Обзорная лекция №8
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
3. Частные производные первого порядка функции двух переменных.
4. Полный дифференциал функции двух переменных.
5. Частные производные второго порядка функции двух переменных.
6. Экстремумы функции двух переменных.
7. Условный экстремум функции нескольких переменных.
8. Производная по направлению. Градиент.

1. Понятие функции нескольких переменных

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого множества D соответствует одно определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана ***функция нескольких переменных*** $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Например, формула $V = \pi R^2 H$ задает объем цилиндра V как функцию двух переменных R (радиуса основания) и H (высоты).

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *независимыми переменными*, или *аргументами*, z — *зависимой переменной*, а символ f означает *закон соответствия*.

Множество D называтся *областью определения функции.*

Мы будем рассматривать в основном функции двух переменных $(n = 2)$, то есть $z = f(x, y)$. При этом практически все понятия и теоремы переносятся и на случай $n > 2$.

Тогда ее областью определения D является подмножество координатной плоскости Oxy.

Пример. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение.

Область определения задается условием: $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Лекционное упражнение: Изобразите в системе координат область определения функции.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства с координатами $(x, y, f(x, y))$. Он представляет собой некоторую поверхность в системе координат $Oxyz$.

Для построения графика $z = f(x, y)$ используют *метод сечений.*

Пример. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение.

Найдем сечение поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостью Oyz:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$z = y^2 \text{ — парабола.}$$

Найдем сечение поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостью Oxz:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$z = x^2 \text{ — парабола.}$$

Найдем сечение поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостью, параллельной плоскости Oxy:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = z_0, \end{cases}$$

где $z_0 > 0$

$$x^2 + y^2 = z_0 \text{ — окружность.}$$

Таким образом, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является поверхность, называемая *параболоидом.*

Лекционное упражнение: Изобразите график функции.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, в которых значение функции одно и то же и равно C. Число C называется *уровнем*.

Придавая различные значения параметру C, можно получить множество линий уровня функции $f(x, y)$.

Если для каждой линии уровня указать соответствующее ей значение C, то получится топографическая карта поверхности, представляющей собой график функции.

Многие примеры линий уровня хорошо известны. В строительстве, например, используются топографические карты местности.

Пример. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение.

Линия уровня $z = C$ — это кривая на плоскости Oxy, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 = C$, то есть уравнение окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{C}$ (рис. 9.4). Точка $(0;0)$ — это вырожденная линия уровня, которая соответствует минимальному значению функции $z = 0$. Линии уровня — концентрические окружности.

Лекционное упражнение: Изобразите линии уровня.

2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке $(x_0; y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$, найдется положительное число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $(x; y)$, отстоящих от точки $(x_0; y_0)$ на расстояние ρ меньшее, чем δ, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

Предел обозначается следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A .$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\left(\ln(1 - \rho^2)\right)'}{\rho'} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2}(-2\rho)}{1} = 0 .$$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $(x_0; y_0)$, если:

1) она определена в точке $(x_0; y_0)$ и вблизи нее;

2) имеет конечный предел в точке $(x_0; y_0)$;

3) этот предел равен значению функции в точке $(x_0; y_0)$, то есть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

График непрерывной в точке $(x_0; y_0)$ функции представляет собой сплошную поверхность.

Пример. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{xy+3}{x^2-y}$.

Решение.

Область определения функции задается условием $x^2 - y \neq 0$.

Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$.

Лекционное упражнение: Изобразите в системе координат линию разрыва.

3. Частные производные первого порядка функции двух переменных

Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y — приращение Δy. Тогда функция z примет новое значение $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением* функции в точке $(x; y)$.

Если аргумент x получает приращение Δx, а аргумент y остается постоянным, то функция z получает *частное приращение по переменной* x:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Если аргумент y получает приращение Δy, а аргумент x остается постоянным, то функция z получает *частное приращение по переменной* y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Частной производной функции $z = f(x, y)$ ***по переменной x*** называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x; y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Обозначение: z'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ ***по переменной y*** называется предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} f(x; y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Обозначение: z'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ показан на рис. 9.5.

Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = const$, то есть $\dfrac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$. Аналогично, частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = const$, то есть $\dfrac{\partial z}{\partial y} = tg\beta$.

Для нахождения частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ надо переменную y считать постоянной, а для нахождения частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ надо переменную x считать постоянной.

Пример. Найти частные производные функций
1) $z = x^5 - 2xy^2 + 3xy - x$;
2) $z = \ln(x^3 + y^3)$.
Решение.
1) $z = x^5 - 2xy^2 + 3xy - x$.
Полагая y постоянной величиной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 2y^2 + 3y - 1.$$

Полагая x постоянной величиной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 3x.$$

2) $z = \ln(x^3 + y^3)$.
Полагая y постоянной величиной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3} \cdot \left(x^3 + y^3\right)'_x = \frac{3x^2}{x^3 + y^3}.$$

Полагая x постоянной величиной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^3+y^3}\cdot\left(x^3+y^3\right)_y' =\frac{3y^2}{x^3+y^3}.$$

4. Полный дифференциал функции двух переменных

Дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется сумма частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz=z_x'\Delta x+z_y'\Delta y.$$

Так как $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, то

$$dz=z_x'dx+z_y'dy.$$

Функция $z=f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $(x;y)$, если ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

где dz — дифференциал функции, $\alpha=\alpha(\Delta x;\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x;\Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Таким образом, *дифференциал функции* $z=f(x,y)$ *представляет собой главную, линейную относительно приращений* Δx *и* Δy, *часть полного приращения функции.*

Пример. Найти полный дифференциал функции $z=3x^2y^3-2x^2y-y$.

Решение.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3-4xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2x^2-1.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$dz=2xy\left(3y^2-2\right)dx+\left(9x^2y^2-2x^2-1\right)dy.$$

5. Частные производные второго порядка функции двух переменных

Частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции двух переменных $z=f(x,y)$ в свою очередь являются функциями переменных x и y, и от них можно снова находить частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy},$$

которые называются ***частными производными второго порядка.***

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$ по разным переменным называются ***смешанными***.

Если частные производные второго порядка функции $z=f(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0;y_0)$, то в этой точке смешанные частные производные второго порядка равны:

$$z''_{xy}(x_0;y_0)=z''_{yx}(x_0;y_0).$$

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^5-2xy^2+3xy-x$.

Решение.

Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-2y^2+3y-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3x.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(5x^4-2y^2+3y-1\right)'_x=20x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(5x^4-2y^2+3y-1\right)'_y=-4y+3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(-4xy+3x\right)'_x=-4y+3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-4xy+3x\right)'_y=-4x.$$

6. Экстремумы функции двух переменных

Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \ \left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\right).$$

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума.***

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом (минимумом)*** функции.

Максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами*** функции.

Теорема (необходимое условие экстремума): Если (x_0, y_0) — точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то частные производные $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$ в этой точке равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

Точки, в которых частные производные z'_x и z'_y равны нулю или хотя бы одна из них не существуют, называются *критическими.*

В критических точках функция может иметь, а может и не иметь экстремум.

Теорема (достаточное условие экстремума): Пусть функция $z = f(x, y)$:

1) определена в точке (x_0, y_0) и ее окрестности;

2) точка (x_0, y_0) — критическая точка;

3) имеет непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0; y_0) = z''_{yx}(x_0; y_0) = B$, $z''_{yy}(x_0; y_0) = C$.

Тогда если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то точка (x_0, y_0) является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$, причем если $A < 0$, то точкой максимума, если $A > 0$, то точкой минимума.

Если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то точка (x_0, y_0) не является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$.

Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

План исследования функции $z = f(x, y)$ на экстремум:

1. Найти область определения $D(z)$.

2. Найти частные производные первого порядка z'_x и z'_y.

3. Найти критические точки, решив систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

4. Найти частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

5. Вычислить значения частных производных второго порядка в критических точках, то есть A, B, C.

6. Найти значение $\Delta = AC - B^2$. Используя достаточное условие экстремума, сделать вывод о наличии экстремума.

7. Найти экстремумы функции.

Пример. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

Решение.

1. Область определения: $D(z) = R^2$.

2. Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6xy - 3x^2,$$
$$z'_y = 3x^2 - 4y^3.$$

3. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(2y - x) = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2y, \\ 12y^2 - 4y^3 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2(3 - y) = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Итак, $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$ — критические точки.

4. Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(6xy - 3x^2\right)'_x = 6y - 6x;$$
$$z''_{xy} = \left(6xy - 3x^2\right)'_y = 6x;$$
$$z''_{yy} = \left(3x^2 - 4y^3\right)'_y = -12y^2.$$

5. Рассмотрим точку $M_1(0;0)$.

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0,$$
$$B = z''_{xy}(M_1) = 0,$$
$$C = z''_{yy}(M_1) = 0.$$
$$\Delta = AC - B^2 = 0.$$

Точка $M_1(0;0)$ может быть, а может и не быть точкой экстремума.

6. Рассмотрим точку $M_2(6;3)$.

$$A = z''_{xx}(M_2) = -18,$$
$$B = z''_{xy}(M_2) = 36,$$
$$C = z''_{yy}(M_2) = -108.$$
$$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648 > 0.$$

Следовательно, точка $M_2(6;3)$ — точка экстремума.

Так как $A = -18 < 0$, то точка $M_2(6;3)$ — точка максимума.

7. Найдем экстремум функции.

$z(M_2) = z(6;3) = 3 \cdot 6^2 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$ — максимум функции.

7. Условный экстремум функции нескольких переменных

Экстремум функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что $\varphi(x, y) = 0$, называется ***условным.***

Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называется ***уравнением связи***.

Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремумов на кривой, по которой поверхность $z = f(x, y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x, y) = 0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ выразить $y = y(x)$ и подставить в уравнение $z = f(x, y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Пример. Найти экстремумы функции $z = x^2 - y^2$ при условии $y = 2x - 6$.

Решение.

Подставив $y = 2x - 6$ в уравнение $z = x^2 - y^2$, получим функцию одной переменной $z = x^2 - (2x-6)^2 = -3x^2 + 24x - 36$.

Находим $z' = -6x + 24$; $z' = 0$ при $x = 4$.

Так как $z'' = -6 < 0$, то точка $(4;2)$ является точкой условного максимума функции.

$z(4;2) = 12$ — условный максимум функции.

8. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$.

Задан некоторый вектор $\bar{l} = (l_x; l_y)$.

Тогда $|\bar{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ — длина вектора.

Направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\bar{l}|}, \; \cos\beta = \frac{l_y}{|\bar{l}|}.$$

При перемещении точки $M(x, y)$ в данном направлении в точку $M_1(x + \Delta x, \; y + \Delta y)$ функция z получит приращение $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, называемое ***приращением функции z в направлении l.***

Производной z_l' ***по направлению l*** функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl, когда последняя стремится к нулю, то есть

$$z_l' = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная z_l' характеризует скорость изменения функции в направлении *l*.

Производная z_l' находится по формуле:

$$z_l' = z_x' \cos\alpha + z_y' \cos\beta.$$

Пример. Найти производную функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ в точке $M(2; 5)$ в направлении вектора $\bar{l} = (-3; 4)$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$z_x' = 6xy - 3x^2, \; z_y' = 3x^2 - 4y^3.$$

Найдем их значение в точке $M(2; 5)$:

$$z_x'(M) = 6 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^2 = 48,$$

$$z_y'(M) = 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 5^3 = -476.$$

Найдем длину вектора $\bar{l} = (-3; 4)$:

$$|\bar{l}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Найдем направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \; \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Тогда производная z_l' в точке $M(2; 5)$:

$$z_l'(M) = 48 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (-476) \cdot \frac{4}{5} = -409{,}6.$$

Градиентом $\overline{grad} z$ функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$.

Градиент функции $\overline{grad} z$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку. Это позволяет с определенной погрешностью строить линии уровня.

Пример. Найти градиент функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ в точке $M(2; 5)$.

Решение.

Так как $z'_x(M) = 48$, $z'_y(M) = -476$ (см. пример 9.11), то

$$\overline{grad} z(M) = (48; -476)$$

или

$$\overline{grad} z(M) = 48\bar{i} - 476\bar{j}.$$