Практическое занятие №4
Исследование функций одной переменной и построение графиков

На занятии рассматриваются вопросы:
1. Исследование функций на монотонность и экстремумы.
2. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.
3. Асимптоты графика функции.

1. Исследование функций на монотонность и экстремумы.

- Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на интервале (a,b), если для любых x_1, x_2 $\in (a;b)$ при $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.
- Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на интервале (a,b), если для любых x_1, x_2 $\in (a;b)$ при $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Теорема (достаточное условие возрастания функции): Если $f'(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$.

Теорема (достаточное условие убывания функции): Если $f'(x) < 0$ на интервале $(a;b)$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$.

Теорема (необходимый признак возрастания (убывания) функции): Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси; $y' = 3x^2$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x \neq 0$, а $y'(0) = 0$, т.е. $y'(x) \geq 0$.

- Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.
- Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.
- Значения функции в точке максимума и точке минимума называются соответственно ***максимумом*** и ***минимумом функции***.
- Максимум и минимум функции объединяют общим названием ***экстремума функции***, а точки максимума и минимума называются ***точками экстремума.***

Теорема (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции):

Если в точке x_0 дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

- Точки, в которых производная равна нулю, называются ***стационарными.***

Непрерывная функция может иметь экстремум и в тех точках, в которых она не дифференцируема. Например, функция $y = |x|$ имеет минимум в точке $x = 0$, но в этой точке производная функции не существует.

Таким образом, для того чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.

- Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими.***

Однако *не всякая критическая точка является точкой экстремума*.

Например, рассмотрим функцию $y = x^3$; $y' = 3x^2$; $y'(0) = 0$, т.е. $x = 0$ — критическая точка, но она не является точкой экстремума.

Теорема (первое достаточное условие экстремума):

Пусть функция $y = f(x)$

1) непрерывна в точке x_0;

2) дифференцируема в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0;

3) при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак,

то точка $x = x_0$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$.

При этом если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка $x = x_0$ является точкой минимума, а если с плюса на минус, то точкой максимума.

План исследования функции $y = f(x)$ на экстремум.

1. Находим область определения $D(y)$.
2. Находим производную $f'(x)$.
3. Находим критические точки, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.
4. Отмечаем на числовой прямой область определения и критические точки. В полученных интервалах расставляем знак производной.
5. Делаем вывод о наличии точек экстремума.
6. Находим экстремумы функции.

2. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.

График функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым (вогнутым)*** на интервале (a,b), если он расположен не выше (не ниже) любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y=f(x)$, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***.

Теорема (достаточный признак выпуклости, вогнутости): Если $f''(x)<0$ на интервале (a,b), то график функции выпуклый на этом интервале, а если $f''(x)>0$ на интервале (a,b), то график функции вогнутый на этом интервале.

Теорема (достаточный признак точки перегиба): Если в точке x_0 вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует, а при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

План исследования функции $y=f(x)$ на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

1. Находим область определения $D(y)$.
2. Находим первую производную $f'(x)$.
3. Находим вторую производную $f''(x)$.
4. Находим точки, в которых вторая производная $f''(x)=0$ или не существует (критические точки второго рода)
5. Отмечаем на числовой прямой область определения и критические точки второго рода. В полученных интервалах расставляем знак второй производной.
6. Делаем вывод об интервалах выпуклости, вогнутости, абсциссах точек перегиба.
7. Находим ординаты точек перегиба.

3. Асимптоты графика функции.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат по кривой.

Виды асимптот:

1. вертикальные;
2. наклонные;
3. горизонтальные.

1. *Вертикальные асимптоты.*

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to a^{-0}} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a^{+0}} f(x) = \infty$.

Вертикальные асимптоты проходят либо через точки разрыва второго рода, либо могут пройти через концы области определения функции.

Если только один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a^{-0}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^{+0}} f(x)$ равен бесконечности то прямая $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой.

2. *Наклонные асимптоты.*

Уравнение наклонной асимптоты находим в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - kx)$.

Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен бесконечности, то наклонных асимптот нет.

3. *Горизонтальные асимптоты.*

Горизонтальную асимптоту $y = b$ находят как частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении k и b следует отдельно рассматривать случаи, когда $x \to -\infty$ и когда $x \to +\infty$.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

1. Найдем область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на непрерывность: $x = 3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 6(-x) + 13}{-x - 3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{-x - 3};$$

$$y(-x) \neq y(x), \qquad y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

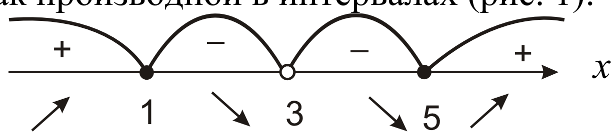
Найдем критические точки:

$$y' = 0, \text{ если } x^2-6x+5=0,$$

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 5.$$

Производная не существует при $x=3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 1):



$x = 1$ — точка максимума,

$x = 5$ — точка минимума.

$$y_{\max} = y(1) = -4,$$

$$y_{\min} = y(5) = 4.$$

Функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(5; +\infty)$.

Функция убывает на $(1; 3)$ и на $(3; 5)$.

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(x^2-6x+5)'(x-3)^2-(x^2-6x+5)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2\cancel{(x-3)}\left((x-3)^2-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\left(x^2-6x+9-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода:

$y''=0$, $\dfrac{8}{(x-3)^3}=0$, решений нет.

Вторая производная не существует при $x=3$, но перегиба в этой точке нет, так как это точка разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

Определим знак второй производной в интервалах (рис. 2):

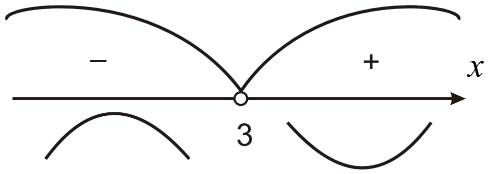


Рис. 2

График функции выпуклый на (–∞; 3) и вогнутый на (3; +∞).

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как $x=3$ — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением $x=3$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13}{x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+13}{x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-3.$$

Итак, $y=x-3$ — наклонная асимптота.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

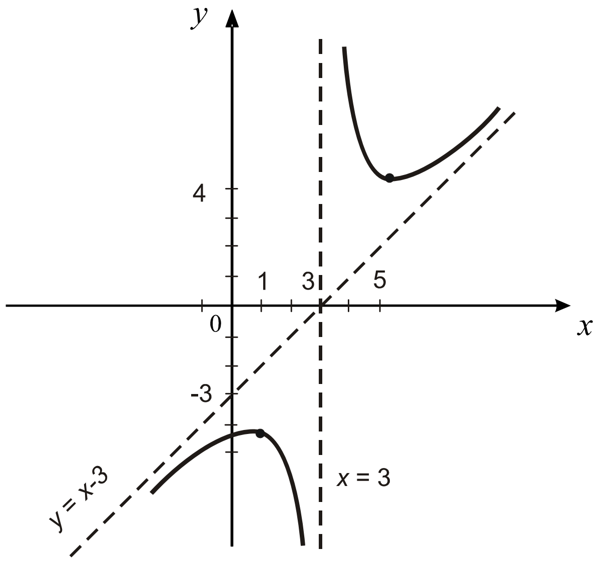
При $x = 0$ получим $y=\frac{13}{-3}=-4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0;-4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0$, $x^2-6x+13=0$;

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16<0$.

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим эскиз графика функции:


y
4
1
3
5
0
-3
x
y = x-3
x = 3