Практическое занятие
Повторные независимые испытания

I. Повторение основных теоретических сведений и примеры решения задач (конспект)

1. Формула Бернулли

- Пусть проводится n повторных испытаний, удовлетворяющих следующим условиям:

1. все n испытаний — независимые, т.е. вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний;
2. в каждом испытании может произойти событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Например, схемой Бернулли является 10 независимых выстрелов по мишени, где событие A — попадание (успех), $P(A) = 0{,}8$; событие $\overline{A}$ — промах (неудача), $P(\overline{A}) = 0{,}2$.

Для вычисления вероятности $P_n(k)$, того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Бернулли:***

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где n — число испытаний,
k — число появления события A (успеха) в n испытаниях,
p — вероятность появления события A (успеха) в каждом испытании,
q — вероятность непоявления события A (неуспеха) в каждом испытании,
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

Задача №1:

Вероятность появления бракованной детали равна 0,2. Найти вероятность того, что из четырех случайно отобранных деталей бракованных окажется

а) две;
б) не более двух;
в) хотя бы одна.

Решение.

A — бракованная деталь.

а) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $k = 2$.

Тогда

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}64 = 6 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}64 = 0{,}1536.$$

б) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $0 \le k \le 2$.

$P_4(0; 2) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2)$.

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 0{,}4096 = 0{,}4096,$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}512 = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}512 = 0{,}4096,$$

$P_4(2) = 0{,}1536$.

Тогда

$P_4(0; 2) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728$.

в) $n = 4$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $1 \le k \le 4$.

$P_4(1; 4) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904.$.

В n испытаниях Бернулли наиболее вероятное число успехов k_0 удовлетворяет неравенству

$$\boxed{np - q \le k_0 < np + p}$$

Задача №2:

Всхожесть семян данного растения 0,8. Найти наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных.

Решение.

$n = 5$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Тогда

$5 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le k_0 < 5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$,

$3{,}8 \le k_0 < 4{,}8$.

Так как $k_0 \in Z$, то $k_0 = 4$.

Итак, наиболее вероятное число проросших семян из пяти посеянных равно четырем.

2. Формула Пуассона

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, вероятность появления события A в одном испытании p мала, а произведение $\lambda = np \le 20$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, определяется по ***формуле Пуассона:***

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}},$$

где $\lambda = np$.

Для нахождения значений $P_n(k)$ по формуле Пуассона существуют таблицы.

Задача №3:

Завод отправил в магазин 1500 бутылок воды. Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 2-х бутылок.

Решение.

A — бутылка разбилась.

$n = 1500$, $p = 0{,}002$, $0 \le k \le 2$; $\lambda = np = 1500 \cdot 0{,}002 = 3$.

$P_{1500}(0;2) = P_{1500}(0) + P_{1500}(1) + P_{1500}(2)$.

$$P_{1500}(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}0498,$$

$$P_{1500}(1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}1494,$$

$$P_{1500}(2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} \approx 0{,}2240.$$

Тогда $P_{1500}(0;2) \approx 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$.

3. Локальная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю, для вычисления вероятности $P_n(k)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет k раз, используется ***локальная формула Муавра-Лапласа***:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется функцией Гаусса.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы значений.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) при $x \geq 4$ можно считать, что $\varphi(x) \approx \varphi(4)$.

Задача №4:

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n=200$, $p=0{,}7$, $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$, $k=160$;.

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \cdot \varphi\left(\frac{160-200 \cdot 0{,}7}{\sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi\left(\frac{20}{\sqrt{42}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{6{,}48} \cdot \varphi\left(\frac{20}{6{,}48}\right) \approx 0{,}15 \cdot \varphi(3{,}09) \approx 1{,}15 \cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005.$$

4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ или $P_n(k_1, k_2)$ того, что в n повторных независимых испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, используется ***интегральная формула Муавра-Лапласа***:

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — *функция Лапласа*. Имеются таблицы приближенных значений функции $\Phi(x)$.

Пользуясь таблицей, следует учитывать, что:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) при $x \geq 5$ можно считать, что $\Phi(x) \approx \Phi(5)$.

Задача №5:

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 и не более 90 раз.

Решение.

A — мишень поражена.

$n=100$, $p=0{,}8$, $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$, $k_1=75$;. $k_2=90$

$$P_{100}(75,90)\approx \Phi\left(\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)\approx \Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)\approx$$

$$\approx \Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25)\approx 0{,}4938+0{,}3944\approx 0{,}8882.$$

III. Самостоятельное решение задач:

№1. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что станок потребует внимание рабочего в течение часа, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение часа внимание рабочего потребует следующее количество станков:

1) один;
2) менее двух;
3) не менее одного и не более двух;
4) менее трех;
5) не менее трех;
6) хотя бы один.

№2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Произведено 100 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена:

1) ровно 85 раз;
2) не менее 70 и не более 85 раз;
3) не менее 85 раз;
4) менее 85 раз.

№3. Станок-автомат производит детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,003. Найти вероятность того, что среди 1000 изготовленных деталей бракованных будет:

1) ровно одна;
2) ровно две;
3) не менее трёх;
4) хотя бы одна.

Принять $e^{-3} \approx 0{,}0498$.

№4. Всхожесть семян равна 0,8. Посажено 625 семян. Найти:

1) наивероятнейшее число всхожих семян;
2) вероятность наивероятнейшего числа всхожих семян.

IV. Самоконтроль правильности решения задач:

Ответы:

№1.

1) 0,4096;
2) 0,8192;
3) 0,5632;
4) 0,9728;
5) 0,0272;
6) 0,5904.

№2.

1) 0,0456;
2) 0,8882;
3) 0,1056;
4) 0,8944.

№3.

1) 0,1494;
2) 0,2241;
3) 0,5767;
4) 0,9502.

№4.

1) 500;
2) 0,0399.

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

1	2	3	4	5	6	7	8
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,49999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		