Практическое занятие 3

Пример 1. Определим центр тяжести однородного тела, изображённого на рис. 13.

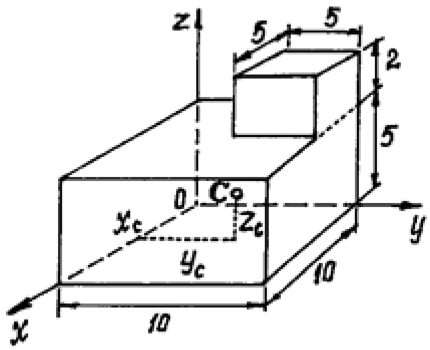

Рис.13

Решение. Тело однородное, состоящее из двух частей, имеющих симметричную форму. Координаты центров тяжести их:

$x_1 = 5$ см; $y_1 = 5$ см; $z_1 = 2{,}5$ см;

$x_2 = 2{,}5$ см; $y_2 = 7{,}5$ см; $z_2 = 6$ см.

Объёмы их: $V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$ см^3; $V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ см^3.

Поэтому координаты центра тяжести тела

$$x_C = \sum \frac{V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4{,}77 \text{ см};$$

$$y_C = \sum \frac{V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7{,}5}{550} = 5{,}23 \text{ см}$$

$$z_C = \sum \frac{V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 6}{550} = 2{,}82 \text{ см}$$

Пример 2. Найдем центр тяжести пластины, согнутой под прямым углом. Размеры – на чертеже (рис.14).

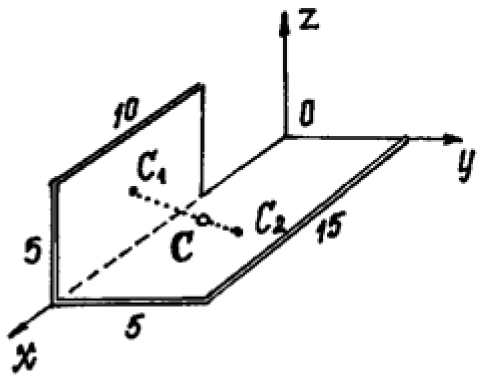

Рис.14

Решение. Координаты центров тяжести: $x_1 = 20$ см, $y_1 = 0$, $z_1 = 2{,}5$ см, $x_2 = 7{,}5$ см, $y_2 = 2{,}5$ см, $z_2 = 0$.

Площади: $S_1 = 5 \cdot 10 = 50$ см^2, $S_2 = 5 \cdot 15 = 75$ см^2.

Поэтому:

$$x_C = \sum \frac{S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 20 + 75 \cdot 7{,}5}{50 + 75} = 12{,}5 \text{ см};$$

$$y_C = \sum \frac{S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2{,}5}{125} = 1{,}5 \text{ см}$$

$$z_C = \sum \frac{S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2{,}5}{125} = 1{,}0 \text{ см}$$

.5.

Пример 3. У квадратного листа 20×20 см вырезано квадратное отверстие 5×5 см (рис.15). Найдем центр тяжести листа.

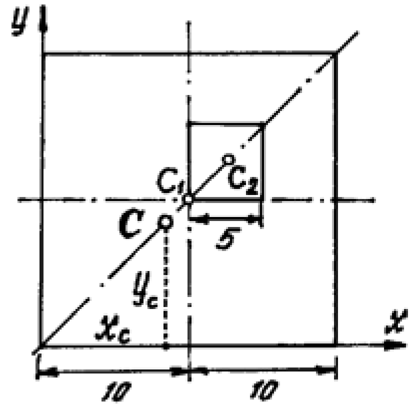

Рис.15

Решение. В этой задаче удобнее разделить тело на две части: большой квадрат и квадратное отверстие. Только площадь отверстия надо считать отрицательной. Тогда координаты центра тяжести листа с отверстием:

$$x_C = \sum \frac{S_i x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 12{,}5}{400 - 25} = 9{,}83 \text{ см},$$

координата $y_C = x_C = 9{,}83$ см, так как тело имеет ось симметрии (диагональ).

Пример 4. Найти положение центра тяжести пластинки, представленной на рис. 16. Размеры даны в сантиметрах.

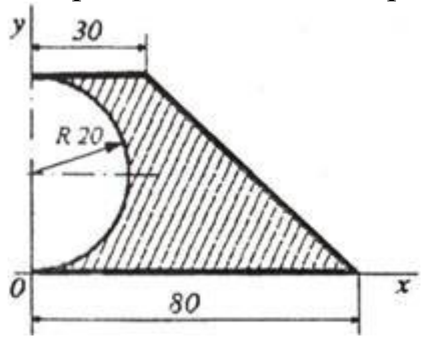

Рис.16

Решение. Разделим пластинку на фигуры (рис. 17), центры тяжести которых известны.

Площади этих фигур и координаты их центров тяжести:

1) прямоугольник со сторонами 30 и 40 см, S_1 =30·40=1200 см^2; x_1=15 см; y_1 =20 см.

2) прямоугольный треугольник с основанием 50 см и высотой 40 см; S_2 =0,5·50·40= 1000 см^2; x_2=30+50/3=46,7 см; y_2=40/3=13,3 см;

3) половина круга окружности радиуса R=20 см; S_3 =0,5·π·20^2 =628 см^2; x_3 =4R/3π=8,5 см; y_3 =20 см.

Координаты центра тяжести пластинки определяются по формулам (площадь половины круга считаем отрицательной)

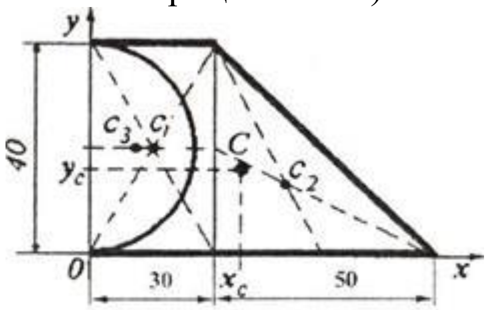

Рис.17

$$x_C = \frac{1}{S}\sum S_k x_k = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 - S_3x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = 38\text{ см},$$
$$y_C = \frac{1}{S}\sum S_k y_k = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 - S_3y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = 15{,}8\text{ см}.$$

где S — площадь всей пластины; S_K - площади ее частей.

Пример 5. Проволочная скобка (рис.18) состоит из трёх участков одинаковой длины l.

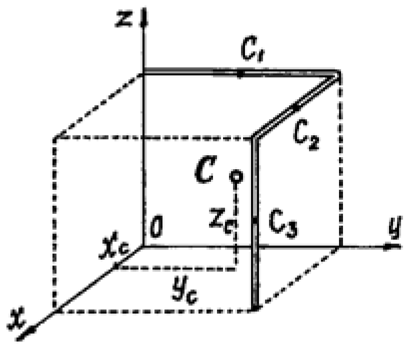

Рис.18

Решение. Координаты центров тяжести участков:

$x_1 = 0,\quad y_1 = 0{,}5l,\quad z_1 = l;$

$x_2 = 0{,}5l,\quad y_2 = l,\quad z_2 = l,;$

$x_3 = l,\quad y_3 = l,\quad z_3 = 0{,}5l.$

Поэтому координаты центра тяжести всей скобки:

$$x_C = \sum \frac{l_i x_i}{L} = \frac{l\cdot 0 + l\cdot 0{,}5l + l\cdot l}{3l} = 0{,}5l;$$

$$y_C = \sum \frac{l_i y_i}{L} = \frac{l \cdot 0{,}5l + l \cdot l + l \cdot l}{3l} = 0{,}83l,$$
$$z_C = \sum \frac{l_i z_i}{L} = \frac{l \cdot l + l \cdot l + l \cdot 0{,}5l}{3l} = 0{,}83l.$$

Пример 6. Определить положение центра тяжести фермы, все стержни которой имеют одинаковую погонную плотность (рис.19).

Решение. Напомним, что в физике плотность тела ρ и его удельный вес γ связаны соотношением: $\gamma = \rho g$, где g – ускорение свободного падения. Чтобы найти массу такого однородного тела, нужно плотность умножить на его объем.

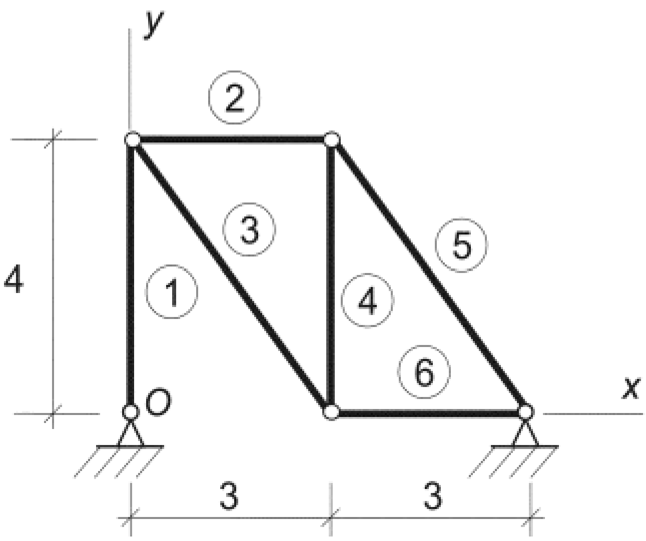

Рис.19

Термин «линейная» или «погонная» плотность означает, что для определения массы стержня фермы нужно погонную плотность умножить на длину этого стержня.

Для решения задачи можно воспользоваться методом разбиения. Представив заданную ферму в виде суммы 6 отдельных стержней, получим:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{6} L_i x_i}{\sum_{i=1}^{6} L_i};$$
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{6} L_i y_i}{\sum_{i=1}^{6} L_i},$$

где L_i длина i-го стержня фермы, а x_i, y_i – координаты его центра тяжести.

Решение этой задачи можно упростить, если сгруппировать 5 последних стержней фермы. Нетрудно видеть, что они образуют фигуру, имеющую центр симметрии, расположенный посредине четвертого стержня, где и находится центр тяжести этой группы стержней.

Таким образом, заданную ферму можно представить комбинацией всего двух групп стержней.

Первая группа состоит из первого стержня, для нее $L_1 = 4$ м, $x_1 = 0$ м, $y_1 = 2$ м. Вторая группа стержней состоит из пяти стержней, для нее $L_2 = 20$ м, $x_2 = 3$ м, $y_2 = 2$ м.

Координаты центра тяжести фермы находим по формуле:

$x_c = (L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2)/(L_1 + L_2) = (4 \cdot 0 + 20 \cdot 3)/24 = 5/2$ м;

$y_c = (L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2)/(L_1 + L_2) = (4 \cdot 2 + 20 \cdot 2)/24 = 2$ м.

Отметим, что центр C лежит на прямой, соединяющей C_1 и C_2 и делит отрезок C_1C_2 в отношении: $C_1C/CC_2 = (x_c - x_1)/(x_2 - x_c) = L_2 / L_1 = 2{,}5/0{,}5$.