

Практическое занятие

Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей

I. Повторение основных теоретических сведений и примеры решения задач (конспект)

1. Правила сложения и умножения вероятностей

- **Суммой событий** A и B называется событие $C = A + B$, которое означает наступление или A , или B , или A и B одновременно (т.е. происходит хотя бы одно из них).

Например, рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.

A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);

B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).

Тогда событие $C = A + B$ означает выбор числа, кратного или 2, или 3, при этом не исключается, что число кратно и 2 и 3, т.е. выбор одного из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10.

Суммой нескольких событий A_1, A_2, \dots, A_n называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

- **Произведением событий** A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое означает появление и A и B одновременно.

Например, рассматривается опыт — выбор одного из чисел от 1 до 10.

A — выбор четного числа (2, 4, 6, 8, 10);

B — выбор числа, кратного 3 (3, 6, 9).

Тогда событие $C = A \cdot B$ означает выбор числа, кратного и 2 и 3 одновременно, т.е. выбор числа 6.

Произведением нескольких событий A_1, A_2, \dots, A_n называется событие, состоящее в появлении всех этих событий в одном эксперименте.

Замечание.

Операции над событиями можно представить как операции над множествами. При этом события представляют подмножествами некоторого универсального множества Ω . Сумме событий $A + B$ соответствует объединение $A \cup B$ этих множеств, а произведению $A \cdot B$ соответствует пересечение $A \cap B$ этих множеств. Достоверное событие представляется множеством Ω . Невозможное событие — пустым множеством \emptyset . Несовместность событий A и B означает, что соответствующие события не пересекаются. Событие \bar{A} , противоположное событию A , является

дополнением к событию A до множества Ω . Эти операции в графическом виде иллюстрируются диаграммами Венна (*изобразите самостоятельно*).

Теорема (о вероятности суммы двух несовместных событий):

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)}$$

Следствие 1: Сумма вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Задача №1: В урне 10 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Наудачу выбирается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар будет белым или черным.

Решение.

Обозначим события:

A — вынули белый или черный шар;

B — вынули белый шар;

C — вынули черный шар.

Тогда $A = B + C$. События B и C — несовместные.

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C).$$

$$P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}, \quad P(C) = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Следовательно, } P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{9} + \frac{5}{18} = \frac{5}{6}.$$

• Два события называются **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое или нет.

Пример: Игральная кость брошена 2 раза. Событие A — в первом испытании выпало 2 очка, событие B — во втором испытании выпало 2 очка, являются независимыми. Причем $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

- События A_1, A_2, \dots, A_n называются **независимыми**, если они попарно независимы и независимыми является каждое из них и произведение $n-1$ остальных.
- Событие B называется **зависимым** от события A , если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет.
- Вероятность события B , вычисленная при условии, что имело место другое событие A , называется **условной вероятностью** события B и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$

Пример: В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара, по одному, не возвращая. Рассмотрим события: A — первый шар белый, B — второй шар белый. Событие B зависит от события A . При этом

$$P_A(B) = \frac{4}{11}.$$

Если события A и B — независимые, то $P_A(B) = P(B)$, если события A и B — зависимые, то $P_A(B) \neq P(B)$.

Теорема (о вероятности произведения двух независимых событий): Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Задача №2: Игральная кость брошена 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпало 2 очка.

Решение.

Обозначим события:

A — в первом испытании выпало 2 очка;

B — во втором испытании выпало 2 очка;

C — оба раза выпало 2 очка.

Тогда событие $C = A \cdot B$. Так как события A и B являются независимыми, то $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Теорема (о вероятности произведения n независимых событий): Вероятность произведения n независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Теорема (о вероятности произведения двух зависимых событий):

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

или

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Задача №3: В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара, по одному, не возвращая. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение.

Обозначим события:

A — первый шар белый;

B — второй шар белый;

C — оба шара белые.

Тогда событие $C = A \cdot B$. Так как событие B зависит от события A , то

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}.$$

Теорема (о вероятности произведения n зависимых событий):

Вероятность произведения n зависимых событий A_1, A_2, \dots, A_n равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

Теорема (о вероятности суммы двух совместных событий):

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Задача №4: Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков.

Решение.

Обозначим события:

A — на первой кости выпадет 6 очков;

B — на второй кости выпадет 6 очков;

C — хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков.

Тогда событие $C = A + B$. Так как события A и B являются совместными,

$$\text{то } P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

Формулы для определения вероятности суммы большего числа совместных событий достаточно громоздки, поэтому удобнее использовать вероятности противоположных событий.

Событие, состоящее в том, что наступит хотя бы одно из нескольких элементарных событий, противоположно событию, состоящему в том, что не наступит ни одно из них.

Поэтому, чтобы найти вероятность того, что произошло хотя бы одно из n событий A_1, A_2, \dots, A_n , надо из единицы вычесть вероятность произведения им противоположных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$$

(Решите самостоятельно задачу №4 по данной формуле.)

Задача №5: Три стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение.

Обозначим события:

A — в мишень попадет хотя бы один стрелок;

A_1 — в мишень попадет первый стрелок;

A_2 — в мишень попадет второй стрелок;

A_3 — в мишень попадет третий стрелок.

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994.$$

Задача №6:

Вероятность того, что первый автобус прибудет в пункт назначения без опоздания, равна 0,9, для второго автобуса эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что только один автобус опоздает.

Решение.

Обозначим события:

A — только один автобус опоздает,

A_1 — первый автобус прибудет без опоздания,

A_2 — второй автобус прибудет без опоздания.

Тогда

\bar{A}_1 — первый автобус опоздает,

\bar{A}_2 — второй автобус опоздает.

По условию $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,8$.

Тогда $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,9 = 0,1$,

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Событие A произойдет в том случае, когда имеет место одно из следующих двух несовместных событий: либо $A_1\overline{A_2}$ — первый автобус придет без опоздания, а второй опоздает, либо $\overline{A_1}A_2$ — первый автобус опоздает, а второй придет без опоздания. То есть $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$.

Тогда

$$P(A) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2).$$

В силу того что события A_1 и A_2 , а следовательно, $\overline{A_1}$ и A_2 , A_1 и $\overline{A_2}$ независимы, имеем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26.$$

III. Самостоятельное решение задач:

№1. От конечной остановки в аэропорт отправились два автобуса. Вероятность прибытия автобуса в аэропорт вовремя равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух автобусов в аэропорт вовремя придут:

- 1) оба;
- 2) только один;
- 3) хотя бы один.

№2. Устройство состоит из трёх элементов. Вероятности выхода из строя за определенное время первого, второго, и третьего элементов соответственно составляют 0,2, 0,1 и 0,3. Найти вероятность того, что в течение определенного времени безотказно будут работать:

- 1) все элементы;
- 2) только два элемента;
- 3) хотя бы один элемент.

№3. При подготовке к экзамену студент из 20 вопросов выучил 15. Найти вероятность того, что из трех предложенных на экзамене вопросов студент знает:

- 1) не менее двух;
- 2) менее двух;
- 3) не менее одного и не более двух;
- 4) хотя бы один.

IV. Самоконтроль правильности решения задач:

Ответы:

№1. 1) 0,64; 2) 0,32; 3) 0,96.

№2. 1) 0,504; 2) 0,398; 3) 0,994.

№3. 1) $49/57$; 2) $8/57$; 3) $45/76$; 4) $113/114$.