Практическое занятие № 16

Замена переменной в неопределенном интеграле

I. Совместное решение задач:

Примеры решений:

№ 1. Найти интегралы:

1) $\int (3x+2)^5 dx;$

2) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx;$

3) $\int e^{x^5} x^4 dx;$

4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[3]{3+2tgx}};$

5) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x} dx;$

6) $\int \frac{5^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$

7) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}};$

8) $\int \sqrt{1-\sin x} \cos x dx;$

9) $\int \frac{xdx}{x^4+9};$

10) $\int \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$

Решение.

1) $\int (3x+2)^5 dx = \left[\begin{array}{c} 3x+2=u \\ 3dx=du \\ dx=\frac{du}{3} \end{array}\right] = \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{18}u^6 + C =$

$$= \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C;$$

2) $\int \left(2x^3+1\right)^4 x^2 dx = \left[\begin{array}{l} 2x^3+1=u \\ 6x^2dx=du \\ x^2dx=\dfrac{du}{6} \end{array}\right] = \int u^4 \dfrac{du}{6} = \dfrac{1}{6}\int u^4 du = \dfrac{1}{6}\dfrac{u^{4+1}}{4+1}+C = \dfrac{1}{30}u^5+C =$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+1)^5 + C;$$

3) $\int e^{x^5} x^4 dx = \left[\begin{array}{l} u = x^5, \\ du = 5x^4 dx, \\ x^4 dx = \dfrac{1}{5}du \end{array}\right] = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{x^5} + C.$

4) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[3]{3+2tgx}} = \left[\begin{array}{l} u = 3+2tgx, \\ du = \dfrac{2}{\cos^2 x}dx, \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}du, \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3u^{\frac{2}{3}}}{2} + C =$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^2} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(3+2tgx)^2} + C.$$

5) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x}dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \\ du = \dfrac{1}{x}dx \end{array}\right] = \int \sqrt[4]{u^3}du = \int u^{\frac{3}{4}} du = \frac{4u^{\frac{7}{4}}}{7} + C = \frac{4}{7}\sqrt[4]{u^7} + C =$

$$= \frac{4}{7}\sqrt[4]{\ln^7 x} + C.$$

6) $\int \dfrac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x}, \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx, \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du \end{array}\right] = 2\int 5^u du = 2\cdot\frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{2\cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C.$

7) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}} = \begin{bmatrix} u = e^x, \\ du = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+5}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+5}\right| + C =$

$= \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}+5}\right| + C.$

8) $\int \sqrt{1-\sin x}\cos x dx = \begin{bmatrix} u = 1-\sin x, \\ du = \cos x dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{3u^{\frac{3}{2}}}{2} + C =$

$= \frac{3}{2}\sqrt[2]{u^3} + C = \frac{3}{2}\sqrt[2]{(1-\sin x)^3} + C.$

9) $\int \frac{xdx}{x^4+9} = \int \frac{xdx}{\left(x^2\right)^2+9} = \begin{bmatrix} u = x^2, \\ du = 2xdx, \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} arctg\frac{u}{3} + C =$

$\frac{1}{6} arctg\frac{x^2}{3} + C.$

10) $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x}, \\ du = -\frac{1}{x^2}dx, \\ \frac{dx}{x^2} = -du \end{bmatrix} = -\int \cos u du = -\sin u + C = -\sin\frac{1}{x} + C.$

II. Самостоятельной решение задач.

Задание №1.

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sqrt{1+2x}dx$;

2) $\int \frac{2x^2 dx}{8x^3-5}$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

4) $\int \frac{2xdx}{x^2+5}$;

5) $\int x^2 e^{x^3} dx$;

6) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{x^2+1}dx$;

7) $\int e^x \sqrt{1+e^x}dx$;

8) $\int \sin^5 x \cos x dx$;

9) $\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^4-5}}$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

III. Самоконтроль правильности выполнения задания.

Ответы:

1) $\frac{\sqrt{(1+2x)^3}}{3}+C$;

2) $\frac{1}{12}\ln\left|8x^3-5\right|+C$;

3) $\frac{1}{3}arctg^3 x+C$;

4) $\ln\left(x^2+5\right)+C$;

5) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$;

6) $\frac{2}{3}\sqrt{arctg^3 x}+C$;

7) $\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+e^x\right)^3}+C$;

8) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$;

9) $3\ln\left(x^2+\sqrt{x^4-5}\right)+C$;

10) $\arcsin\frac{\ln x}{2}+C$.