Практическое занятие 8

инематика вращения тела вокруг неподвижной оси
1. Краткие сведения из теории

Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$\varphi = f_1(t). \qquad (40)$$

Отсчет угла φ ведется от выбранного начала. При этом углам, отложенным в направлении движения часовой стрелки, придается знак “минус”, а углам противоположного направления – знак “плюс”.

Угол поворота φ выражается в радианах. Иногда угол поворота определяется числом оборотов *N*. Зависимость между φ и *N* следующая $\varphi = 2\pi N$.

Угловая скорость тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = f_2(t). \qquad (41)$$

Знак производной $\dot{\varphi}$ дает возможность установить происходит ли вращение тела в положительном направлении отсчета угла поворота (знак “плюс”) или в обратную сторону (знак “минус”). Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (или 1/с).

Иногда угловую скорость характеризуют числом оборотов в минуту и обозначают буквой *n*. Зависимость между ω и *n* имеет вид

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Угловое ускорение тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = f_3(t). \qquad (42)$$

Знак производной $\ddot{\varphi}$ дает возможность установить является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным. Если знаки ω и ε одинаковы, тело вращается ускоренно, а если их знаки различны – замедленно. Единица измерения углового ускорения – радиан на секунду в квадрате (или 1/с^2).

Траекториями точек тела, не лежащих на оси вращения, являются окружности с центрами на оси вращения и радиусами, равными кратчайшему расстоянию от этих точек до оси вращения.

Модуль скорости любой точки тела, находящейся на расстоянии *h* от оси вращения (рис. 18), определяется по формуле

$$V = \omega h. \qquad (43)$$

Направлена скорость точки по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения.

Ускорение любой точки тела состоит из двух составляющих – вращательного $\bar{a}_{вр}$ и осестремительного $\bar{a}_{ос}$ ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_{вр} + \bar{a}_{ос}.$$

Модуль вращательного ускорения точки определяется по формуле

$$a_{вр} = \varepsilon h. \qquad (44)$$

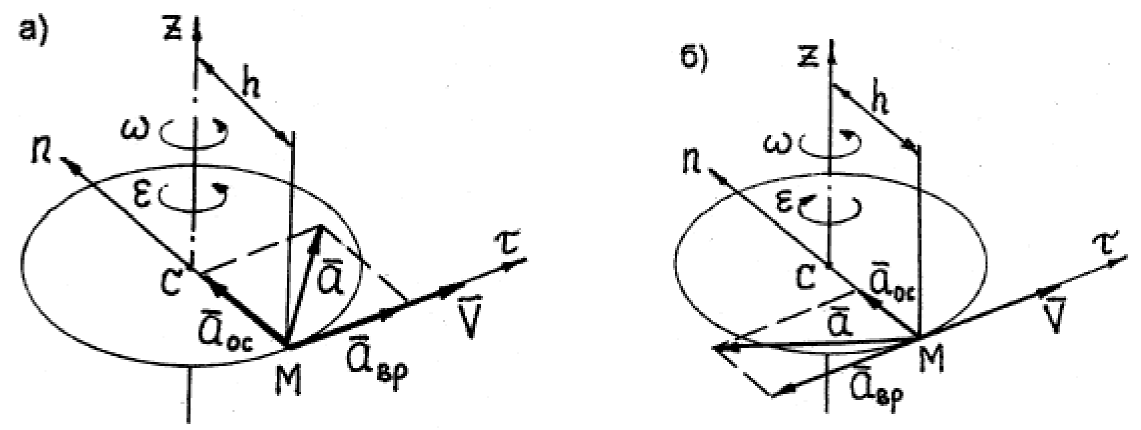

Рис. 18

Вращательное ускорение направлено по касательной к описываемой точкой окружности в ту же сторону, что и его скорость, если вращение тела ускоренное (рис. 18, а) и в сторону, противоположную скорости, если вращение замедленное (рис.18, б).

Модуль осестремительного ускорения определяется по формуле

$$a_{oc} = \omega^2 h. \qquad (45)$$

Осестремительное ускорение всегда направлено по радиусу окружности от точки к центру окружности (рис. 18).

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{oc}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (46)$$

2. Основные типы задач кинематики вращения тела вокруг оси

В зависимости от того, что задано в условии задачи и что требуется определить, различают следующие два основных типа задач.

1. Исследуется движение тела в целом. В этих задачах вначале нужно получить законы (40)–(42) и, используя связь между ними, определить требуемую величину (см. примеры 17 и 18).

2. Требуется определить скорости и ускорения отдельных точек тела. Для решения задач этого типа вначале надо установить кинематические характеристики движения всего тела в целом, т.е. найти φ, ω и ε. После чего по формулам (43), (44), (45), (46) определить скорости и ускорения точек тела (см. пример 19).

Пример 17. Пропеллер самолета, делающий 1200 об/мин, после выключения двигателя останавливается через 8 с. Сколько оборотов сделал пропеллер за это время, если считать его вращение равнозамедленным?

Решение:

Вначале получим законы вращения пропеллера (40), (41) и (42). По условию задачи пропеллер вращается равнозамедленно, из этого следует, что

$$\varepsilon = const.$$

Поэтому

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (47)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \qquad (48)$$

Начальной угловой скоростью при замедленном вращении будет та, которую пропеллер имел до выключения двигателя. Следовательно, $\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}$. В момент остановки при t_1 = 8 сек. угловая скорость тела $\omega_1 = 0$. Подставляя эти значения в уравнение (47), получим

$$0 = \frac{\pi n_0}{30} + \varepsilon t_1.$$

Отсюда $\varepsilon = -\dfrac{\pi n_0}{30 t_1}$.

Если обозначить число сделанных пропеллером за время t_1 оборотов через N_1, то угол поворота за то же время будет равен

$$\varphi_1 = 2\pi N_1.$$

Подставляя найденные значения ε и φ_1 в уравнение (48), получим

$$2\pi N_1 = \frac{\pi n_0}{30} t_1 - \frac{\pi n_0}{60} t_1 = \frac{\pi n_0}{60} t_1.$$

Отсюда $N_1 = \dfrac{n_0 t_1}{120} = \dfrac{1200 \cdot 8}{120} = 80$ оборотов.

Пример 18. Найти закон вращения тела вокруг оси, если известны следующие данные: угловая скорость изменяется пропорционально t^2, начальный угол поворота $\varphi_0 = 2$ рад, для заданного момента времени $t_1 = 3$ с угловое ускорение $\varepsilon_1 = -5\pi$ 1/с^2.

Решение:

По условию задачи модуль угловой скорости ω изменяется пропорционально t^2. Обозначая неизвестный коэффициент пропорциональности буквой k, имеем

$$\omega = kt^2. \qquad (49)$$

Найдем ε, беря производные по времени от обеих частей равенства (49),

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2kt.$$

Определим коэффициент k из условия, что при $t_1 = 3$ сек. угловое ускорение $\varepsilon_1 = -5\pi$ 1/с^2: $-5\pi = 2k \cdot 3$ или $k = -\dfrac{5}{6}\pi$.

Подставляя значение k в уравнение (49), получим

$$\omega = -\frac{5}{6}\pi t^2.$$

Учитывая, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, будем иметь $\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{5}{6}\pi t^2$.

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, находим

$$\varphi = -\frac{5}{18}\pi t^3 + c.$$

В начальный момент при $t = 0$, $\varphi_0 = 2$ рад, следовательно, $c = 2$.

Таким образом, $\varphi = -\dfrac{5}{18}\pi t^3 + 2$ радиан.

Пример 19. В период разгона ротор электродвигателя вращается по закону $\varphi = 2t^3$, где t в сек, φ в рад.

Определить в конце 4-й секунды линейную скорость, вращательное, осестремительное и полное ускорения точки, лежащей на ободе ротора, если диаметр ротора $D = 40$ см.

Решение:

По заданному уравнению вращения ротора находим его угловую скорость и угловое ускорение $\omega = \dot{\varphi} = 6t^2$, $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 12t$.

Подставляя значение $t_1 = 4$ сек в выражение для ω и ε, найдем

$$\omega_1 = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ 1/с},$$

$\varepsilon_1 = 12 \cdot 4 = 48$ 1/с2.

Определим модули линейной скорости, вращательного и осестремительного ускорений в этот же момент времени по формулам (43), (44) и (45)

$$V_1 = \omega_1 \frac{D}{2} = 96 \cdot 0{,}2 = 19{,}2 \text{ м/с};$$

$$a_{вр1} = \varepsilon_1 \frac{D}{2} = 48 \cdot 0{,}2 = 9{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{ос1} = \omega_1^2 \frac{D}{2} = 96^2 \cdot 0{,}2 = 1843{,}21 \text{ м/с}^2;$$

Модуль полного ускорения точки обода ротора определим по формуле (46)

$$a_1 = \sqrt{a_{вр1}^2 + a_{ос1}^2} = 1843{,}21 \text{ м/с}^2.$$

3. Определение скоростей и ускорений в случаях, когда вращающееся тело входит в состав различных механизмов

Рассмотрим механизмы с поступательным и вращательным движением звеньев. Решение задачи начинают с определения скоростей точек того звена, для которого движение задано. Затем рассматривают звено, которое присоединено к первому звену и т.д. В результате определяют скорости точек всех звеньев механизма. В такой же последовательности определяют и ускорения точек.

Передача вращения от одного вращающегося тела, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым, может осуществляться при помощи фрикционной или зубчатой передачи (рис. 19).

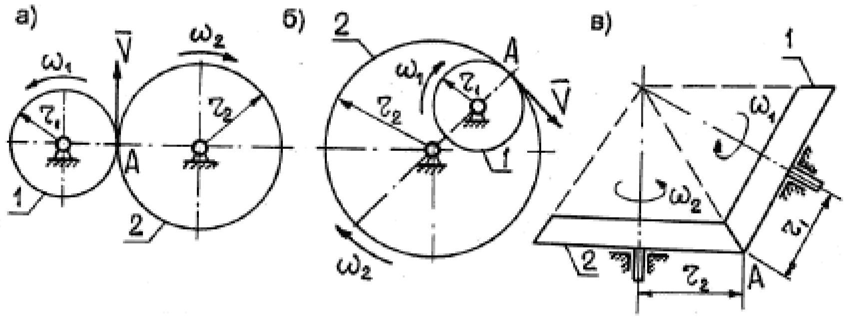

Рис. 19

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы трения в месте контакта соприкасающихся колес, в зубчатой передаче – от зацепления зубьев. Оси вращения ведущего и ведомого колес могут быть параллельными (рис. 19, а, б) или пересекаться (рис. 19, в). В рассмотренных случаях линейные скорости точек *A* соприкасания колес одинаковы, их модули определяются так:

$$V = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \qquad (50)$$

Отсюда $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$. (51)

То есть угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

При преобразовании вращательного движения в поступательное (или наоборот) часто используют зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой (рис. 20). Для этой передачи выполняется условие: $V = \omega r$.

Кроме фрикционной и зубчатой передач, существует передача вращения при помощи гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рис. 21).

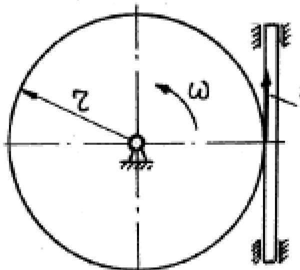

Рис. 20

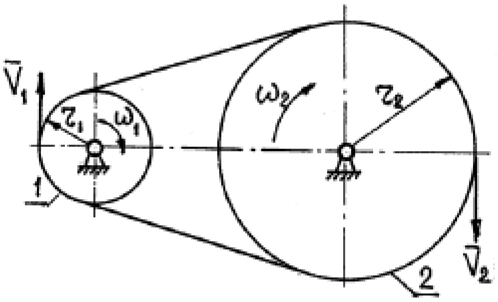

Рис. 21

Так как модули скоростей всех точек ремня одинаковы и ремень не скользит по поверхностям шкивов, то соотношения (50) и (51) относятся и к ременной передаче.

Пример 20. В механизме домкрата при вращении рукоятки *OA* шестерни 1, 2, 3, 4, 5 приводят в движение зубчатую рейку *BC* домкрата (рис. 22).

Определить скорость рейки, если рукоятка *OA* делает 30 оборотов в минуту (n = 30 об/мин). Числа зубцов шестерен: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; радиус пятой шестерни $r_5 = 4$ см.

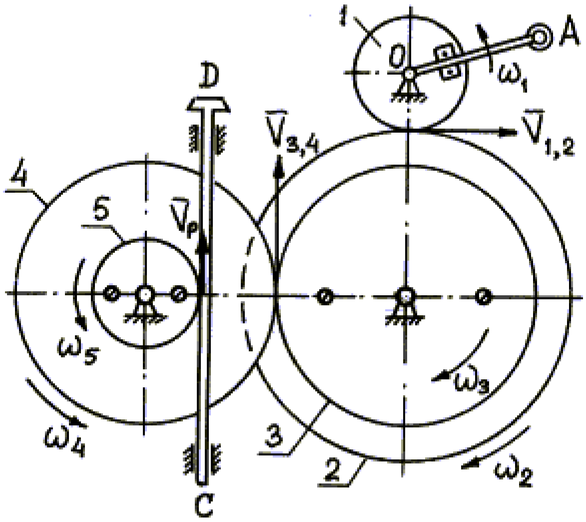

Рис. 22

Решение:

Так как рукоятка *OA* жестко соединена с шестерней 1, то последняя делает тоже 30 об/мин или

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 30}{30} = \pi \ 1/\text{с}.$$

Модули скоростей точек соприкасания зубчатых колес 1 и 2 одинаковы для точек обоих колес и определяются по формуле (50)

$$V_{1,2} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

Отсюда $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$ (см. также (51)).

Так как числа зубьев пропорциональны радиусам колес, то $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Отсюда $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{z_1}{z_2}.$

Шестерни 2 и 3 жестко соединены между собой, поэтому

$$\omega_3 = \omega_2 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}.$$

Для находящихся в зацеплении колес 3 и 4 на основании (51) можно записать

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{z_3}{z_4}.$$

Отсюда

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{z_3}{z_4} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4}.$$

Шестерни 4 и 5 жестко соединены между собой, поэтому

$$\omega_5 = \omega_4 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4}.$$

Модули скоростей точек соприкосновения зубчатой рейки BC и шестерни 5 одинаковы, поэтому

$$V_p = \omega_5 r_5 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} r_5$$

или

$$V_p = \pi \frac{6}{24} \frac{8}{32} 4 = 0{,}78 \text{ см/с.}$$

Пример 21. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис.23). Рейка движется по закону $S_1 = f(t)$.

Дано: R_2=6 см, r_2=4 см, R_3=8 см, r_3=3 см, $S_1 = 3t^3$ (S - в сантиметрах, t - в секундах), A - точка обода колеса 3, t_1=3 с. Определить: ω_3, V_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

Указания. Пример 21 - на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы, при этом считается, что ремень по ободу колес не скользит.

Решение:

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_1), через V_1, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_1), через U_1.

1. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = S_1 = 9t^2. \qquad (52)$$

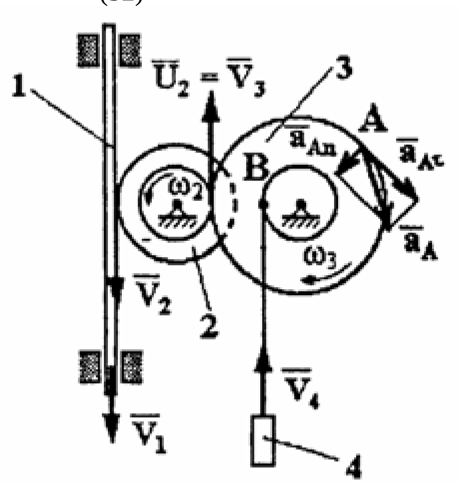

Рис. 23

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $V_2=V_1$ или $\omega_2 R_2 = V_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $U_2 = V_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \qquad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \qquad (53)$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 сек. получим ω_3 = 6,75 с$^{-1}$.

2. Определяем V_4. Так как $V_4 = V_B = \omega_3 r_3$, то при t_1=3 сек. V_4= 20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (53), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$.

Тогда при t_1 = 3 сек. ε_3 = 4,5 с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки А $\bar{a} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, где численно $a_A^\tau = R_3\varepsilon_3$, $a_A^n = R_3\omega^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 сек. имеем a_A^τ = 36 см/с2, a_A^n = 364,5 см/с2.

$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2}$ = 366,3 см/с^2,

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис.2.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75 c^{-1}$, $V_4 = 20{,}25$ см/с, $\varepsilon_3 = 4{,}5c^{-2}$, $a_A = 366{,}3\, см/c^2$.