Обзорная лекция №7
Интегральное исчисление функций одной переменной

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования: подведением под знак дифференциала, замена переменной и интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных дробей.
5. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.
6. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
7. Понятие определенного интеграла.
8. Геометрический смысл определенного интеграла.
9. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
12. Геометрические приложения определенного интеграла.

1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.
2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.
4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.
5) Вычисление объема тела вращения.

Интегральное исчисление – раздел математического анализа, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования.

Основными понятиями интегрального исчисления являются понятия первообразной, неопределённого интеграла, определённого интеграла. Они были введены независимо друг от друга английским математиком И. Ньютоном и немецким математиком Г. Лейбницем.

Знак интеграла $\int$ был опубликован в статье Г. Лейбница в 1686 г., термин «интеграл» впервые в печати употребил швейцарский учёный Якоб Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление». Однако современная терминология была создана только в конце XVIII века.

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла

Ранее решалась задача: по данной функции $f(x)$ найти её производную или дифференциал. Рассмотрим обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x)=f(x)$ или дифференциал.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ для любого x из области определения $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=x^2$ первообразной является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, где С — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество $F(x)+C$ первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных $F(x)+C$ и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Например, $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$.

Достаточным условием существования неопределенного интеграла на некотором промежутке является непрерывность функции на этом промежутке.

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

2. Свойства неопределённого интеграла.

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\,.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

2. Таблица основных интегралов

См. приложение.

3. Основные методы интегрирования

1) Метод непосредственного интегрирования: данный интеграл путём простейших тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример. Найти интегралы:

а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx;$

б) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx\,;$

в) $\int (\cos 5x - \sin 3x + 7^{2x})dx.$

Решение.

а) Подынтегральная функция представляет собой алгебраическую сумму функций, которые представляют собой произведение числа на степенную функцию. Поэтому применим свойства (5) и (4), а затем табличные интегралы (1), (1.1):

$$\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx = 5\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + 3\int x dx - 2\int dx =$$

$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} - 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + C =$$

$$= x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

Сделаем проверку, для этого воспользуемся свойством (2):

$$d(x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C) = (x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C)' dx = (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx.$$

Получили подынтегральное выражение, следовательно, интеграл найден правильно.

б) Применяя свойства (5) и (4) и табличные интегралы (9), (8), получим:

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}-2\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3\arcsin\frac{x}{2}-2\,tgx+C.$$

в) Применяя свойство (5) и табличные интегралы (6.1.), (5.1.), (3.1.), получим:

$$\int(\cos 5x-\sin 3x+7^{2x})dx=\int\cos 5xdx-\int\sin 3xdx+\int 7^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{2}\frac{7^{2x}}{\ln 7}+C.$$

2) Метод замены переменной (метод подстановки): заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой–либо из основных формул интегрирования.

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix} x=\varphi(u) \\ dx=\varphi'(u)du \end{bmatrix}=\int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)du=\int F(u)du$$

После нахождения интеграла через переменную *u* следует перейти к переменной *x*.

Пример. Найти интегралы:

а) $\int(3x+2)^5dx;$

б) $\int(2x^3+1)^4x^2dx;$

Решение.

а) Произведём подстановку $3x+2=u$. Возьмём дифференциалы от обеих частей равенства $(3x+2)'dx=du$ или $3dx=du$. Отсюда $dx=\frac{du}{3}$. Заменив в искомом интеграле $(3x+2)$ и dx их найденными значениями и применив свойство неопределённого интеграла (4) и табличный интеграл (1), получим:

$$\int(3x+2)^5dx=\begin{bmatrix} 3x+2=u \\ 3dx=du \\ dx=\dfrac{du}{3} \end{bmatrix}=\int u^5\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^5du=\frac{1}{3}\frac{u^{5+1}}{5+1}+C=\frac{1}{18}u^6+C=$$

$$=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C;$$

Сделаем проверку, для этого воспользуемся свойством (1):

$$\left(\frac{1}{18}(3x+2)^6+C\right)'=\frac{6}{18}(3x+2)^5\cdot(3x+2)'=\frac{1}{3}(3x+2)^5\cdot 3=(3x+2)^5$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

б) Произведём подстановку $2x^3+1=u$. Возьмём дифференциалы от обеих частей равенства $6x^2dx=du$. Отсюда $x^2dx=\dfrac{du}{6}$. Заменив в искомом интеграле $\left(2x^3+1\right)$ и x^2dx их найденными значениями и применив свойство неопределённого интеграла (4) и табличный интеграл (1), получим:

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\begin{bmatrix}2x^3+1=u\\6x^2dx=du\\x^2dx=\dfrac{du}{6}\end{bmatrix}=\int u^4\frac{du}{6}=\frac{1}{6}\int u^4du=\frac{1}{6}\frac{u^{4+1}}{4+1}+C=\frac{1}{30}u^5+C=$$

$$=\frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C;$$

3) Метод интегрирования по частям.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции. Определим дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv)=udv+vdu,$$

откуда

$$udv=d(uv)-vdu.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \quad (7.1)$$

При применении этой формулы надо:

1) подынтегральное выражение разбить на две части *u* и dv, при этом за *u* обычно принимается x^n, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$,

2) по *u* дифференцированием найти *du*,

3) по *dv* интегрированием найти *v*, причем постоянную интегрирования опустить,

4) подставить в формулу, прийти к более простому интегралу.

Пример. Найти интегралы:

а) $\int(x+5)e^xdx$;

б) $\int x^3\ln xdx$.

Решение.

а) Положим $u=x+5$, $dv=e^xdx$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^xdx=e^x$.

Применяя формулу интегрирования по частям (7.1), получим:

$$\int(x+5)e^xdx=(x+5)e^x-\int e^xdx=(x+5)e^x-e^x+C=e^x(x-4)+C.$$

б) Положим $u=\ln x$, $dv=x^3dx$. Тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\int x^3dx=\dfrac{x^4}{4}$.

Применяя формулу интегрирования по частям (7.1), получим:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}\left(4\ln x - 1\right) + C.$$

Пример. Найти неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

а) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

б) $\int e^{x^5} x^4 dx$;

в) $\int (4x+1)\sin 3x dx$.

Решение.

а) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 4\int x^{-2}dx - \frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx + 6\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + 6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{4}{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16} + 9\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(-\frac{4}{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16} + 9\sqrt[3]{x^2} + C\right)' = -4\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{3}{16}\left(x^{\frac{8}{3}}\right)' + 9\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + C' =$$

$$= -4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{3}{16}\cdot\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} + 9\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x^5}}{2} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

б) $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \begin{bmatrix} u = x^5, \\ du = 5x^4 dx, \\ x^4 dx = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{x^5} + C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(\frac{1}{5}e^{x^5}+C\right)'=\frac{1}{5}\left(e^{x^5}\right)'+C'=\frac{1}{5}e^{x^5}\left(x^5\right)'=\frac{1}{5}e^{x^5}5x^4=e^{x^5}x^4.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

в) $\int(4x+1)\sin 3x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int(4x+1)\sin 3x dx=\begin{bmatrix} u=4x+1, & du=4dx \\ dv=\sin 3x dx, & v=\int\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\int\cos 3x dx=$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x+C=$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{9}\sin 3x+C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x+\frac{4}{9}\sin 3x+C\right)'=$$

$$-\frac{1}{3}\left((4x+1)'\cos 3x+(4x+1)(\cos 3x)'\right)+\frac{4}{9}(\sin 3x)'+C'=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(4\cos 3x+(4x+1)(-\sin 3x)(3x)'\right)+\frac{4}{9}\cos 3x(3x)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(4\cos 3x-3(4x+1)\sin 3x\right)+\frac{4}{3}\cos 3x=$$

$$=-\frac{4}{3}\cos 3x+(4x+1)\sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x=(4x+1)\sin 3x.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

4. Интегрирование рациональных дробей

Многочленом степени n называется выражение вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

где a_0, a_1, …, a_n — некоторые числа, $a_n\neq 0$.

Например, выражение $4-3x+5x^4$ является многочленом четвертой степени.

Рациональной дробью (рациональной функцией) называется отношение двух многочленов.

Например, $\dfrac{x^3-4x+7}{x^4+2x^2-3}$ — рациональная дробь.

Правильной называется дробь, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Используя алгоритм деления многочленов, всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

1) Интегрирование простейших дробей.

Рассмотрим интегрирование трех типов простейших дробей:

1) $\dfrac{A}{x-b}$;

2) $\dfrac{A}{(x-b)^n}$, $n>1$;

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Интегралы от простейших рациональных дробей 1-го и 2-го типа находят с помощью замены $ax+b=t$ или подведения $ax+b$ под знак дифференциала $dx=\dfrac{1}{a}d(ax+b)$.

Пример: Найти $\int\dfrac{dx}{5x-3}$.

Решение.

$$\int\frac{1}{5x-3}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x-3)}{5x-3}=\frac{1}{5}\ln|5x-3|+C$$

Пример: Найти $\int\dfrac{dx}{(3-4x)^3}$.

Решение.

$$\int\frac{1}{(3-4x)^3}dx=\left|\begin{array}{l}\textit{Замена}\\ 3-4x=t\\ -4dx=dt\\ dx=-\frac{1}{4}dt\end{array}\right.$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{4}\int t^{-3}dt=-\frac{1}{4}\frac{t^{-2}}{-2}+C=$$

$$=\frac{1}{8t^2}+C=\frac{1}{8(3-4x)^2}+C.$$

В простейших рациональных дробях 3-го типа в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}k+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$ и делают замену $x+\frac{b}{2a}=t$.

Пример: Найти $\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx$.

Решение.

$$\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx=\left|\begin{aligned}&x^2-6x+13=\\&=x^2-6x+9+4=\\&=(x-3)^2+4,\\&x-3=t,\\&x=t+3, dx=dt\end{aligned}\right.$$

$$=\int\frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt=\int\frac{2t+4}{t^2+4}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+4}+$$

$$+4\int\frac{dt}{4+t^2}=\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+4\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\ln\left|t^2+4\right|+4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\ln\left|x^2-6x+13\right|+2arctg\frac{x-3}{2}+C.$$

2) Разложение на простейшие дроби.

Если правильная дробь не относится к простейшим, то находят корни ее знаменателя, раскладывают знаменатель на квадратичные и (или) линейные множители с действительными коэффициентами, а затем раскладывают дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

Для отыскания неопределенных коэффициентов A, B, C, … правую часть полученного равенства приводят к общему знаменателю и приравнивают числители левой и правой частей.

После этого:

– либо *подставляют* в полученное равенство *конкретные значения* x (лучше всего — корни знаменателя исходной дроби);

– либо *приравнивают* в полученном равенстве *коэффициенты при одинаковых степенях* x (в этом случае имеющиеся скобки надо раскрыть и привести подобные).

В результате получается система для определения A, B, C, …

Примеры разложения:

$$\frac{3x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{3x-4}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+3)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2},$$

$$\frac{x}{(x+2)(x^2+8)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+8}.$$

Пример: Найти интеграл $\int\frac{x^2+8}{x^3-8}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную дробь $\frac{x^2+8}{x^3-8}$ на сумму простейших.

Так как $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$, то

$$\frac{x^2+8}{x^3-8}=\frac{x^2+8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей, получим

$$x^2+8=A\,(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2).$$

Найдем коэффициенты A, B, C *первым способом*. Для этого подставим в предыдущее равенство последовательно $x=2$ (корень знаменателя исходной дроби), $x=0$ и $x=1$ (наиболее удобные целые числа), тогда получим:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{при} & x=2:12=12A,\\ \text{при} & x=0:8=4A-2C,\\ \text{при} & x=1:9=7A-B-C\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}A=1,\\ C=-2,\\ B=0.\end{array}$$

Покажем как найти A, B, C *вторым способом*. Для этого в равенстве раскроем скобки и сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые степени x:

$$x^2+8=x^2\,(A+B)+x\,(2A-2B+C)+(4A-2C).$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получим

$$\left.\begin{array}{ll}\text{при} & x^2:1=A+B\\ \text{при} & x^1:0=2A-2B+C,\\ \text{при} & x^0:8=4A-2C\end{array}\right\}\Rightarrow A=1, B=0, C=-2.$$

Таким образом, заданный интеграл равен

$$\int\frac{x^2+8}{x^3-8}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{x^2+2x+4}\right)dx=\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x^2+2x+4}=$$

$$= \int \frac{d(x-2)}{x-2} - 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3} = \ln|x-2| - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Интегрирование неправильных рациональных дробей.

Для нахождения интегралов от *неправильной рациональной дроби* в ней выделяют целую часть.

Пример: Найти $\int \frac{x^3+4}{x^2+4x+1}\, dx.$

Решение.

Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Выделим в ней целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2+4x+1 \\ \cline{2-2} -\; x^3+4x^2+x & x-4 \\ \cline{1-1} -4x^2-x+4 & \\ -\; -4x^2-16x-4 & \\ \cline{1-1} 15x+8 & \end{array}$$

Получим:

$$\frac{x^3+4}{x^2+4x+1} = x-4+\frac{15x+8}{x^2+4x+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3+4}{x^2+4x+1}dx = \int \left(x-4+\frac{15x+8}{x^2+4x+1} \right) dx =$$

$$= \int xdx - 4\int dx + \int \frac{15x+8}{x^2+4x+1}dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{15x+8}{\left(x+2\right)^2-3}dx =$$

$$\begin{bmatrix} t = x+2, \\ x = t-2, \\ dx = dt; \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{15\left(t-2\right)+8}{t^2-3}dt = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{15t-22}{t^2-3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 15\int \frac{tdt}{t^2-3} - 22\int \frac{dt}{t^2-3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{15}{2}\int \frac{d\left(t^2-3\right)}{t^2-3} - 22 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{15}{2}\ln\left|t^2-3\right| - \frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\ln\left|(x+2)^2-3\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{15}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|-\frac{11}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C.$$

5. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

1) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ находят с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример: Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$t = tg\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$=\int \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.

При нахождении таких интегралов используют формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример: Найти $\int cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$.

Решение.

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \sin^4 x\, dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \sin^4 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$\begin{bmatrix} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx; \end{bmatrix}$$

$$= \int \left(1-t^2\right) t^4 dt \; = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример: Найти $\int \cos^2 3x dx$.

Решение.

$$\int \cos^2 3x dx = \quad \left| \begin{matrix} \text{по формуле} \\ \text{понижения степени} \end{matrix} \right.$$

$$= \int \frac{1+\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{6}\sin 6x) + C.$$

6. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$ рационализируются заменой $x = t^n$.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x}\right) dx$ рационализируются заменой $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное чисел n, m.

Пример: Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3} =$$

$$x = t^2, \quad t = \sqrt{x}, \quad dx = 2tdt$$

$$= \int \frac{2tdt}{t+3} = \int \left(2 - \frac{6}{t+3}\right) dt = 2t - 6\ln\left|t+3\right| + C = 2\sqrt{x} - 6\ln\left|\sqrt{x}+3\right| + C.$$

7. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена на отрезке $\left[a;b\right]$, $a < b$. Выполним следующие действия:

1) С помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < ... < x_n$) разобьем отрезок $\left[a;b\right]$ на *n частичных отрезков* $\left[x_0; x_1\right]$, $\left[x_1; x_2\right]$, …, $\left[x_{n-1}; x_n\right]$.

2) В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, i = 1, 2, …, n выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3) Умножим найденное значение $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

4) Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ (i = 1, 2, …, n).

5) Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то он и называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ — *областью* (*отрезком*) *интегрирования.*

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Теорема: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

8. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox. сбоку — прямыми $x = a$, и $x = b$, называется *криволинейной трапецией.*

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади этой криволинейной трапеции.

9. Формула Ньютона-Лейбница

Для вычисления определённого интеграла применяется формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ нужно:

1) найти первообразную $F(x)$ (при $C = 0$),

2) в полученное выражение подставить вместо x пределы интегрирования, сначала верхний, а затем нижний и из первого результата вычесть второй.

Пример. Вычислить определённые интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

а) $\int\limits_1^2 x^3 dx$; *б)* $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; *г)* $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим данные определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$;

б) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx = \int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$;

г) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{5} arctg \frac{x}{5}\Big|_0^5 = \frac{1}{5}(arctg 1 - arctg\, 0) = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}$.

10. Основные свойства определенного интеграла

1. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрировании, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt .$$

2. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0 .$$

3. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx .$$

4. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разделён точкой c на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_b^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx .$$

6. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждой из этих функции:

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx .$$

Пример: Вычислить определённые интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^2 (4x^3 - 1)dx$; б) $\int\limits_1^4 (x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$; в) $\int\limits_0^\pi (e^x - \frac{1}{2}\cos x)dx$.

Решение.

Применяя свойства определённого интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, вычислим интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^2 (4x^3 - 1)dx = 4\int\limits_{-1}^2 x^3 dx - \int\limits_{-1}^2 dx = 4\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^2 - x\Big|_{-1}^2 = x^4\Big|_{-1}^2 - x\Big|_{-1}^2 =$

$$= 4\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} = x^4\Big|_{-1}^{2} - x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2^4 - (-1)^4\right) - \left(2 - (-1)\right) = (16-1) - 3 = 12\,;$$

б) $$\int_1^4 \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 x^2dx - 2\int_1^4 xdx + \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 - x^2\Big|_1^4 + \sqrt{x}\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(4^2 - 1^2\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 21 - 15 + 1 = 7\,;$$

в) $$\int_0^{\pi} (e^x - \frac{1}{2}\cos x)dx = \int_0^{\pi} e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos xdx = e^x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left(e^{\pi} - e^0\right) - \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin 0\right) = e^{\pi} - 1\,.$$

11. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замену переменных в определенном интеграле выполняют по тем же правилам, что и в неопределенном, только, с учетом замены, устанавливают пределы для новой переменной интегрирования. При этом не надо возвращаться к первоначальной переменной интегрирования. (как это было в неопределенном интеграле).

Пример: Вычислить $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \left|\begin{array}{l} \text{Замена} \\ \sqrt{x+1} = t, \quad x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ \text{Новые пределы:} \\ t_1 = \sqrt{x+1}\,\big|_{x=0} = 1 \\ t_2 = \sqrt{x+1}\,\big|_{x=3} = 2 \end{array}\right.$$

$$=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\,2tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2 =$$

$$=2\left(\frac{8}{3}-2\right)-2\left(\frac{1}{3}-1\right)= {}^{8}\!/_{3}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняют с помощью формулы

$$\int_a^b udv = (u\cdot v)\ \Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x\cos xdx.$

Решение.

$$\int_0^{\pi} x\cos xdx = \qquad \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array}\right.$$

$$\overset{(20)}{=} x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin xdx = (\pi\sin\pi - 0) + \cos x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

12. Геометрические приложения определенного интеграла

1) Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.

1) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью *Ox*, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 5$ и осью *Ox*.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок фигуры.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью *Ox*:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 - 5, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0,$$

$$x^2-6x+5=0,$$
$$x_1=1,\ x_2=5.$$

Тогда

$$S=\int_1^5\left(6x-x^2-5\right)dx=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}-5x\right)\Bigg|_1^5=$$
$$=75-\frac{125}{3}-25-3+\frac{1}{3}+5=10\frac{2}{3}\ \text{(кв. ед.)}$$

2) Если криволинейная трапеция расположена ниже оси абсцисс, то есть $f(x)\le 0$ на отрезке $[a,b]$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4x$, прямыми $x=\frac{1}{2}$, $x=3$ и осью *Ox*.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок фигуры.

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{3}\left(x^2-4x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{3}=-9+18+\frac{1}{24}-\frac{1}{2}=8\frac{13}{24}\ \text{(кв. ед.)}$$

3) Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу — непрерывной кривой $y=g(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-3x$ и прямой $y=4-3x$.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок фигуры.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases}y=x^2-3x,\\ y=4-3x;\end{cases}$$
$$x^2-3x=4-3x,$$
$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

Тогда

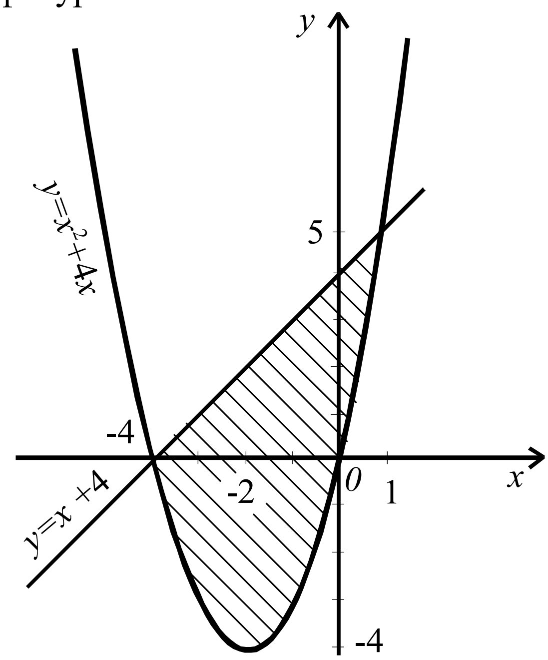
$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-3x-x^2+3x\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=$$

$$=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\ \text{(кв. ед.)}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x$, $y=x+4$, (сделать чертеж).

Решение.

Построим эскиз фигуры:



Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами $x=a$ и $x=b$, определяется по формуле $S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx.$

Для нахождения абсцисс точек пересечения данных линий решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y=x^2+4x, \\ y=x+4; \end{cases}$$

$$x^2+4x=x+4,$$

$$x^2+3x-4=0,$$

$$x_1=-4,\quad x_2=1.$$

Тогда

$$S=\int_{-4}^{1}\left(x+4-x^2-4x\right)dx=\int_{-4}^{1}\left(4-3x-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{1}=$$

$$=4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+16+\frac{48}{2}-\frac{64}{3}=20\frac{5}{6}\left(\text{кв. ед.}\right).$$

4) Если уравнение контура задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$\boxed{S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt},$$

где t_1 и t_2 определяются из соотношений $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, заданным параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок фигуры.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то вычислим вначале четвертую часть искомой площади.

Найдем пределы для параметра *t*. Так как *x* изменяется от 0 до *a*, то имеем:

$$0=a\cos t,\ t_1=\frac{\pi}{2}\ \text{— нижний предел;}$$

$$a=a\cos t,\ t_2=0\ \text{— верхний предел.}$$

Тогда

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=$$

$$=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Следовательно, площадь эллипса $S=\pi ab$.

2) Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.

Пусть задана полярная система координат.

- *Криволинейным сектором* наз. плоская фигура, ограниченная непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$.

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярной осью.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок фигуры.

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \left.\frac{a^2\varphi^3}{6}\right|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

3) Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

а) Длина дуги *AB* кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение.

Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$l = \int_{0}^{5} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_{0}^{5} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_{0}^{5} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^5 = \left.\frac{8}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right|_0^5 = \frac{8}{27}\left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} \text{ (ед.)}$$

б) Длина дуги *AB* кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$, где $t_1 \le t \le t_2$, вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt}.$$

Пример. Вычислить длину астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок кривой.

Кривая симметрична относительно осей координат. Вычислим длину той части, которая расположена в первой четверти, в этом случае t будет изменяться от $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Предварительно найдем производные:

$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,$$
$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\cdot dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\cdot dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sin t\cdot dt=$$

$$=-3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot d(\cos t)=-3a\cdot\left.\left(\frac{\cos^2 t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3a\cdot\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\cos^2 0}{2}\right)=\frac{3a}{2}.$$

Следовательно, длина астроиды $l=6a$.

4) Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат.

Длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$. вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\cdot d\varphi}.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок кривой.

Кривая симметрична относительно полярной оси. При изменении полярного угла от 0 до π имеем половину кривой.

Найдем производную:

$$r'=-a\sin\varphi.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}l=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\cdot d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\cdot d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\cdot d\varphi=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=4a.$$

Следовательно, длина кардиоиды $l=8a$.

5) Вычисление объема тела вращения

а) Вокруг оси *Ох* вращается криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, слева и справа — соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, снизу — осью *Ох*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b y^2dx}.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ох* криволинейная трапеция, ограниченной параболой $y^2=4x$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью *Ох*.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок тела.

$$V_x=\pi\int_1^3 4xdx=2\pi x^2\Big|_1^3=18\pi-2\pi=16\pi \text{ (куб. ед.)}$$

2) Вокруг оси *Оу* вращается криволинейная трапеция, ограниченная справа графиком непрерывной функции $x=g(y)$, снизу и сверху — соответственно прямыми $y=c$, $y=d$, слева — осью *Оу*. Получается тело вращения, объем которого вычисляется по формуле

$$\boxed{V_y=\pi\int_c^d x^2dy}.$$

Пример.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Оу* фигуры, ограниченной гиперболой $xy=2$, прямыми $y=2$, $y=4$ и осью *Оу*.

Решение.

Лекционное упражнение: Сделайте рисунок тела.

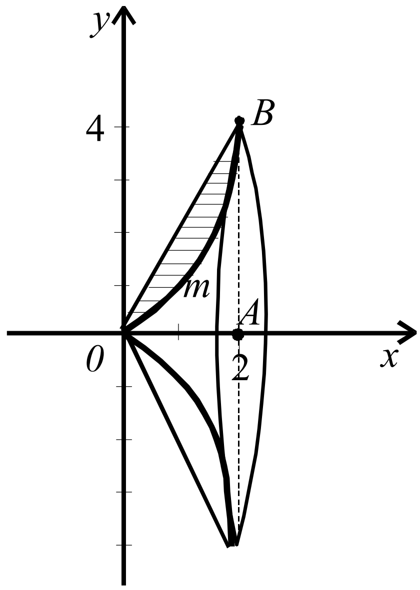
$$V_y = \pi \int_2^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \int_2^4 y^{-2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_2^4 = -\pi + 2\pi = \pi \text{ (куб. ед.)}$$

Пример.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$, вокруг оси *Ox*.

Решение

Построим эскиз тела:



Пусть V_1 — объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры *OABmO*, а V_2 — объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* треугольника *OAB.* Тогда искомый объем V_x равен разности объемов V_2 и V_1:

$$V_x = V_2 - V_1.$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси *Ox*, находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования, находим абсциссы точек пересечения данных линий. Для этого решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$x^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x\left(x-2\right)=0,$$
$$x_1=0,\quad x_2=2.$$

Следовательно,

$$V_x=V_2-V_1=\pi\int_0^2(2x)^2dx-\pi\int_0^2(x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-x^4)dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=$$
$$=\pi\left[\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right]=\frac{64}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $V=\dfrac{64}{15}\pi$ (куб. ед.).