|x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству:

$$\frac{5}{3}|x|<1,\ \text{или}\ |x|<\frac{3}{5},\ \text{или}\ -\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x=-\dfrac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакочередующимся. Исследуем его по признаку Лейбница:

1) абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;

2) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $1>\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{9}>\ldots$.

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ сходится. Значит, $x=-\dfrac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

При $x=\dfrac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1 .$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Значит, $x=\dfrac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

Таким образом, $-\frac{3}{5} \le x \le \frac{3}{5}$ — область сходимости данного степенного ряда.

Ответ: $\left[-\frac{3}{5};\ \frac{3}{5}\right)$.

Лекционное упражнение:

Ответить на вопросы:

1. Что называют рядом Тейлора?
2. Что называют рядом Маклорена?
3. Каковы необходимое и достаточное условия разложения функции в ряд Тейлора?
4. Каковы разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций?
5. Как с помощью разложения в степенные ряды приближенно вычисляются значения функций? Приведите пример.
6. Как с помощью разложения в степенные ряды приближенно вычисляются определенные интегралы? Приведите пример.