Контрольная работа № 4 «Неопределенный интеграл»

Типовые задания:

Базовый уровень

Задание № 1.

Требуется найти неопределенные интегралы. В пунктах 1) и 2) сделать проверку дифференцированием:

1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$

2) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$

3) $\int \ln x dx$

Повышенный уровень

Задание № 2.

1) $\int\frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$

2) $\int\frac{x}{x^3+1}dx$

3) $\int\cos^2 x\sin^3 x dx$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5}x^4 dx$;

3) $\int(4x+1)\sin 3x dx$;

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{4}{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16} + 9\sqrt[3]{x^2} + C.$$

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5} x^4 dx = \begin{bmatrix} u = x^5, \\ du = 5x^4 dx, \\ x^4 dx = \frac{1}{5} du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

3) $\int (4x+1)\sin 3x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int (4x+1)\sin 3x dx = \begin{bmatrix} u = 4x+1, & du = 4dx \\ dv = \sin 3x dx, & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\sin 3x + C =$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{9}\sin 3x + C.$$

(Проверку дифференцированием выполните самостоятельно.)

Повышенный уровень

Задание № 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13} dx$.

Решение

Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа. В ее знаменателе выделим полный квадрат и сделаем замену переменных:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13} dx = \begin{bmatrix} x^2 - 6x + 13 = \\ = x^2 - 6x + 9 + 4 = \\ = (x-3)^2 + 4, \\ x - 3 = t, \\ x = t + 3, dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$=\int \frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt=\int \frac{2t+4}{t^2+4}dt=\int \frac{2tdt}{t^2+4}+$$

$$+4\int \frac{dt}{4+t^2}=\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4}+4\int \frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\ln\left|t^2+4\right|+4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\ln\left|x^2-6x+13\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

2) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Получим:

$$\int \cos^3 x \sin^4 x dx=\int \cos^2 x \cos x \sin^4 x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)\sin^4 x \cos x dx=$$

$$\begin{bmatrix} t=\sin x, \\ dt=\cos x dx \end{bmatrix}$$

$$=\int \left(1-t^2\right)t^4 dt=\int \left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$