<u>Раздел</u>: Элементы теории вероятностей (продолжение)

Случайные события.

Формула Бернули.

Производятся испытания, в каждом из которых может появиться событие A или событие $\overline{A}$. Если вероятность события A в одном испытании не зависит от появления его в любом другом, то испытания называются *независимыми* относительно события A. Будем считать, что испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления события $\overline{A}$ через q ($q = 1 - p$).

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз (и не появится $n - k$ раз), обозначим через $P_n(k)$,тогда

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (3.1.1)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \qquad (3.1.2)$$

Формула (3.1.1) называется *формулой Бернулли.*

Пример 1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Решение. Поскольку $p = 0{,}7$, то $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. По условию $n = 5$, $k = 2$, по формуле (3.1.1) находим

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^3 = 10 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 0{,}1323.$$

Формула Пуассона.

В одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью p или событие $\overline{A}$ с вероятностью q ($q = 1 - p$). Вероятность того, что при n испытаниях событие A появится k раз (и не появится $n - k$ раз) определяется формулой Бернулли (см. формулу (3.1.1)).

Рассмотрим случай, когда n является достаточно большим, а p - достаточно малым; положим $np = a$, где a - некоторое число.

Тогда справедлива формула Пуассона, как обобщение формулы Бернули

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \qquad (3.3.1)$$

Пример 7. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p = 0{,}002$. Какова вероятность того, что при 1000 испытаниях событие A появится 5 раз?

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.1). По условию $n = 1000$, $p = 0{,}002$, $k = 5$. Так как $a = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ (см. формулу (3.3.2)), то

$$P_{1000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{e^2} = 0{,}2667 \cdot 0{,}1354 = 0{,}0361.$$

Замечание. Формула Пуассона применяется при большом n и npq<10.

Локальная теорема Лапласа.

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $m_n(k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно выражается формулой

$$m_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}, \qquad (4.3.1)$$

или

$$m_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (4.3.2)$$

при

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (4.3.3)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \qquad (4.3.4)$$

Отметим, что таблицы значений функции (4.3.4) даны в приложениях к учебникам и учебным пособиям по теории вероятностей; имеются они и в данном справочном пособии.

Интегральная теорема Лапласа.

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, *то вероятность* $m_n(k_1, k_2)$ *того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее* k_1 *раз и не более* k_2 *раз, приближенно определяется формулой*

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (4.3.5)$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3.6)$$

Эту формулу можно представить в другом виде:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (4.3.7)$$

где $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad (4.3.8)$$

а x_1 и x_2 определяются равенствами (4.3.6).

Замечание. Приближенными формулами Лапласа (4.3.1) и (4.3.5) на практике пользуются в случае, если $npq > 10$. Если же $npq < 10$, то эти формулы приводят к большим погрешностям.

Случайные величины.

Случайной величиной называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*[1].

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z ..., а их значения - строчными буквами с индексами, например, x_1, x_2, x_3, ...

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots$ этой величины и их вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (т.е. с помощью формул).

Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то ее закон распределения определяется формулами

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{2.1.2}$$

Этот закон можно задать и таблицей (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

В этой таблице сумма вероятностей также равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. События $(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют полную группу событий, поэтому выполняется равенство (2.1.2).

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется *многоугольником распределения* случайной величины X.

Пример 5. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X - число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X.

Решение. В данном опыте четыре равновозможных элементарных исхода: (*Г*, *Г*), (*Г*, *Ц*), (*Ц*, *Г*), (*Ц*, *Ц*); запись (*Г*, *Ц*) означает, что на первой монете выпал *герб*, на второй - *цифра*; аналогичный смысл имеют остальные записи. *Герб* может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Найдем вероятности этих значений:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} = 0{,}25\,;\ P(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}50\,;\ P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25\,;$$

$$p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}50,\ p_3 = 0{,}25\,;$$

причем, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Таким образом, закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей

X	0	1	2
P	0,25	0,50	0,25

Функцией распределения[1] случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x), \tag{2.2.1}$$

где $P(X < x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x. Геометрически это означает следующее: $F(x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается точкой на числовой прямой, расположенной слева от точки x (рис. 2.2).

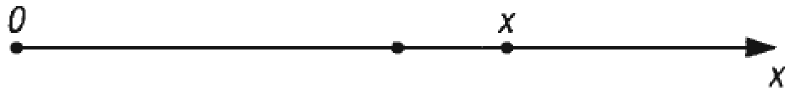

Рис. 2.2

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x) = P(X < x)$ является непрерывно дифференцируемой.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha, \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{2.2.2}$$

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X имеет следующие свойства.

1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1. \tag{2.2.3}$$

Это следует из определения (2.2.1) и свойств вероятности.

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, т.е. если $x_1 < x_2$, то

$$F(x_1) \le F(x_2). \tag{2.2.4}$$

---

[1] *Функцию распределения* называют также *интегральной функцией*, или *интегральным законом* распределения случайной величины X.

3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), \ \ F(x_0 - 0) = F(x_0). \qquad (2.2.5)$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то для ее функции распределения $F(x)$

$$F(x) = 0 \ \text{при} \ x \le a, \ F(x) = 1 \ \text{при} \ x \ge b. \qquad (2.2.6)$$

5. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1. \qquad (2.2.7)$$

Если X - непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно, заданное определенное значение, равна нулю:

$$P(X = \alpha) = 0, \qquad (2.2.8)$$

поэтому выполняются равенства:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta), \qquad (2.2.9)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (2.2.10)$$

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k), \qquad (2.2.11)$$

где символ $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. Функция (2.2.11) является разрывной.

Плотностью распределения[1] вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине Δx отрезка $[x, x + \Delta x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.3.1)$$

---

[1] *Плотность распределения* называют также *дифференциальной функцией распределения*.

График функции $p(x)$ (плотности распределения) называется *кривой распределения*.

Интеграл от функции $p(x)$ по промежутку $(-\infty, x)$ равен значению функции распределения $F(x)$ для верхнего предела интегрирования, т.е.

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = F(x). \qquad (2.3.2)$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α, β) равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$, т.е.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx. \qquad (2.3.3)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами.

1. Плотность распределения $p(x)$ - неотрицательная функция, т.е.

$$p(x) \geq 0. \qquad (2.3.4)$$

Это следует из определения (2.3.1) и свойств вероятности.

2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения:

$$F'(x) = p(x) \qquad (2.3.5)$$

(производная интегральной функции равна дифференциальной функции).

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1. \qquad (2.3.6)$$

Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = 1, \qquad (2.3.7)$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример 2. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x/2 & при\ 0<x\le 2,\\ 0 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1, 2).

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (2.3.3):

$$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75\,.$$

Пример 3. Функция распределения случайной величина X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & при\ x>0.\end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением (2.3.5).

В соответствии с равенством (2.3.5) находим:

$$p(x)=F'(x)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\quad при\ x>0;$$

$$p(x)=F'(x)=0\quad при\ x\le 0.$$

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & при\ x>0.\end{cases}$$

Числовые характеристики случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений с законом распределения

$$P(X=x_k)=p_k\ ,\ \ k=1,2,\ldots,n, \qquad (2.4.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{2.4.2}$$

называется сумма произведений ее значений на их соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \quad M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{2.4.3}$$

Для обозначения математического ожидания используются и другие символы: EX, a, m_x.

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее возможных значений. Вследствие этого математическое ожидание случайной величины называют ее *средним значением.*

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, а $p(x)$ - ее плотность вероятностей, определяется формулой

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x p(x)\, dx. \tag{2.4.7}$$

Если все значения непрерывной случайной величины X принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$, а $p(x)$ - ее плотность вероятностей, то математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx, \tag{2.4.8}$$

когда этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Отметим, что математическое ожидание случайной величины есть величина постоянная.

Свойства математического ожидания случайной величины.

1. Значение математического ожидания случайной величины X заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями:

$$a \le M(X) \le b, \tag{2.4.9}$$

где a - наименьшее, b - наибольшее значение величины X.

2. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C \qquad (C = const). \tag{2.4.10}$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X) \qquad (C = const). \qquad (2.4.11)$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)\,. \qquad (2.4.12)$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

X	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. В соответствии с формулой (2.4.3) находим

$$M(X) = 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}4 + 6\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}1 = 0{,}3 + 0{,}8 + 2{,}0 + 1{,}2 + 0{,}7 = 5\,.$$

Итак, математическое ожидание данной случайной величины равно 5. Неравенства (2.4.9) выполняются: $3 < 5 < 7$.

Пример 11. Найти математическое ожидание случайной величины X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ x^2 & \textit{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \textit{при } x > 1\,. \end{cases}$$

Решение. Найдем сначала плотность распределения вероятностей этой величины. Пользуясь формулой (2.3.5), получаем

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ 2x & \textit{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \textit{при } x > 1\,. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(X) = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

Дисперсией, или *рассеянием*, случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right). \qquad (2.5.2)$$

Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, т.е.

$$D(X) \ge 0\,. \qquad (2.5.3)$$

Для вычисления дисперсии применяется формула

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 . \qquad (2.5.4)$$

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0 \quad (C = const) . \qquad (2.5.5)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X) \quad (C = const) . \qquad (2.5.6)$$

4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) . \qquad (2.5.7)$$

Дисперсия дискретной случайной величины с законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, \ ..., n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

определяется формулой

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k \qquad (2.5.10)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, определяется формулой

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - a)^2 p(x) dx , \qquad (2.5.13)$$

где $p(x)$ - плотность распределения вероятностей этой величины, $a = M(X)$ - ее математическое ожидание.

Дисперсию можно вычислять по формуле

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 p(x) \, dx - (M(X))^2 . \qquad (2.5.14)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $(-\infty, +\infty)$, определяется формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 p(x) \, dx , \qquad (2.5.15)$$

если этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Средним квадратическим отклонением, или *стандартным отклонением*, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (2.5.16)$$

Пример 3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По формуле (2.4.3) находим

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9\,.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения этой величины, т.е. величины $(X - M(X))^2$:

$(X - M(X))^2$	$(0\text{-}0{,}9)^2$	$(1\text{-}0{,}9)^2$	$(2\text{-}0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле (2.5.10) получаем

$$D(X) = (0 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}49\,.$$

В соответствии с формулой (2.5.16) находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7\,.$$

Замечание. Дисперсию можно вычислить и по формуле (2.5.4). Найдем для этого математическое ожидание квадрата случайной величины X, предварительно записав закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

По формуле (2.4.3) находим

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}3\,.$$

В соответствии с формулой (2.5.4) находим

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}3 - 0{,}9^2 = 1{,}3 - 0{,}81 = 0{,}49\,.$$

Пример 9. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Решение. Сначала находим $M(X)$ по формуле (2.4.7):

$$M(X)=\int_2^4 x\cdot 0{,}5\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_2^4=\frac{1}{4}(16-4)=3,\quad M(X)=3.$$

В соответствии с формулой (2.5.13) найдем $D(X)$:

$$D(X)=\int_2^4 (x-3)^2\cdot\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4 (x^2-6x+9)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_2^4=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-3\cdot 16+36\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-3\cdot 4+18\right)=\frac{1}{3},\quad D(X)=\frac{1}{3}.$$

По формуле (2.5.16) находим

$$\sigma(X)=\sqrt{1/3}\approx 0{,}58.$$

Нормальное распределение.

Нормальным распределением, или *распределением Гаусса*, называется распределение с плотностью вероятностей

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0). \tag{3.5.1}$$

Постоянные a и σ ($\sigma>0$) называются *параметрами нормального распределения*.

О случайной величине X, плотность распределения которой определяется функцией (3.5.1) говорят, что она распределена нормально с параметрами a и σ, и кратко называют ее *нормальной*. График функции (3.5.1) называют *нормальной кривой*. На рис. 3.3 изображена нормальная кривая при $a = 3$ и $\sigma = 1$.

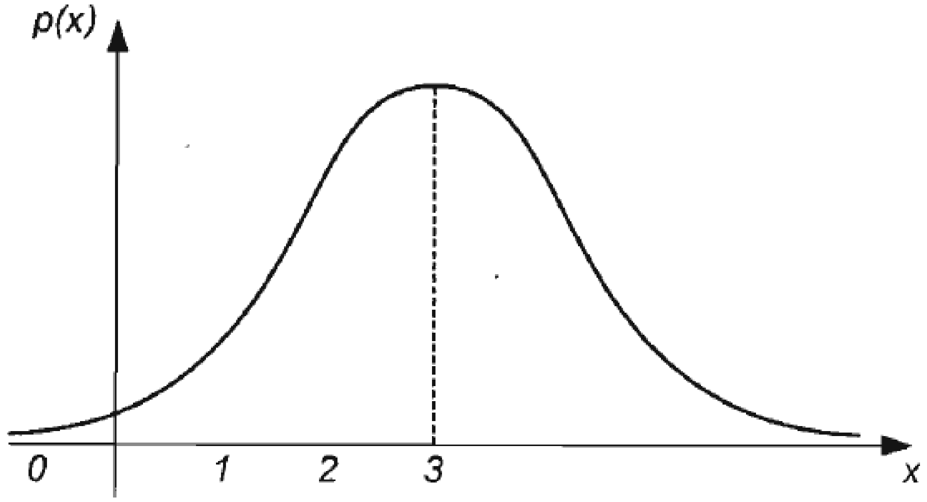

Рис. 3.3

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{3.5.2}$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \tag{3.5.3}$$

С помощью функции Лапласа определяется и вероятность отклонения нормальной случайной величины, или вероятность неравенства $|X - a| < \delta$, где a - математическое отклонение нормально распределенной величины X:

$$P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \tag{3.5.4}$$

Замечание 2. В случае $a = 0$, $\sigma = 1$ функция (3.5.1) принимает вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{3.5.8}$$