Практическое занятие

Формула полной вероятности. Формула Байеса

I. Повторение основных теоретических сведений и примеры решения задач (конспект)

1. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности часто используется на практике в задачах экономического анализа и в научно-исследовательских работах. В тех случаях, когда необходимо определить вероятность какого-то случайного события, наступление которого зависит от внешнего воздействия, необходимо принимать во внимание влияние внешних факторов.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий (т.е. они попарно несовместны, а их сумма есть достоверное событие). В этом случае события $B_1, B_2, ..., B_n$ называют ***гипотезами***, т.к. неизвестно, какое из них произойдет и повлечет событие A. Тогда вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности***:

$$\boxed{P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{Bn}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{Bi}(A)}$$

Задача №1. В учебном пособии по физике имеется 45 задач к первому разделу, 30 задач — ко второму и 35 задач — к третьему разделу дисциплины. Шансы студента правильно решить задачу из первого раздела оцениваются в 80%, из второго — в 65%, из третьего — в 85%. Студент наудачу открывает пособие, определите вероятность, что он решит случайно выбранную задачу.

Решение.

Обозначим события:

A — студент решит случайно выбранную задачу.

Это событие может произойти совместно с одной из следующих гипотез:

B_1 — задача из первого раздела;

B_2 — задача из второго раздела;

B_3 — задача из третьего раздела.

Определим вероятности гипотез:

$$P(B_1)=\frac{45}{110}=\frac{9}{22},$$

$$P(B_2)=\frac{30}{110}=\frac{3}{11},$$
$$P(B_3)=\frac{35}{110}=\frac{7}{22}.$$

Определим условные вероятности события A:

$$P_{B_1}(A)=0{,}8,$$
$$P_{B_2}(A)=0{,}65,$$
$$P_{B_3}(A)=0{,}85.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$
$$=\frac{9}{22}\cdot 0{,}8+\frac{3}{11}\cdot 0{,}65+\frac{7}{22}\cdot 0{,}85\approx 0{,}77.$$

Ответ: вероятность того, что студент решит случайно выбранную задачу, равна примерно 0,77.

2. Формула Байеса

При изучении различных процессов исследователь имеет предварительные, *априорные* (доопытные) вероятности интересующих его событий. Он проводит опыт, получает новую информацию и может пересчитать значения априорных вероятностей. Новые значения вероятностей тех же интересующих его событий будут уже *апостериорными* (послеопытными) вероятностями. Формула Байеса позволяет вычислять такие вероятности.

Пусть событие A может произойти только с одной из гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны априорные вероятности каждой гипотезы $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$. Известно, что происходит событие A, и известны условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, …, $P_{B_n}(A)$. Тогда можно вычислить апостериорные вероятности гипотез по ***формуле Байеса:***

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}},$$

где вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности, т.е.

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{Bi}(A)}},\ (i=1,2,...,n).$$

Задача №2. Имеются три одинаковые с виду коробки: в первой — 15 белых шаров, во второй — 10 белых и 5 черных, в третьей — 15 черных шаров. Из выбранной наугад коробки вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой коробки.

Решение.

Обозначим гипотезы:

B_1 — выбрана первая коробка;

B_2 — выбрана вторая коробка;

B_3 — выбрана третья коробка.

Укажем их априорные вероятности гипотез $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$.

Обозначим событие A — вынут белый шар.

Укажем условные вероятности наступления события A совместно с каждой гипотезой:

$$P_{B_1}(A)=1,$$

$$P_{B_2}(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},$$

$$P_{B_3}(A)=0.$$

Событие A произошло.

Определим апостериорную вероятность гипотезы B_1 после наступления события A по формуле Байеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Ответ: вероятность того, что белый шар вынут из первой коробки равна 0,6.

III. Самостоятельное решение задач:

№1. В первой урне 4 черных и 6 белых шаров, а во второй урне 2 черных и 8 белых шаров. Из наудачу выбранной урны вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

№2. В первой урне 10 синих и 5 белых шаров, а во второй урне 8 синих и 7 белых шаров. Из наудачу выбранной урны вынули один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар из второй урны.

№3. В студенческой группе 10 % отличников, 20 % студентов-хорошистов, а остальные студенты имеют тройки. Вероятность сдачи зачета для отличника составляет 0,9, для студента-хорошиста – 0,8, а для студента, имеющего тройки, – 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент группы, сдаст зачет.

№4. На предприятии, изготавливающем моторы, первый цех производит 40 %, второй – 35 %, а третий – 25 % всех моторов. Процент брака для каждого из цехов составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 % от изготовленных данным цехом моторов. Наудачу выбранный мотор оказался небракованным. Найти вероятность, что он изготовлен третьим цехом.

№5. Детали, поступающие на сборку, изготавливаются тремя станками-автоматами. Производительности станков-автоматов относятся как $5:3:2$. Процент брака для первого, второго и третьего автоматов соответственно составляют 8 %, 5 % и 2 %. Деталь, поступившая на сборку, оказалась качественной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим станком-автоматом.

№6. В первой коробке находится 15 ламп, среди которых 5 мощностью в 60 W, а во второй коробке находится 12 ламп, среди которых 4 мощностью в 60 W. Из каждой коробки извлекли по одной лампе, а затем из извлеченных ламп выбрали одну. Найти вероятность того, что эта лампа имеет мощность 60 W.

№7. В каждой из трех коробок содержится 6 ламп мощностью 60 W и 4 лампы мощностью 100 W. Из первой коробки взяли одну лампу и переложили во вторую коробку, затем из второй коробки взяли также одну лампу и переложили в третью. Найти вероятность того, что лампа, извлеченная из третьей коробки, имеет мощность 100 W.

IV. Самоконтроль правильности решения задач:

Ответы:

№1. 0,3.

№2. $\frac{7}{12}$.

№3. 0,67.

№4. 0,255.

№5. 0,2083.

№6. $\frac{1}{3}$.

№7. 0,4.