Лекция 6

Произвольная плоская система сил

Произвольная плоская система сил – это система сил, линии действия которых расположеныв плоскости независимо.

Теорема Вариньона.

Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра равен сумме моментов составляющих относительно того же центра.

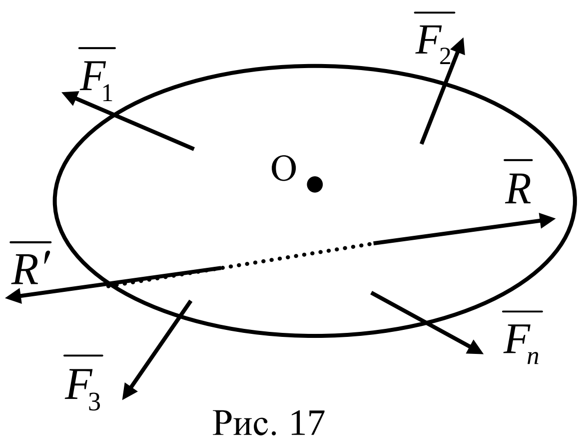


Рис. 17

Пусть (рис. 17) система $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ имеет равнодействующую $\overline{R}$. Приложим к телу силу $\overline{R'}$ =-$\overline{R}$, тогда система $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, $\overline{R'}$ ~ 0, следовательно сумма моментов всех сил системы, относительно любого центра О, будет равна 0, т.е.

$$\sum \overline{m}_O(\overline{F_k}) + \overline{m}_O(\overline{R'}) = 0.$$

Но: $\overline{m}_O(\overline{R'}) = -\overline{m}_O(\overline{R})$, тогда: $\sum \overline{m}_O(\overline{F_k}) - \overline{m}_O(\overline{R}) = 0$. Следовательно: $\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F_k})$. Что и требовалось доказать.

Теорема о параллельном переносе силы.

Силу можно переносить из данной точки в любую другую, добавляя при этом, пару сил с моментом равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Доказательство (рис.18): Пусть в точке А приложена сила $\overline{F}$. Приложим в точке В силы $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, равные, параллельные силе $\overline{F}$, и

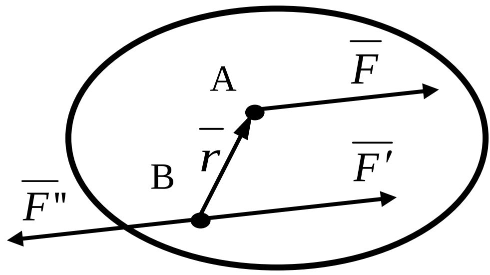


Рис. 18

направленные в противоположные стороны (это можно сделать по первой аксиоме). Тогда систему сил $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ можно рассматривать как силу $\overline{F'}$ равную $\overline{F}$ и приложенную в точке В, и пару сил $\overline{F}$, $\overline{F''}$ момент которой равен моменту силы $\overline{F}$ относительно точки В: $\overline{m}(\overline{F'},\overline{F''}) = \overline{m}_B(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$. Что и требовалось доказать.

Основная теорема статики.

Определение: Главным вектором системы сил называется вектор, равный геометрической сумме сил системы. $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$.

Определение: Главным моментом системы относительно центра О называется вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этого центра. $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F_k})$.

Статика решает две задачи:

a. Задача о равновесии (каким условиям должна удовлетворять система сил, для того, чтобы тело под ее действием находилась в равновесии).

b. Задача о приведении (как данную систему сил заменить другой, в частности заменить простой).

Вторую задачу статики решает **основная теорема статики: любую систему сил можно заменить одной силой равной главному вектору и приложенной в центре приведения и одной парой сил с моментом равным главному моменту относительно центра приведения.**

Доказательство: пусть на тело (рис. 19) действует система сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_{n.}}$. Выберем произвольно т. О – центр приведения. По теореме о параллельном переносе, каждую из сил можно перенести в центр О, добавив при этом соответствующую пару сил.

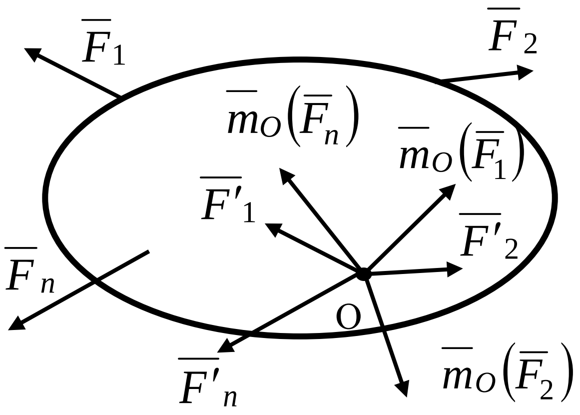


Рис. 19

В результате, перенеся все силы в точку О, Получим систему сил приложенных в т. О и систему пар сил с моментами равными моментам сил системы относительно центра О. Сложив все силы, приложенные к центру О, получим главный вектор системы $\overline{R}$. Сложив все моменты пар сил, получим главный момент $\overline{M}_O$. Таким образом, данную систему сил заменили одной силой $\overline{R}$ и одной парой сил с моментом $\overline{M}_O$, что и требовалось доказать.

Случаи приведения.

1. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система сил эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.

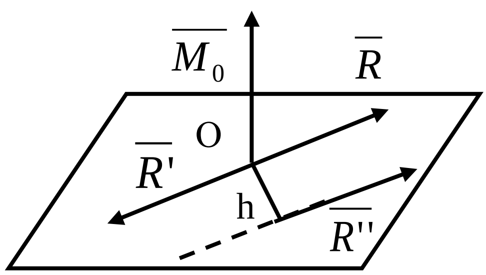


Рис. 20

2. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$.Система приводится к паре сил. При этом главный момент не зависит от выбора центра приведения.

3. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система приводится к равнодействующей, приложенной в центре

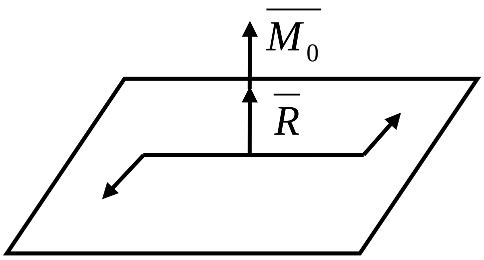


Рис. 21

приведения.

4. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$.

а) $\overline{R} \perp \overline{M}_O$ Система приводится к равнодействующей, лежащей на расстоянии h = $|\overline{M}_O| / |\overline{R}|$ от центра приведения (рис. 20).

б) $\overline{R} \parallel \overline{M}_O$ В этом случае говорят, что система приводится к динаме (рис.21). Во всех остальных случаях, система может быть приведена к динаме. Под действием динамы тело совершает винтовое движение.

Момент силы относительно оси.

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная проекции момента силы, относительно точки, лежащей на оси, на эту ось (рис.22).

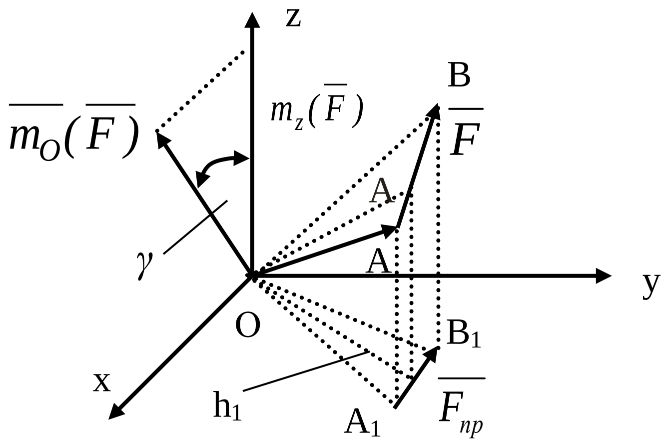


Рис.22

Таким образом:

$m_z(\overline{F}) = |\overline{m}_O(\overline{F})|\cos\gamma$.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде определителя. Тогда, разложив его по элементам первой строки, получим:

$$\overline{m}_O\left(\overline{F}\right)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\cdot\bar{i}+(z\cdot F_x-x\cdot F_z)\cdot\bar{j}+(x\cdot F_y-y\cdot F_x)\cdot\bar{k}$$

.

С другой стороны: $\overline{m}_O(\overline{F})=m_x\left(\overline{F}\right)\cdot\bar{i}+m_y\left(\overline{F}\right)\cdot\bar{j}+m_z\left(\overline{F}\right)\cdot\bar{k}$.

Сравнивая эти формулы, получаем:

$$m_x\left(\overline{F}\right)=y\cdot F_z-z\cdot F_y;\quad m_y\left(\overline{F}\right)=z\cdot F_x-x\cdot F_z;\quad m_z\left(\overline{F}\right)=x\cdot F_y-y\cdot F_x$$

.

При решении задач удобно определять момент силы относительно оси по следующему правилу: *момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси и плоскости.* То есть: $m_z(\overline{F})=m_O(\overline{F}_{np})=\overline{F}_{np}\cdot h_1$.

Вывод: момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси ($F_{np}=0$), или сила пересекает ось ($h_1=0$). Оба эти случая можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Геометрически момент силы относительно центра O равен удвоенной площади ΔOAB, а относительно оси z - удвоенной площади ΔOA_1B_1.

Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялось два равенства: $\overline{R}=0$; $\overline{M}_O=0$.

Поскольку $|\overline{R}|=\sqrt{Rx^2+Ry^2+Rz^2}$, а $|\overline{M}_0|=\sqrt{Mx^2+My^2+Mz^2}$, то для того,

чтобы выполнялись эти равенства необходимо, чтобы одновременно выполнялось шесть уравнений:

$$\begin{cases} \sum Rx = 0; \\ \sum Ry = 0; \\ \sum Rz = 0; \\ \sum Mx = 0; \\ \sum My = 0; \\ \sum Mz = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum Fkx = 0; \\ \sum Fky = 0; \\ \sum Fkz = 0; \\ \sum m_x(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_z(\overline{F_k}) = 0. \end{cases}$$

или

Это и есть ***уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.***

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \\ \sum m_x = 0; \\ \sum m_y = 0; \\ \sum m_z = 0. \end{cases}$$

Если линии действия всех сил системы параллельны, то, выбрав ось Z так, чтобы она была параллельна линиям действия сил, получим, что первые два и последние уравнение системы выполнятся тождественно, тогда останутся три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F_k}) = 0. \end{cases}$$

- это и есть ***уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил.***

Уравнение равновесия плоской произвольной системы сил.

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо, чтобы: $\overline{R} = 0$ и $\overline{M}_O = 0$, а для этого должны выполняться три равенства:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum m_o(\overline{F_k}) = 0. \end{cases}$$

при решении задач их записывают в виде:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases}$$

Это и есть уравнение равновесия ***произвольной плоской системы сил***.

Имеется два других вида уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \end{cases}$$

Здесь ось x не $\perp$ AB.

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0; \end{cases}$$

Здесь точки A, B, C – не лежат на одной прямой.

Если линии действия всех сил плоской системы параллельны, то система сил называется плоской системой параллельных сил.

Выберем ось X так, чтобы она была перпендикулярна линиям действия сил. Тогда уравнение $\sum X = 0$ выполняется тождественно. В результате получим два вида ***уравнений равновесия плоской системы параллельных сил***.

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

Равнодействующая сила – это:
сила, действующая на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе
мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия
сила взаимодействия между материальными точками (телами) рассматриваемой системы
+сила, эквивалентная некоторой системе сил

Уравнения равновесия сходящейся плоской системы сил, имеют вид:
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0,\ \sum m_z = 0$
$\sum Z = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0$
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_A = 0$
+$\sum X = 0,\ \sum Y = 0$

Условие равновесия сходящихся сил:
+ $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$
$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
$R_x^{(u)} = R_y^{(u)} = R_z^{(u)}$

Уравнения равновесия сходящейся пространственной системы сил, имеют вид:
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0,\ \sum m_z = 0$
$\sum Z = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0$
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_A = 0$
+ $\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum Z = 0$

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, имеют вид:
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0,\ \sum m_z = 0$
$\sum Z = 0,\ \sum m_x = 0,\ \sum m_y = 0$
+$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M_A = 0$
$\sum X = 0,\ \sum Y = 0$

Указать первую форму условия равновесия плоской системы сил:
$\sum X = 0,\ \ \sum Y = 0,\ \ \sum Z = 0$
+$\sum X = 0,\ \ \sum Y = 0,\ \ \sum M_A = 0$

$\sum X = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$
$\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$

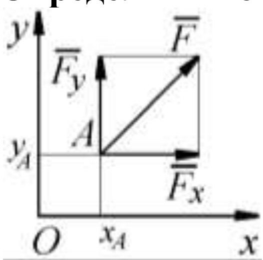
Статически неопределимыми называют задачи, в которых:
можно найти хотя бы одну неизвестную реакцию
+число неизвестных реакций, превышает число уравнений равновесия
можно найти все неизвестные реакции связей
число неизвестных реакций, меньше числа уравнений равновесия

Пары сил, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их моменты:
численно равны
+численно равны и одинаковы по знаку
одинаковы по знаку

Основной характеристикой пары сил, мерой ее механического действия, является:
ее плоскость действия
ее равнодействующая
+ее момент

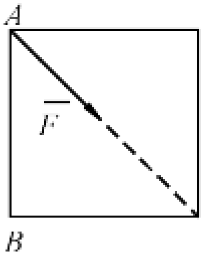
Момент пары сил, эквивалентной данной системе пар сил в пространстве, равен:
+ $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n$
$M = \sum M_i$
$\sum M_i = 0$

Определить момент силы относительно начала координат



, если сила задана проекциями $F_x = F_y = 210\ H$ **и известны координаты точки приложения силы** $x_A = y_A = 0{,}1\ м$ **:**

+0
21
21

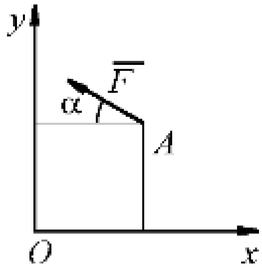


К вершине А квадратной пластины , длины сторон которой равны 0,2 м, приложена сила $F = 150\ H$ **. Определить момент этой силы относительно точки В.**

$+ m_B(\overline{F}) = -F \cdot AB \cdot \cos(45^0) = -21{,}21\ H \cdot м$

$m_B(\overline{F}) = F \cdot AB \cdot \cos(45^0) = 21{,}21\ H \cdot м$

$m_B(\overline{F}) = -F \cdot AB = -30\ H \cdot м$



Сила $F = 420\ H$ **, приложенная в точке А , лежит в плоскости** Oxy **. Определить момент силы относительно точки О, если координаты** $x_A = 0{,}2\ м$ **,** $y_A = 0{,}3\ м$ **и угол** $\alpha = 30^\circ$ **.**

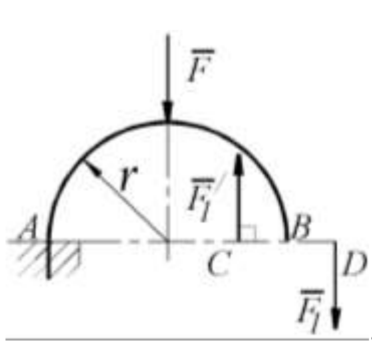
$+ m_O(\overline{F}) = F \cdot \cos\alpha \cdot y_A + F \cdot \sin\alpha \cdot x_A = 151\ H \cdot м$

$m_O(\overline{F}) = -F \cdot \cos\alpha \cdot y_A - F \cdot \sin\alpha \cdot x_A = -151\ H \cdot м$

$m_O(\overline{F}) = -F \cdot \sin\alpha \cdot y_A - F \cdot \cos\alpha \cdot x_A = -135{,}7\ H \cdot м$

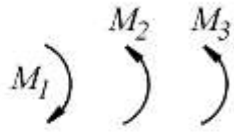
Определить главный вектор плоской системы сил, если заданы его проекции на координатные оси $R_x = 300\ H$ **,** $R_y = 400\ H$ **:**

+500
300
400



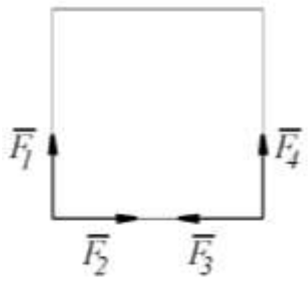
На арку АВ действует пара сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_1^{/}$ **) и сила** $\overline{F}$ **.**
Определить сумму их моментов относительно точки А, если силы $F = 4\ H$ **,** $F_1 = 2\ H$ **, радиус** $r = 2\ м$ **, плечо** $CD = 1{,}5\ м$ **:**

+-11
-8
-3
11

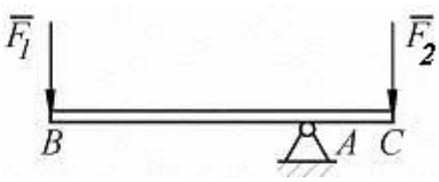
В одной плоскости расположены три пары сил 

. **Определить момент пары сил** M_3**, при котором эта система находится в равновесии, если моменты** $M_1 = 510\ H \cdot м$**,** $M_2 = 120\ H \cdot м$**:**
+390
510
120

К вершинам квадрата приложены четыре силы $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1\ H$



. Определить модуль равнодействующей этой системы сил.
+2
0
4

На брус BC, закрепленный в шарнире A 

, действуют вертикальные силы $F_1 = 4\ кН$ **и** F_2**. Определить силу** F_2 **в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояния** $AC = 2\ м$**,** $AB = 6\ м$**.**
+12
24
32