

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Интегральное исчисление функций одной переменной

На занятии рассматриваются вопросы:

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования: подведением под знак дифференциала, замена переменной и интегрирование по частям.

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл, свойства неопределенного интеграла

Ранее решалась задача: по данной функции $f(x)$ найти её производную или дифференциал. Рассмотрим обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x) = f(x)$ или дифференциал.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для любого x из области определения $f(x)$.

Например, для функции $f(x) = x^2$ первообразной является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где C — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество $F(x) + C$ первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных $F(x) + C$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Например, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Достаточным условием существования неопределенного интеграла на некотором промежутке является непрерывность функции на этом промежутке.

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Свойства неопределённого интеграла:

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

2. Таблица основных интегралов

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

$$10.1. \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$12. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$12.1. \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$$

$$13. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

3. Основные методы интегрирования

1) Метод непосредственного интегрирования: данный интеграл путём простейших тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Задание. Найти интегралы:

а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2) dx;$

б) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx;$

Решение (самоконтроль):

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2) dx &= 5 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 3 \int x dx - 2 \int dx = \\ &= 5 \frac{x^{4+1}}{4+1} - 6 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + C = \\ &= x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} x + C.$$

2) Метод подведения под знак дифференциала

Метод основан на свойстве б.

Следует помнить, что дифференциал функции $y = f(x)$ находится по формуле:

$$dy = y' dx.$$

Задание. Найти интегралы:

а) $\int \cos 3x dx$;

б) $\int \frac{dx}{4-5x}$.

Решение (самоконтроль):

а) $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$

б) $\int \frac{dx}{4-5x} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(4-5x)}{4-5x} = -\frac{1}{5} \ln|4-5x| + C.$

3) Метод замены переменной (метод подстановки): заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

$$\int f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{array} \right] = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du$$

После нахождения интеграла через переменную u следует перейти к переменной x .

Задание. Найти интегралы:

а) $\int (3x+2)^5 dx$;

б) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$;

Решение (самоконтроль):

а) $\int (3x+2)^5 dx = \left[\begin{array}{l} 3x+2=u \\ 3dx=du \\ dx=\frac{du}{3} \end{array} \right] = \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{18} u^6 + C =$

$$= \frac{1}{18} (3x+2)^6 + C;$$

б) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \left[\begin{array}{l} 2x^3+1=u \\ 6x^2 dx=du \\ x^2 dx=\frac{du}{6} \end{array} \right] = \int u^4 \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{30} u^5 + C =$

$$= \frac{1}{30} (2x^3+1)^5 + C;$$

4) Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Определим дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv) = u dv + v du,$$

откуда

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

При применении этой формулы надо:

- 1) подынтегральное выражение разбить на две части u и dv , при этом за u обычно принимается x^n , $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arctg} x$,
- 2) по u дифференцированием найти du ,
- 3) по dv интегрированием найти v , причем постоянную интегрирования опустить,
- 4) подставить в формулу, прийти к более простому интегралу.

Задание. Найти интегралы:

а) $\int (x + 5)e^x dx$;

б) $\int x^3 \ln x dx$.

Решение (самоконтроль):

а) Положим $u = x + 5$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x + 5)e^x dx = (x + 5)e^x - \int e^x dx = (x + 5)e^x - e^x + C = e^x(x - 4) + C.$$

б) Положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16} (4 \ln x - 1) + C. \end{aligned}$$