ИДЗ №1 «Теория вероятностей»

Задание 1

В бригаде n рабочих, из которых k специалистов высшей квалификации. Случайным образом из этой бригады выбрали m рабочих. Найдите вероятность того, что среди них p специалистов высшей квалификации (табл. 1).

Таблица 1. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	n	k	m	p
1	14	10	9	7
2	13	5	5	3
3	12	7	6	5
4	11	6	7	4
5	10	4	5	2
6	15	8	9	6
7	16	9	12	7
8	11	5	8	3
9	13	7	6	5
10	10	6	8	4
11	12	4	9	2
12	14	8	10	6
13	11	7	9	5
14	10	7	7	4
15	15	5	8	3
16	16	6	13	4
17	11	8	6	5
18	13	6	8	3
19	10	8	6	5
20	12	8	7	3

Задание 2

В первом ящике n деталей, из них p бракованных, а во втором ящике m деталей, из которых q бракованные (табл. 2). Из каждого ящика взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали бракованные;

2) только одна бракованная.

Таблица 2. Исходные данные для решения задачи

№	n	p	m	q	№	n	p	m	q
1	23	4	19	6	11	19	3	23	11
2	13	2	17	4	12	17	5	13	3

3	21	5	15	7	13	15	2	21	5
4	18	3	16	6	14	16	3	18	7
5	14	2	22	4	15	22	4	14	3
6	26	6	24	5	16	24	3	26	11
7	12	4	27	3	17	27	5	12	4
8	28	7	29	5	18	29	7	28	2
9	31	6	20	7	19	20	3	31	5
10	25	4	30	3	20	30	11	25	3

Задание 3

Решить задачу: Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от n коров будет ровно p бычков (табл. 3).

Таблица 3. Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	n	p	Номер варианта	n	p
1	4	3	11	8	5
2	5	2	12	9	5
3	6	2	13	4	2
4	7	2	14	5	4
5	8	3	15	6	4
6	9	4	16	7	4
7	4	2	17	8	6
8	5	3	18	9	6
9	6	3	19	6	5
10	7	3	20	7	5

Задание 4

Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности (табл. 9). Вычислить:

1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) среднее квадратическое отклонение.

Таблица 4. Исходные данные для решения задачи

№	Закон распределения				№	Закон распределения			
1	X	–3	1	2	11	X	–7	–5	–1
	p	0,1	0,6	0,3		p	0,5	0,3	0,2
2	X	1	3	4	12	X	–12	–10	–6

	p	0,1	0,5	0,4		p	0,5	0,2	0,3
3	X	–1	0	3	13	X	3	5	8
	p	0,3	0,2	0,5		p	0,4	0,5	0,1
4	X	–1	2	4	14	X	1	4	8
	p	0,2	0,4	0,4		p	0,5	0,3	0,2
5	X	–3	–1	0	15	X	–4	0	5
	p	0,3	0,4	0,3		p	0,2	0,4	0,4
6	X	–2	1	2	16	X	–5	–1	3
	p	0,1	0,4	0,5		p	0,5	0,3	0,2
7	X	–4	–1	0	17	X	–7	–5	–1
	p	0,3	0,4	0,3		p	0,3	0,5	0,2
8	X	15	13	10	18	X	–1	2	4
	p	0,1	0,3	0,6		p	0,4	0,2	0,4
9	X	8	5	3	19	X	1	3	4
	p	0,2	0,4	0,4		p	0,3	0,1	0,6
10	X	–5	–1	3	20	X	–12	–10	–6
	p	0,5	0,3	0,2		p	0,2	0,1	0,7

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример выполнения задания 1

В бригаде 15 рабочих, из которых 12 специалистов высшей квалификации. Случайным образом из этой бригады выбрали 5 рабочих. Найдите вероятность того, что среди них 3 специалиста высшей квалификации.

Решение:

Пусть событие A={Среди отобранных 5 рабочих 3 специалиста высшей квалификации}.

Запишем условие в виде схемы:

$$\begin{array}{ccccc} 15\text{ р.} & — & 12\text{ спец.} & — & 3\text{ ост.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\text{ р.} & — & 3\text{ спец.} & — & 2\text{ ост.} \end{array}$$

(В первой строке указано то, что дано, во второй — то, что хотим получить).

Так как порядок выбора рабочих не имеет значения, то общее число исходов испытаний будет равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 элементов, т.е.

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = 1\cdot13\cdot7\cdot3.$$

При вычислении числа исходов, благоприятствующих событию A, так же используем формулу числа сочетаний и правило умножения:

$$m = C_{12}^3 C_3^2 = \frac{12!}{3!9!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 10 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 .$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3}{11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{20}{91}.$$

Ответ: $\frac{20}{91}$.

Пример выполнения задания 2

В первом ящике 10 деталей, из них 2 бракованных, а во втором ящике 14 деталей, из которых 3 бракованные. Из каждого ящика взяли по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали бракованные;
2) только одна бракованная.

Решение.

1) Обозначим события:

$Б_1$ – {Деталь из первого ящика бракованная},
$Б_2$ – {Деталь из второго ящика бракованная},
$\overline{Б_1}$ – {Деталь из первого ящика не бракованная},
$\overline{Б_1}$ – {Деталь из второго ящика не бракованная}.

По классическому определению вероятности события:

$$P(Б_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$P(Б_2) = \frac{3}{14}.$$

Найдем вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{Б_1}) = 1 - P(Б_1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

$$P(\overline{Б_2}) = 1 - P(Б_2) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}.$$

Пусть событие A ={Обе детали бракованные}.

$$A = Б_1 \cdot Б_2 .$$

Тогда по теореме о вероятности произведения независимых событий:

$$P(A) = P(Б_1 \cdot Б_2) = P(Б_1) \cdot P(Б_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{70}.$$

2) Пусть событие B ={Только одна деталь бракованная}.

$$B = Б_1 \cdot \overline{Б_2} + \overline{Б_1} \cdot Б_2 .$$

Тогда по теоремам о вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения независимых событий:

$$P(B) = P\left(Б_1 \cdot \overline{Б_2} + \overline{Б_1} \cdot Б_2\right) = P\left(Б_1 \cdot \overline{Б_2}\right) + \cdot P\left(\overline{Б_1} \cdot Б_2\right) =$$

$$= P(Б_1) \cdot P\left(\overline{Б_2}\right) + P\left(\overline{Б_1}\right) \cdot P(Б_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{14} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{11}{70} + \frac{12}{70} = \frac{23}{70}.$$

Пример выполнения задания 3

Вероятность рождения бычка при отеле коровы 0,5. Найти вероятность того, что от 9 коров будет ровно 3 бычка.

Решение.

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где n — число повторных независимых испытаний;
p — вероятность наступления события A в каждом испытании;
q — вероятность непоявления события A в каждом испытании (q = 1–p);
k — число наступлений события A,

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ –число сочетаний из n по k элементов.

Обозначим событие: A — {Родился бычок от отдельной коровы}.

По условию: n = 9; p = 0,5; q = 1–p = 1–0,5 = 0,5.

Найдем вероятность того, что событие A произойдет ровно три раза, т.е. k = 3.

По формуле Бернулли:

$$P_9(3) = C_9^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{9-3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^6 = \frac{9!}{3!6!} \cdot 0{,}5^9 = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 6!} \cdot 0{,}5^9 =$$

$$= 7 \cdot 12 \cdot 0{,}5^9 = \frac{7 \cdot 12}{2^9} = \frac{7 \cdot 3}{2^7} = \frac{21}{128}.$$

Пример выполнения задания 4

Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности.

X	–2	1	3
p	0,1	0,6	0,3

Вычислить:

1) математическое ожидание;

2) дисперсию;

3) среднее квадратическое отклонение.

Решение

1) Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \, .$$

Получим

[illegible].

2) Дисперсию случайной величины X найдем по формуле:

[illegible],

где

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \, .$$

Получим

[illegible].

3) Среднее квадратическое отклонение случайной величины X найдем по формуле:

[illegible].

Получим [illegible].