ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Существует довольно много специальных математических программ (MatLAB, Maple, Mathematica и прочие), но, несомненно, самой популярной и признанной является MathCAD. И для этого есть несколько объективных причин.

Универсальность. Большинство других программ, как правило, довольно узкопрофильны. Есть программы, специализирующиеся на решении систем линейных уравнений, численном поиске корней более сложных выражений, построении графиков и работы с массивами. Математический пакет MathCAD способен в значительной мере справиться с задачами из всех областей применения математики.

Наглядность. Принцип построения интерфейса MathCAD определяется формулой What you see is what you get — что вы видите, то и получите. То есть интеграл или производная в MathCAD — это привычные математические значки, а не специальная, значительно снижающая наглядность решения функция. Особенно это оценят те, кому приходилось решать задачи при помощи языков программирования — ведь понять суть решения в этом случае мог лишь владеющий подобными навыками человек. Документ MathCAD же можно смело подшивать к докладу или дипломной работе — такое решение будет понятно абсолютно всем.

MathCAD — это программа, позволяющая работать в очень тесной интеграции с другими системами (Word, Excel, AutoCAD и пр.), эффективно использовать Web-технологии. Это позволяет максимально эффективно и быстро решать поставленную задачу. Кроме того, в MathCAD встроена очень широкая справочная база с множеством примеров, подсказок и качественной системой поиска.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MATHCAD

1.1. Рабочее окно MathCAD

Загрузка системы осуществляется двойным щелчком по соответствующему ярлыку на рабочем столе.

Прежде чем перейти к изучению большого количества возможностей MathCAD, рассмотрим элементы его окна.

- *Главное меню* является воротами к математическим выражениям, графике, функциям и обеспечивает команды, посредством которых происходит управление рабочими листами и их редактирование (рис. 1.1).

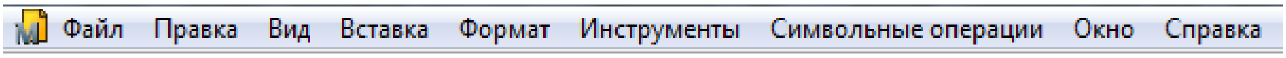


Рис. 1.1. Главное меню

- Панель инструментов *Стандартная* является другой кнопочной панелью, которая обеспечивает ярлыки для многих общих задач, от открытия рабочего листа и сохранения файла до проверки правильности написания и выдачи списка встроенных функций (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Панель инструментов Стандартная

- Панель *Форматирование* позволяет выбирать текстовые и математические шрифты (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Панель Форматирование

- Панель *Математика* (рис. 1.4).

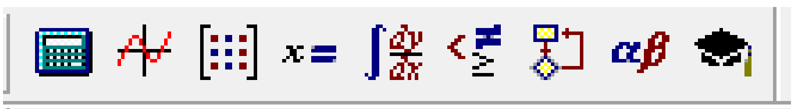
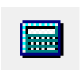
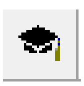
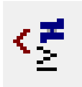


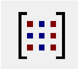
Рис. 1.4. Панель Математика

При щелчке на кнопкам панели инструментов *Математика* открывается дополнительная панель:

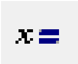
 — панель *Калькулятор*  — панель *Символьные*

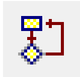
 — панель *График*

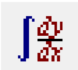
 —панель *Булева алгебра*

 — панель *Матрица*

 — панель *Греческий*

 — панель *Вычисление*

 — панель *Программирование*

 — панель *Математический анализ*

1.2. Элементы языка MathCAD

К основным элементам математических выражений MathCAD относятся операторы, константы, переменные, массивы и функции.

1.2.1. Операторы

Операторы — элементы MathCAD, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной, интеграла и т.д.

Оператор определяет:

а) действие, которое должно выполняться при наличии тех или иных значений операндов;

б) сколько, где и какие операнды должны быть введены в оператор.

Операнд — число или выражение, на которое действует оператор.

Например, в выражении 5!+3 числа 5! и 3 — операнды оператора «+» (плюс), а число 5 — операнд факториала (!).

Любой оператор в MathCAD можно ввести двумя способами:

- нажав клавишу (сочетание клавиш) на клавиатуре;
- используя математическую панель.

Для присвоения или вывода содержимого ячейки памяти, связанной с переменной, используются следующие операторы:

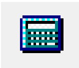
:= *знак присвоения* — такое присвоение называется *локальным,* до этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать (вводится нажатием двоеточия в английской раскладке клавиатуры или нажатием соответствующей кнопки на панели *Калькулятор*);

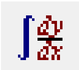
≡ *глобальный оператор присвоения* — это присвоение может производиться в любом месте документа, к примеру, если переменной присвоено таким образом значение в самом конце документа, то она будет иметь это же значение и в начале документа;

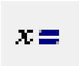
= *оператор приближенного равенства* (жирное равно) используется при решении систем уравнений, вводится нажатием точки с запятой в английской раскладке клавиатуры или нажатием соответствующей кнопки на *Булевой панели*;

= *оператор равенства* (простое равно) отведен для вывода значения константы или переменной.

Процесс вычисления осуществляется при помощи:

 — панель *Калькулятор*

 — панель *Математический анализ*

 — панель *Вычисление*

Внимание. Если необходимо поделить все выражение в числителе, то его нужно первоначально выделить, нажав пробел на клавиатуре или поместив в скобки.

З а д а н и е. Произведите следующие вычисления:

1) $25+\dfrac{125}{3}$; 2) $\sqrt{18}$; 3) $\dfrac{-6+48}{12}$; 4) $\prod_{i=2}^{10}\left(1-\frac{1}{i!}\right)^2$;

5) $(15+18)\,2$; 6) $\dfrac{0.08-3.52\sqrt{7.62}}{3.32+8.9\sqrt{6.69}}$; 7) $4!$; 8) $\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{i}\dfrac{1}{2j+i}$.

1.2.2. Константы

Константы — поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены.

Например, π = 3.14.

З а д а н и е. Выведите на экран значения *e* и *π*.

Размерные константы — это общепринятые единицы измерения. Например, метры, секунды и т.д.

Чтобы записать размерную константу, необходимо после числа ввести знак * (умножить), выбрать пункт меню *Вставка* подпункт *Юнит*.

В измерениях наиболее известные вам категории: *Length* — длина (м, км, см); *Mass* — вес (г, кг, т); *Time* — время (мин, сек, час).

З а д а н и е. Произведите следующие вычисления:

1) $15 \cdot 25 \cdot \mathrm{m}$; 2) $\dfrac{8500 \cdot kg}{1200 \cdot kg}$; 3) $\dfrac{60 \cdot m}{20 \cdot \sec}$.

1.2.3. Переменные

Переменные являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т.д. Значения переменным задаются с помощью знака присвоить :=.

Внимание. MathCAD прописные и строчные буквы воспринимает как разные идентификаторы.

З а д а н и е. Дано: $x = 1$, $y = 5$. Найдите сумму a и b, если

$$a = \frac{3 + e^{y-1}}{1 + x^2 \left|y\right|}; \quad b = 1 + \left|y - x\right| + \left(\frac{y - x}{2}\right) + \left(\frac{\left|y - x\right|^3}{3}\right).$$

Системные переменные. В MathCAD содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать системными переменными. Это, например, TOL [0.001] — погрешность числовых расчетов, ORIGIN [0] — нижняя граница значения индекса индексации векторов, матриц и др. Значения этим переменным при необходимости можно задать другие.

Ранжированные переменные. Эти переменные имеют ряд фиксированных значений либо целочисленных, либо изменяющихся с определенным шагом от начального значения до конечного.

Для создания ранжированной переменной используется выражение

$$Name = N_{begin},(N_{begin} + Step)..N_{end},$$

где $Name$ — имя переменной;
N_{begin} — начальное значение;
$Step$ — заданный шаг изменения переменной;
N_{end} — конечное значение.

Ранжированные переменные широко применяются при построении графиков. Например, для построения графика некоторой функции $f(x)$ прежде всего необходимо создать ряд значений переменной x — для этого она должна быть ранжированной переменной.

Внимание. Если в диапазоне изменения переменной не указывать шаг, то программа автоматически примет его равным 1.

П р и м е р. Переменная x изменяется в диапазоне от –16 до +16 с шагом 0,1.

Чтобы записать ранжированную переменную, нужно ввести:

– имя переменной x;

– знак присвоения :=;

– первое значение диапазона –16;

– запятую;

– второе значение диапазона, которое является суммой первого значения и шага –16+0.1;

– многоточие .. — изменение переменной в заданных пределах (многоточие вводится нажатием точки с запятой в английской раскладке клавиатуры);

– последнее значение диапазона 16.

В результате у вас получится: $x := -16, -15.9 \,..\, 16$.

Таблицы вывода. Любое выражение с ранжированными переменными после знака равенства инициирует таблицу вывода.

П р и м е р. Таблицы вывода ранжированных переменных:

$x := -16, -15.9 \,..\, 16$ $\qquad$ $i := 0 \,..\, 5$

x =

-16
-15.9
-15.8
-15.7
-15.6
-15.5
-15.4
-15.3
-15.2
-15.1
...

i =

0
1
2
3
4
5

В таблицы вывода можно и вставлять числовые значения, и корректировать их.

З а д а н и е. Задайте диапазон изменения переменной z от – 10 до 5 с шагом 0,2. Выведите таблицу значений переменной z.

Переменная с индексом. Это переменная, которой присвоен набор не связанных друг с другом чисел, каждое из которых имеет свой номер (индекс).

Ввод индекса осуществляется нажатием левой квадратной скобки на клавиатуре или при помощи кнопки x_n на панели *Калькулятор*.

В качестве индекса можно использовать как константу, так и выражение. Для инициализации переменной с индексом необходимо ввести элементы массива, разделяя их запятыми.

Пример. Ввод индексных переменных.

i:=0..2 — индекс изменяется от 0 до 2 (индексная переменная будет содержать 3 элемента).

$s_1 :=$
$\begin{matrix}-2\\2\\5.75\end{matrix}$ — ввод числовых значений в таблицу производится через запятую;

$s_1 = 2$ — вывод значения первого элемента вектора S;

$s_0 = -2$ — вывод значения нулевого элемента вектора S.

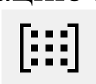
1.2.4. Массивы

Массив — имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса.

В пакете MathCAD используются массивы двух наиболее распространенных типов:

– одномерные (векторы);
– двухмерные (матрицы).

Вывести шаблон матрицы или вектора можно одним из способов:

- выбрать пункт меню *Вставка — Матрица*;
- нажать комбинацию клавиш *Ctrl* + *M*;
- нажать кнопку  на панели *Матрица*.

В результате появится диалоговое окно, в котором задается необходимое число строк и столбцов (рис. 1.5):

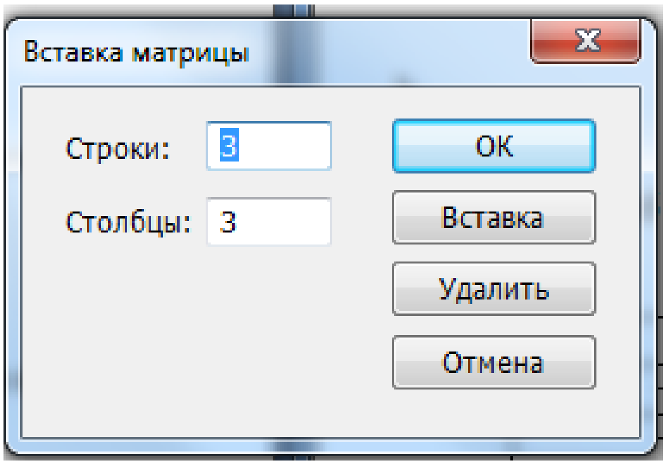


Рис. 1.5. Панель Матрица

Если матрице (вектору) нужно присвоить имя, то вначале вводится имя матрицы (вектора), затем — оператор присвоения и после — шаблон матрицы (рис. 1.6).

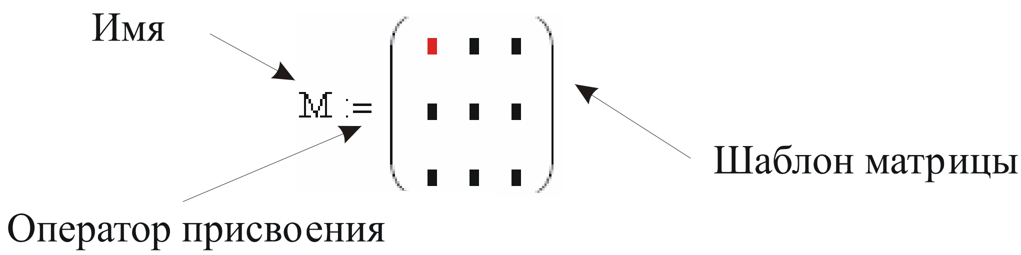


Рис. 1.6. Вид шаблона для ввода значений матрицы

Векторы могут быть двух типов: *векторы-строки* и *векторы-столбцы*.

Например:

$\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ — вектор-столбец; $\begin{bmatrix} 12 & 20 & 30 \end{bmatrix}$ — вектор-строка

Несмотря на то что два этих вектора имеют одни и те же числовые значения элементов, они различны по типу и дадут разные результаты при векторных и матричных операциях.

З а д а н и е. Произведите следующие расчеты:

1) $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot 2$; 2) $(10\ 20\ 30) \cdot 2$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -26 \end{pmatrix}$.

Матрица — двухмерный массив с именем $M_{n,m}$, состоящий из n строк и m столбцов.

С матрицами можно выполнять различные математические операции.

Задание. Даны две матрицы A и B:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Произведите следующие расчеты:

1) A + B; 2) A·B; 3) 2 A + 5 B; 4) A·B – 2B·A; 5) A·B – A^{-1};
6) найти $A \cdot n$, если $n = 3$;
7) выполнить транспонирование матрицы B: B^{T} (заменить элементы строк на элементы столбцов);
8) выполнить инвертирование (обращение) матрицы A: A^{-1};
9) умножить исходную матрицу A на обратную: $A \cdot A^{-1}$;
10) вычислить определитель матрицы B: $|B|$;
11) вычислить след матрицы (сумму ее диагональных элементов): tr(B).

1.2.5. Функции

Функция — выражение, согласно которому производятся некоторые вычисления с аргументами и определяется его числовое значение. Примеры функций: sin(x), tan(x) и др.

Функции в пакете MathCAD могут быть как встроенными, так и определенными пользователем. Способы вставки встроенной функции:

- выбрать пункт меню *Вставка – Функция*;
- нажать комбинацию клавиш Ctrl + E;
- щелкнуть по кнопке $\boxed{f(x)}$ на панели инструментов;
- набрать имя функции на клавиатуре.

Функции пользователя обычно используются при многократных вычислениях одного и того же выражения. Для того чтобы задать функцию пользователя, необходимо:

- ввести имя функции с обязательным указанием в скобках аргумента, например, $f(x)$;
- ввести оператор присвоения (:=);
- ввести вычисляемое выражение.

Пример. $f(z) := \sin(2 z^2)$

З а д а н и е . Произведите следующие вычисления:

1) $\int_{-1}^{1} x\,tan(x)dx$; 2) $\int_{-1}^{1} \frac{cos(x)}{sin(x)+1}dx$.

3) Найдите значение функции $f(x) = sin(3x^{0,4})$

и ее производной $\frac{d}{dx}f(x)$ при $x = 1$.

1.3. Форматирование чисел

В MathCAD можно изменить формат вывода чисел. Обычно вычисления производятся с точностью 17 знаков, но выводятся на экран не все значащие цифры.

Чтобы изменить формат числа, необходимо дважды щелкнуть на нужном численном результате. Появится окно форматирования чисел, открытое на вкладке *Формат результата* со следующими форматами:

Общие — принят по умолчанию. Числа отображаются с порядком (например, $1{,}22\cdot10^5$). Число знаков мантиссы определяется в поле *Экспоненциальный порог*. При превышении порога число отображается с порядком. Число знаков после десятичной точки меняется в поле *Число десятичных знаков*.

Десятичный — десятичное представление чисел с плавающей точкой (например, 12,2316).

Научный — числа отображаются только с порядком.

Инженерный — числа отображаются только с порядком, кратным трем (например, $1{,}22\cdot10^6$).

Внимание. Если после установления нужного формата в окне форматирования чисел выбрать кнопку Ок, формат установится только для выделенного числа.

Автоматически числа округляются до нуля, если они меньше установленного порога. Порог устанавливается для всего документа, а не для конкретного результата.

П р и м е р . Представление значения выражения e^{10} в разных форматах:
$a := e^{10}$;
$a := 2{,}203\cdot e^{10}$ — общие (по умолчанию);
$a := 22026{,}466$ — десятичный;
$a := 2{,}203\cdot10^4$ — научный;
$a := 22{,}03\cdot10^3$ — научный.

Задание

1) Вычислите $\frac{5}{260}$, для результата установите число знаков после запятой, равное 5;

2) вычислите $\frac{0.5}{260}$, для результата выберите десятичный формат.

1.4. Работа с текстом

Текстовые фрагменты представляют собой куски текста, которые пользователь хотел бы видеть в своем документе. Это могут быть пояснения, ссылки, комментарии и т.д. Они вставляются при помощи пункта меню *Вставка – Текстовый регион*.

Задание. Наберите следующий текст в MathCAD:

Текстовые фрагменты включают в себя ссылки, пояснения, комментарии и т.д.

Вы можете отформатировать текст: поменять шрифт, его размер, начертание, выравнивание и т.д. Для этого нужно его выделить и выбрать соответствующие параметры на панели шрифтов или в меню *Форматирование – Текст*.

Измените ваш текст, выбрав следующие параметры: шрифт — Liberation Serif, размер 18 пунктов, цвет зеленый, выравнивание по центру.

1.5. Редактирование объектов MathCAD

Для выделения блока (математического, текстового, графического) надо установить указатель мыши левее и выше выделяемого блока и, удерживая нажатой левую кнопку мыши, растянуть пунктирный прямоугольник (рамку выделения) так, чтобы он охватил нужный объект. Таким образом можно выделить как один, так и несколько блоков. Для выделения всех областей сразу используется команда *Правка – Выделить все* или комбинация клавиш CTRL + A.

Копирование, вырезание выделенных блоков в буфер обмена и вставка их из буфера производится при помощи основного меню, контекстного меню, кнопок на панели инструментов и комбинаций клавиш.

Например, для того чтобы скопировать блок с помощью контекстного меню, необходимо:

- выделить блок;
- щелкнуть по выделенному блоку правой кнопкой мыши и выбрать из меню *Копировать* (Copy);

- установить курсор в то место текущего документа (или другого документа), куда вы хотите вставить блок, щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать *Вставить* (Paste).

Перемещение блока внутри документа можно производить с помощью мыши. Для этого необходимо:

- подвести указатель мыши к объекту, чтобы он превратился в изображение черной ладошки;
- нажав левую кнопку мыши, перетащить блок в нужное место.

Перемещение блока в другой документ необходимо производить через буфер обмена, используя команды *Вырезать* и *Вставить*.

Поскольку вырезать, копировать и вставлять объекты приходится часто, полезно запомнить сочетание клавиш для выполнения этих операций:

– вырезать — Ctrl + x;
– копировать — Ctrl + c;
– вставить — Ctrl + v;
– отмена предыдущего действия — Ctrl + z.

З а д а н и е. Скопируйте первый пример в конец документа. Переместите второй пример в начало документа.

1.6. Форматирование математических выражений

При изменении математических шрифтов MathCAD различает *переменные* и *константы*, и это позволяет применять к ним различные параметры форматирования. Форматирование математических выражений происходит аналогично форматированию текста. Необходимо выделить переменную или константу математического выражения и, используя *Панель шрифтов*, произвести необходимые изменения для шрифта.

З а д а н и е. С помощью форматирования приведите математическое выражение

$$\prod_{i=2}^{100}\frac{(i+1)}{i+2}=0,029$$

к следующему виду:

$$\prod_{\mathrm{i}=\underline{\boldsymbol{2}}}^{\underline{\boldsymbol{100}}}\left(\frac{\mathrm{i}+\underline{\boldsymbol{1}}}{\mathrm{i}+\underline{\boldsymbol{2}}}\right)=\underline{\boldsymbol{0.029}}$$

1.7. Сохранение и открытие документа

Для того чтобы сохранить документ, необходимо:

- выбрать в меню *Файл – Сохранить как*;
- в появившемся окне в поле Папка выбрать нужный диск и папку, в поле *Имя файла* ввести имя файла, например m135 (расширение .mcd система проставляет автоматически), и нажать кнопку *Сохранить*.

Для открытия сохраненного документа необходимо:

- загрузить MathCAD;
- в меню выбрать *Файл – Открыть*;
- в появившемся окне в поле *Папка* выбрать нужный диск и папку и найти свой файл.

Задание. Закройте программу, предварительно сохранив свой файл.

Вопросы для самоконтроля

1. Основные элементы математических выражений MathCAD.
2. Работа с текстовыми фрагментами.
3. Редактирование документа.
4. Сохранение рабочего документа на диске.

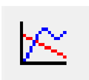
2. РАБОТА С ГРАФИКОЙ В MATHCAD

При решении многих задач, где производится исследование функции, часто возникает необходимость в построении ее графика, где наглядно будет отражено поведение функции на определенном промежутке.

В системе MathCAD существует возможность построения различных видов графиков: в декартовой и полярной системе координат, трехмерных графиков, поверхностей тел вращения, многогранников, пространственных кривых, графиков векторного поля. Мы рассмотрим приемы построения некоторых из них.

2.1. Построение двухмерных графиков

Для построения двухмерного графика функции необходимо:

- задать диапазон значений аргумента;
- задать функцию;
- установить курсор в то место, где должен быть построен график, на панели *Математика* выбрать кнопку График и в открывшейся панели кнопку  (двухмерный график);

- в появившемся шаблоне двухмерного графика, представляющем собой пустой прямоугольник с метками данных, в центральную метку данных по оси абсцисс (ось *X*) ввести имя переменной, а на месте центральной метки данных по оси ординат (ось *Y*) ввести имя функции (рис. 2.1);
- щелкнуть мышью вне шаблона графика — график функции будет построен.

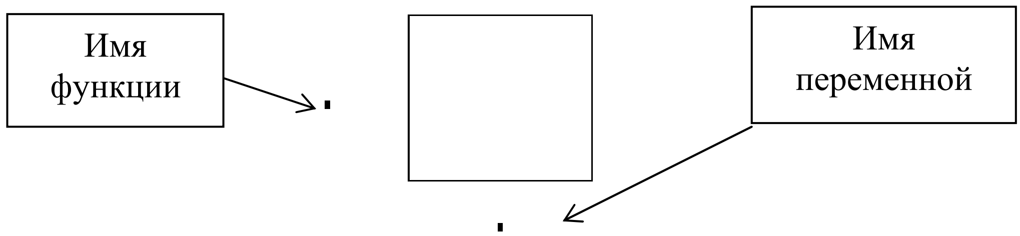


Рис. 2.1. Шаблон двухмерного графика

Диапазон изменения аргумента состоит из 3-х значений: начальное, второе и конечное.

Пусть необходимо построить график функции на интервале [–2; 2] с шагом 0,2. Значения переменной *x* задаются в виде диапазона следующим образом:

$$x := -2, -1.8 \,..\, 2,$$

где –2 — начальное значение диапазона;

–1.8 — второе значение диапазона (1,8 = –2 + 0,2 — начальное значение плюс шаг);

2 — конечное значение диапазона.

Внимание. Многоточие вводится нажатием точки с запятой в английской раскладке клавиатуры.

П р и м е р. Построение графика функции $y = x^2$ на интервале [–5; 5] с шагом 0,1 (рис. 2.2).

$$x := -5, -4.9 \,..\, 5$$

$$y(x) := x^2$$

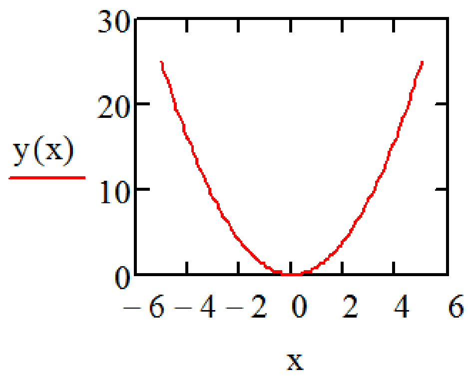


Рис. 2.2. Построение графика функции $y = x^2$

При построении графиков необходимо учитывать следующее:

- если диапазон значений аргумента не задан, то по умолчанию график строится в диапазоне [–10; 10];
- если в одном шаблоне необходимо разместить несколько графиков, то имена функций указываются через запятую;
- если две функции имеют различные аргументы, например $f_1(x)$ и $f_2(y)$, то на оси ординат (Y) через запятую указываются имена функций, а по оси абсцисс (X) — имена обеих переменных тоже через запятую;
- крайние метки данных на шаблоне графика служат для указания предельных значений абсцисс и ординат, т.е. они задают масштаб графика. Если оставить эти метки незаполненными, то масштаб будет установлен автоматически. Автоматический масштаб не всегда отражает график в нужном виде, поэтому предельные значения абсцисс и ординат приходится редактировать, изменяя вручную.

Примечание. Если после построения график не принимает нужный вид, можно:

– уменьшить шаг;

– изменить интервал построения графика;

– уменьшить на графике предельные значения абсцисс и ординат.

Пример. Построение окружности с центром в точке (2; 3) и радиусом $R = 6$.

Уравнение окружности с центром в точке с координатами (x_0; y_0) и радиусом R записывается в виде

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2.$$

Выразим из этого уравнения y:

$$\left(y - y_0\right)^2 = R^2 - \left(x - x_0\right)^2;$$

$$y - y_0 = \pm\sqrt{R^2 - \left(x - x_0\right)^2};$$

$$y = \pm\sqrt{R^2 - \left(x - x_0\right)^2} + y_0.$$

Таким образом, для построения окружности необходимо задать две функции: верхнюю и нижнюю полуокружности. Диапазон значений аргумента вычисляется следующим образом:

– начальное значение диапазона = $x_0 - R$;

– конечное значение диапазона = $x_0 + R$;

– шаг лучше взять равным 0,1 (рис. 2.3.).

$$x := -4, -3.9 .. 10$$

$$y1(x) := \sqrt{36 - (x-2)^2} + 3$$

$$y2(x) := -\sqrt{36 - (x-2)^2} + 3$$

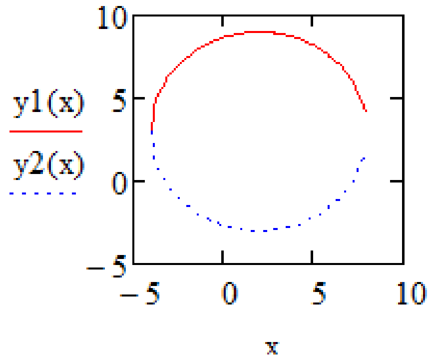


Рис. 2.3. Построение окружности

Задания для самостоятельной работы

Построить графики элементарных функций. Пределы изменения значений аргумента x задать самостоятельно.

1) $y = exp(-0{,}1 - x)$;
2) $y = \dfrac{x+3}{x-2}$;
3) $y = 4\sin(3x - \pi/3)$;
4) $y = 2x^3 - 2x^2 - 3x + 5$;
5) $y = 3x^4 + 2x^2 + 1$;
6) $y = \dfrac{\log(x+2)}{4}$;
7) $y = 2\cos(x - 4)$;
8) $y = 4x^4 - 14x^2 - 3$;
9) $y = x^3 + 2x^2 + x$;
10) $y = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 1}$;
11) $y = \tan(\pi/4 - x)$;
12) $y = x^2 - 10x + 21$.

2.1.1. Параметрический график функции

Иногда бывает удобнее вместо уравнения линии, связывающего прямоугольные координаты x и y, рассматривать так называемые параметрические уравнения линии, дающие выражения текущих координат x и y в виде функций от некоторой переменной величины t (параметра): $x(t)$ и $y(t)$. При построении параметрического графика на осях ординат и абсцисс указываются имена функций одного аргумента.

Пример. Построение окружности с центром в точке с координатами (2,3) и радиусом R = 6. Для построения используется параметрическое уравнение окружности $x = x_0 + R\cos(t)$, $y = y_0 + R\sin(t)$ (рис. 2.4.).

$t := 0, 0.01 .. 2\pi$

$x(t) := 2 + 6 \cdot \cos(t)$

$y(t) := 3 + 6 \cdot \sin(t)$

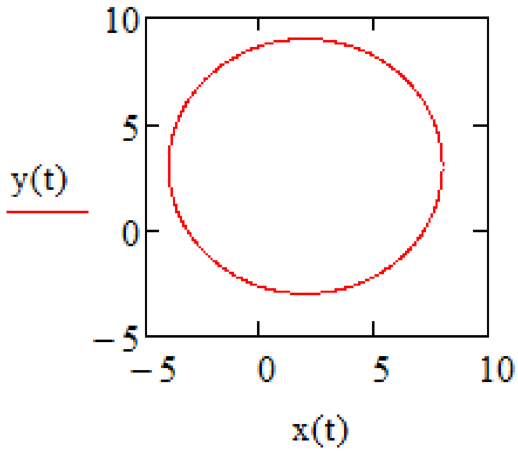


Рис. 2.4. Построение окружности

Задания для самостоятельной работы

Построить графики функций, заданных параметрически:

1) $x = t^2$, $y = 2t$ (парабола);

2) $x = t - \sin(t)$, $y = (1 - \cos(t))$ (циклоида);

3) $x = 5(\cos(t))^2 + 2\cos(t)$, $y = 5\cos(t)\sin(t) + 2\sin(t)$ (улитка Паскаля).

2.1.2. Форматирование графиков

Чтобы отформатировать график, необходимо дважды щелкнуть по области графика. Откроется диалоговое окно форматирования графика. Ниже перечислены вкладки окна форматирования графика:

■ **Оси X, У** — форматирование осей координат.

Установив нужные флажки, можно:

Логарифмический маштаб	—	представить численные значения на осях в логарифмическом масштабе (по умолчанию численные значения наносятся в линейном масштабе);
Линии сетки	—	нанести сетку линий;
Нумерация	—	расставить числа по координатным осям;

Автомаштабирование	—	автоматический выбор предельных численных значений на осях (если этот флажок снят, предельными будут максимальные вычисленные значения);
Показывать метки	—	нанесение меток на график в виде горизонтальных или вертикальных пунктирных линий, соответствующих указанному значению на оси, причем сами значения выводятся в конце линий (на каждой оси появляются 2 места ввода, в которые можно ввести численные значения, не вводить ничего, ввести одно число или буквенные обозначения констант);
Автосетка	—	автоматический выбор числа линий сетки (если этот флажок снят, надо задать число линий в поле Number of Grids);
По центру	—	ось абсцисс проходит через нуль ординаты;

■ **Трассировка** — форматирование линии графиков функций.

Для каждого графика в отдельности можно изменить:

- символ на графике для узловых точек (кружок, крестик, прямоугольник, ромб);
- вид линии (сплошная, пунктир, штрихи, штрих-пунктир);
- цвет линии;
- тип графика (линия, точки, столбики, ступенчатый график и т.д.);
- толщину линии ().

■ **Подписи** — заголовок в области графика. В поле Заголовок можно записать текст заголовка, выбрать его положение — вверху или внизу графика. Можно вписать, если надо, названия осей.

■ **По умолчанию** — с помощью этой вкладки можно вернуться к виду графика, принятому по умолчанию, либо сделанные вами изменения на графике использовать по умолчанию для всех графиков данного документа.

П р и м е р. На рисунке 2.5 приведен пример форматирования графиков:

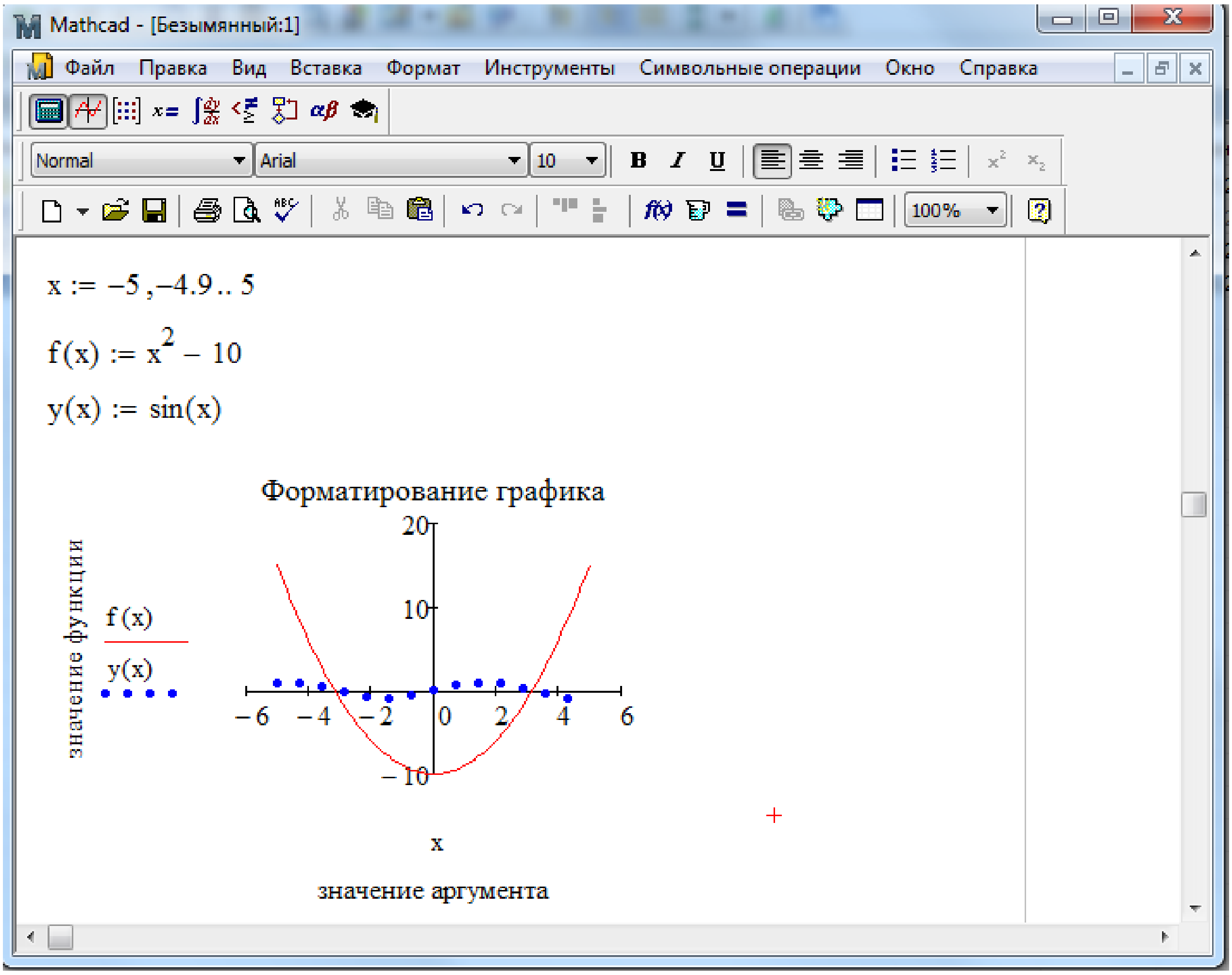
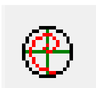


Рис. 2.5. Пример форматирования графиков

З а д а н и е. Вернитесь к построенным графикам. На всех графиках проведите ось абсцисс через нуль ординаты, измените вид, цвет, тип и толщину линий, введите заголовки для графиков.

2.2. Построение полярных графиков

Для построения полярного графика функции необходимо:

- задать диапазон значений аргумента;
- задать функцию;
- установить курсор в то место, где должен быть построен график, на панели *Математика* выбрать кнопку График и в открывшейся панели кнопку  (полярный график);
- в местах ввода появившегося шаблона необходимо ввести угловой аргумент функции (внизу) и имя функции (слева).

П р и м е р. Построение лемнискаты Бернулли: $\rho = \sqrt{2cos(2\varphi)}$ (рис. 2.6.).

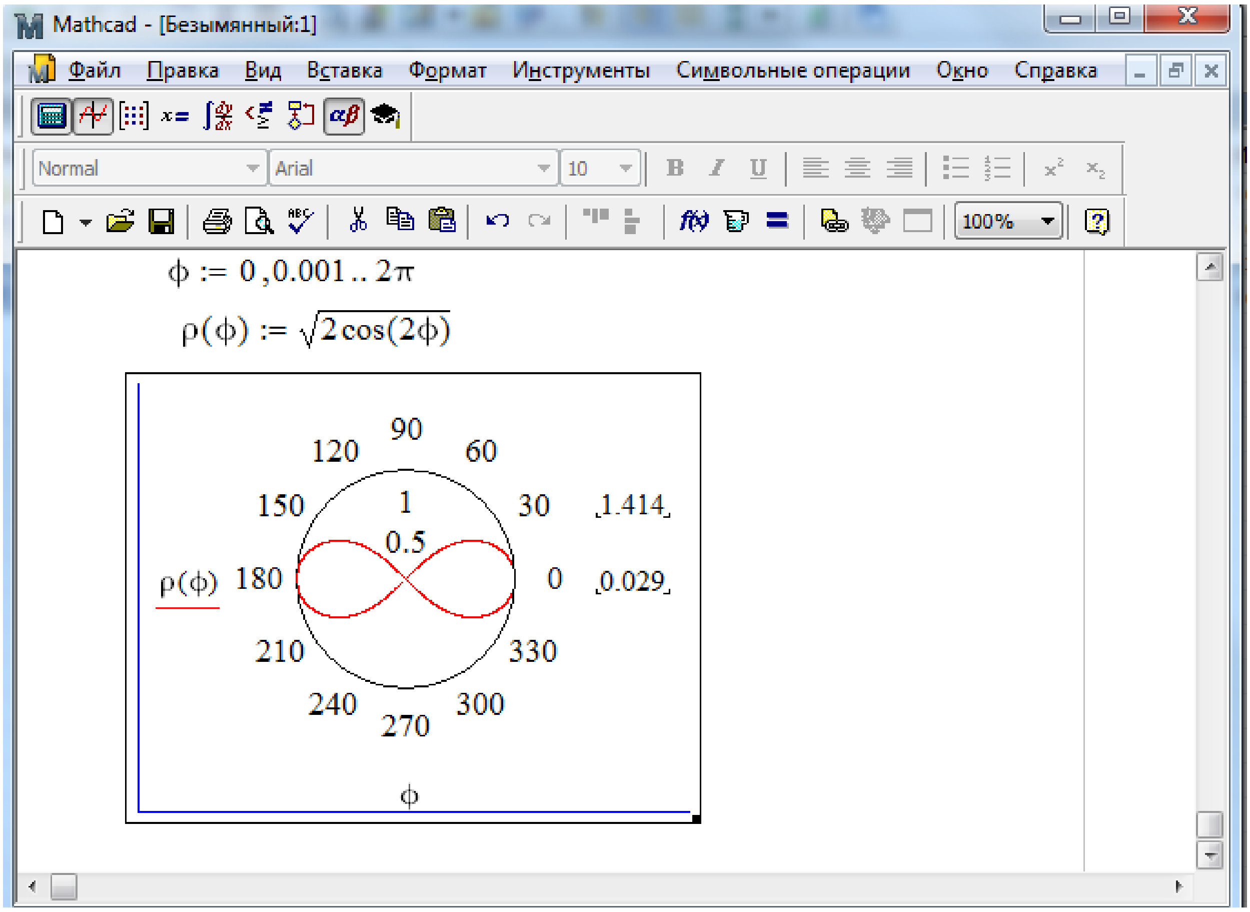


Рис. 2.6. Пример построения полярного графика

Задания для самостоятельной работы

Построить графики в полярной системе координат:

1) $\rho = 10\,cos(\varphi) + 5$ (улитка Паскаля);

2) $\rho = 5\sqrt{\varphi} + 2$ (параболическая спираль).

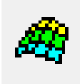
2.3. Построение графиков поверхностей (трехмерные или 3D-графики)

При построении трехмерных графиков используется панель График на панели *Математика*. Можно построить трехмерный график с помощью мастера, вызываемого из главного меню; можно построить график, создав матрицу значений функции двух переменных; можно задействовать ускоренный метод построения; Мы рассмотрим ускоренный метод построения трехмерного графика.

2.3.1. Быстрое построение графика

Для быстрого построения трехмерного графика функции необходимо:

- задать функцию;

• установить курсор в то место, где должен быть построен график, на панели *Математика* выбрать кнопку График и в открывшейся панели кнопку  (График поверхности);
• в единственное место шаблона введите имя функции (не указывая переменные);
• щелкнуть мышью вне шаблона графика — график функции будет построен.

Пример. Построение графика функции $z(x, y) = x^2 + y^2 - 30$ (рис. 2.7).

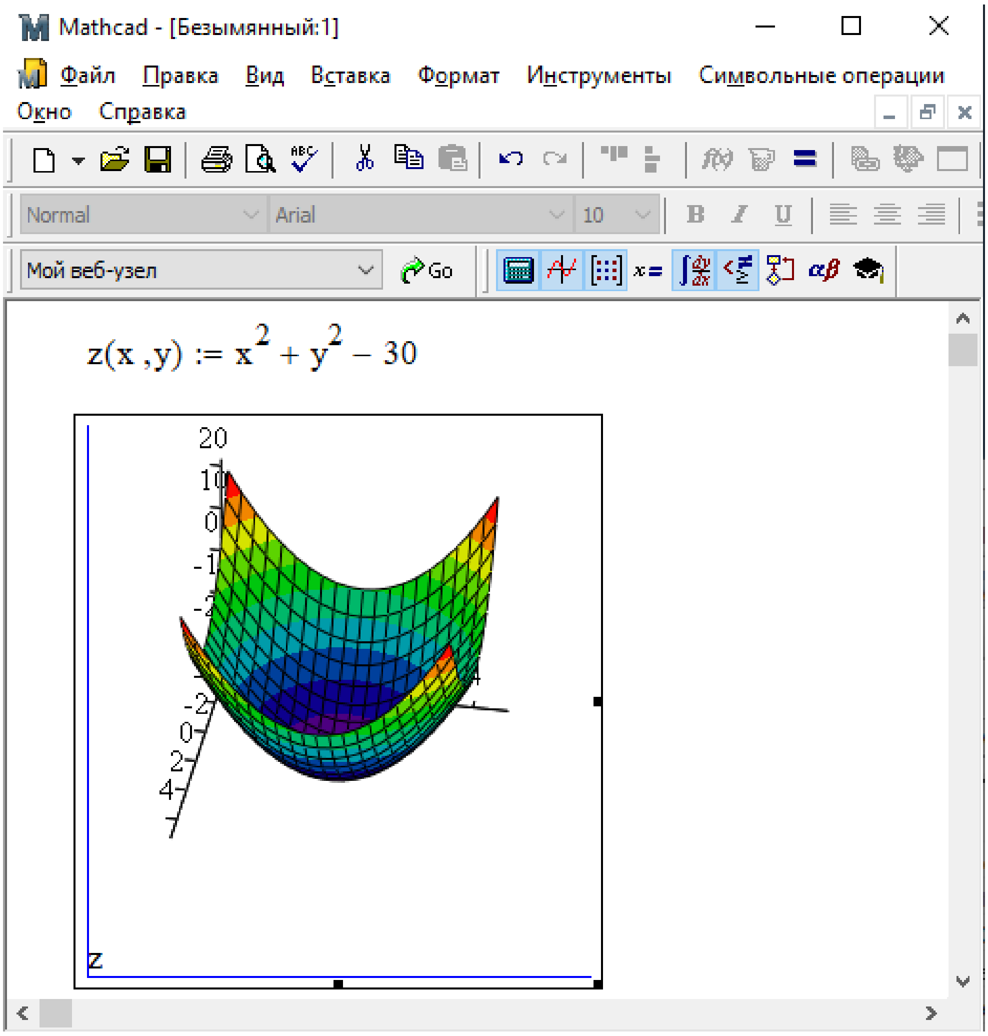


Рис. 2.7. Пример быстрого построения поверхностного графика

Построенным графиком можно управлять:
• вращение графика выполняется после наведения на него указателя мыши при нажатой левой кнопке мыши;
• масштабирование графика выполняется после наведения на него указателя мыши при одновременном нажатии левой кнопки мыши и клавиши Ctrl (если двигать мышь, график приближается или удаляется);

- анимация графика выполняется аналогично, но при нажатой дополнительно клавише Shift. Необходимо только начать вращение графика мышью, дальше анимация будет выполняться автоматически. Для остановки вращения следует щелкнуть левой кнопкой мыши внутри области графика.

Существует возможность построения сразу нескольких поверхностей на одном рисунке. Для этого необходимо задать обе функции и через запятую указать имена функций на шаблоне графика (рис. 2.8).

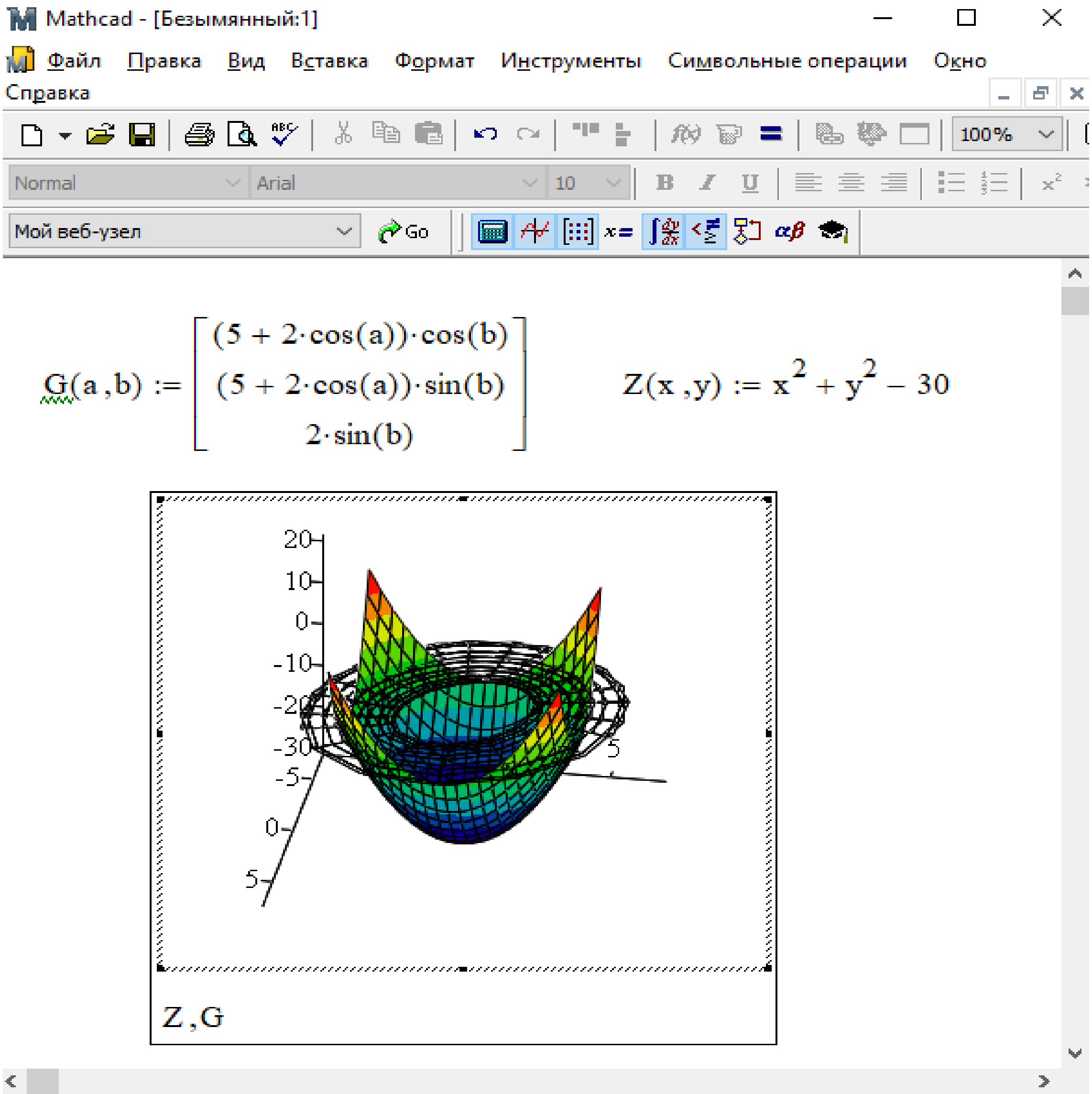


Рис. 2.8. Пример построения двух поверхностей на одном рисунке

При быстром построении графика по умолчанию выбираются значения обоих аргументов в пределах от –5 до +5 и число контурных линий, равное 20. Для изменения этих значений необходимо:

- дважды щелкнуть по графику;
- в открывшемся окне выбрать вкладку *Данные быстрого графика*;

- ввести новые значения в *области дискретных значений 1* — для первого аргумента и в *области дискретных значений 2* — для второго аргумента;
- в поле *Число сеток* изменить число линий сетки, покрывающих поверхность;
- щелкнуть на кнопке Ок.

Пример. Построение графика функции $z(x, y) = -\sin(x^2 + y^2)$ (рис. 2.9).

При построении этого графика пределы изменения значений обоих аргументов лучше выбрать от –2 до +2.

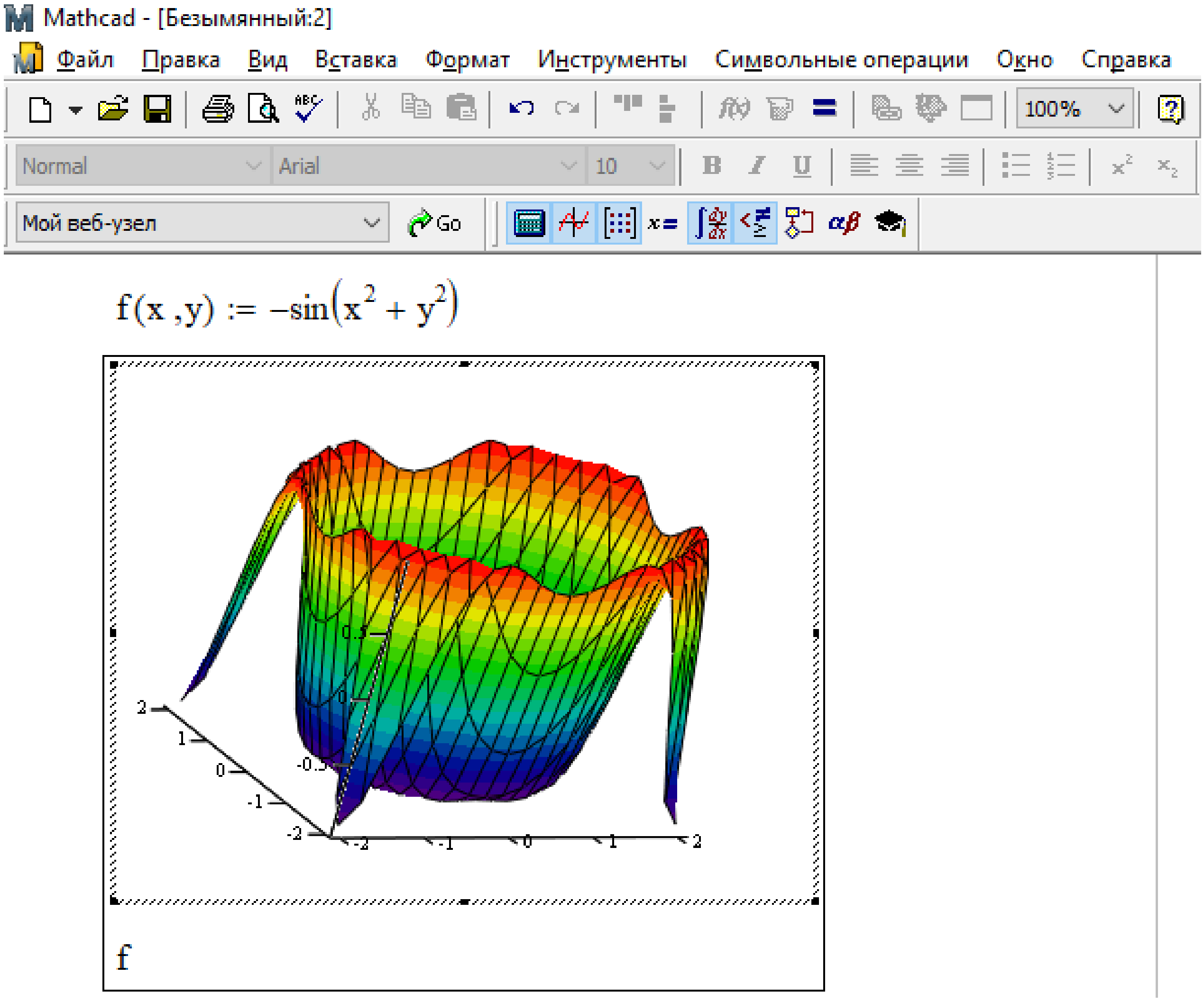


Рис. 2.9. Пример построения графика функции $z(x,y) = -\sin(x^2 + y^2)$

2.3.2. Форматирование трехмерных графиков

Для форматирования графика необходимо дважды щелкнуть по области построения — появится окно форматирования с несколькими вкладками: *Общие, Оси, Оформление, Подсветка, Заголовок, Задние планы, Специальная, Дополнительно, Данные быстрого графика*.

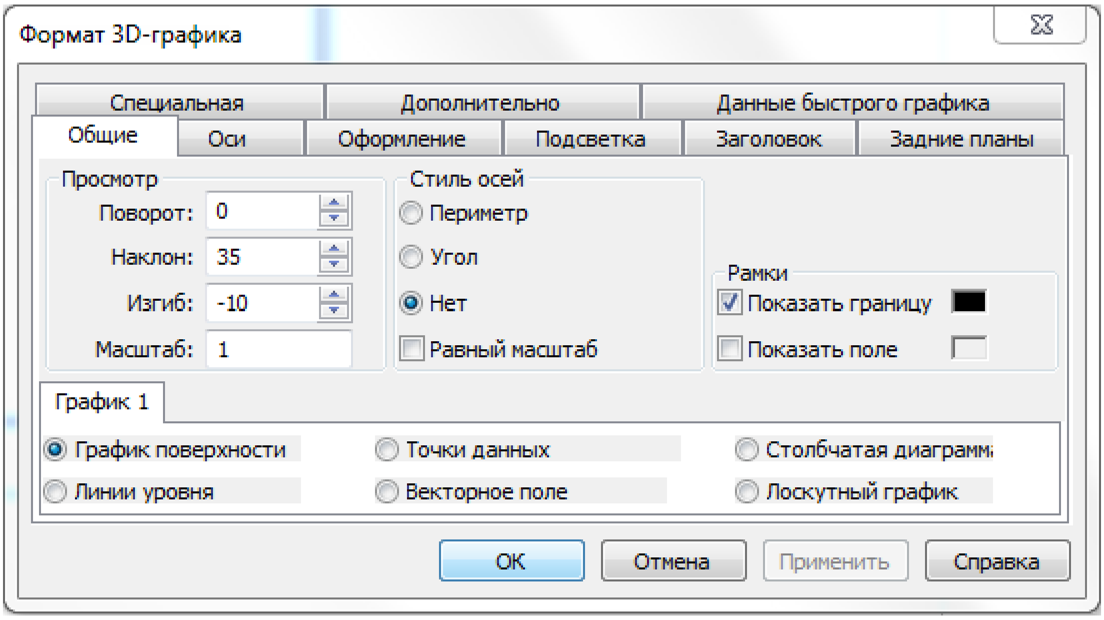


Рис. 2.10. Панель форматирования трехмерных графиков

Назначение вкладки *Данные быстрого графика* было рассмотрено выше.

Вкладка *Оформление* позволяет менять внешний вид графика, изменить параметры заливки, параметры линий и параметры точек.

Во вкладке *Общие* можно выбрать углы поворота изображенной поверхности вокруг всех трех осей; в группе *График 1* можно поменять тип графика.

Во вкладке *Подсветка* можно управлять освещением, установив флажок *Включить подсветку* и переключатель *Включить*. Одна из 8-ти возможных схем освещения выбирается в списке *Свет 1… Свет 8*.

Задания для самостоятельной работы

Построить трехмерные графики:

1) $f(x,y)=(x^2y^2)$. Для данного графика выбрать зеленую заливку, красные линии, схема освещения 4.

2) $f(x,y)=sin(x+y)$. Для данного графика изменить пределы изменения первого аргумента от 0 до 2.5, второго аргумента — от 0 до 1.4. Число контурных линий выбрать 10.

Вопросы для самоконтроля

1. Построение двухмерных графиков.
2. Построение графиков, заданных параметрически.
3. Форматирование графиков.
4. Построение графиков в полярной системе координат.
5. Способы построения трехмерных графиков.

3. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

В данном разделе мы узнаем, каким образом в системе MathCAD решаются простейшие уравнения вида $F(x) = 0$. Решить уравнение аналитически — значит найти все его корни, т.е. такие числа, при подстановке которых в исходное уравнение получим верное равенство. Решить уравнение графически — значит найти точки пересечения графика функции с осью OX.

3.1. Решение уравнений с помощью функции *root*(*f*(*x*),*x*)

Для решений уравнения с одним неизвестным вида $F(x) = 0$ существует специальная функция

root(f(x),x),

где $f(x)$ — выражение, равное нулю;

x — аргумент.

Эта функция возвращает с заданной точностью значение переменной, при котором выражение $f(x)$ равно 0.

Внимание. Если правая часть уравнения $\neq 0$, то необходимо привести его к нормальному виду (перенести все в левую часть).

Перед использованием функции *root* необходимо задать аргументу x начальное приближение. Если корней несколько, то для отыскания каждого корня необходимо задавать свое начальное приближение.

Внимание. Перед решением желательно построить график функции, чтобы проверить, есть ли корни (пересекает ли график ось Ox), и если есть, то сколько. Начальное приближение можно выбрать по графику поближе к точке пересечения.

Пример. Решение уравнения $x^3 = 15x$ с помощью функции *root* представлено на рисунке 3.1. Перед тем как приступить к решению в системе MathCAD, в уравнении все перенесем в левую часть. Уравнение примет вид: $x^3 - 15x = 0$.

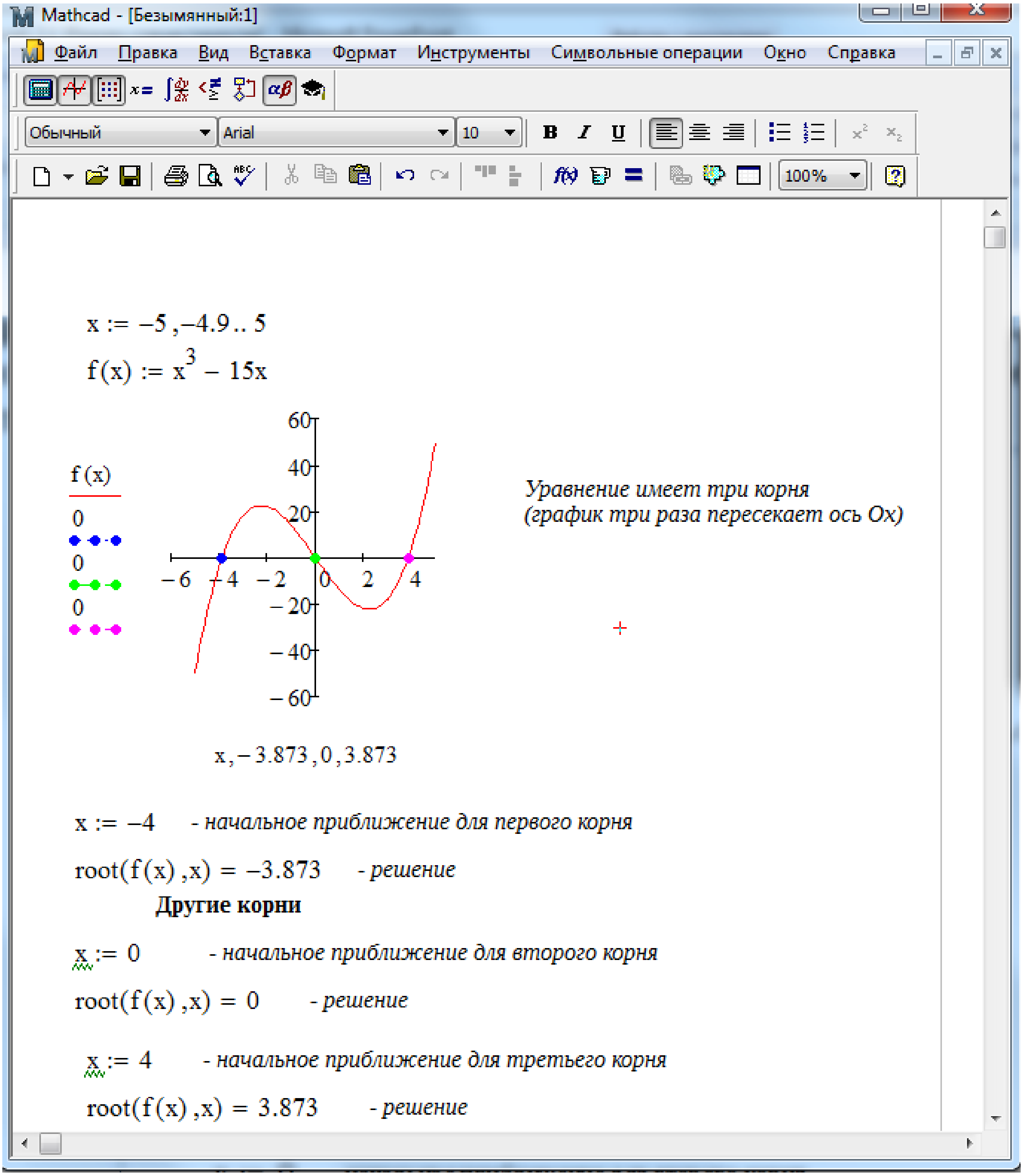


Рис. 3.1. Решение уравнения при помощи функции root

3.2. Решение уравнений с помощью функции Polyroots(v)

Для одновременного нахождения всех корней полинома используют функцию *Polyroots(v),* где *v* — вектор коэффициентов полинома, начиная со свободного члена. Нулевые коэффициенты опускать нельзя. В отличие от функции *root,* функция *Polyroots* не требует начального приближения.

П р и м е р. Решение уравнения $0{,}75x^3 - 8x + 5 = 0$ с помощью функции *Polyroots* представлено на рисунке 3.2.

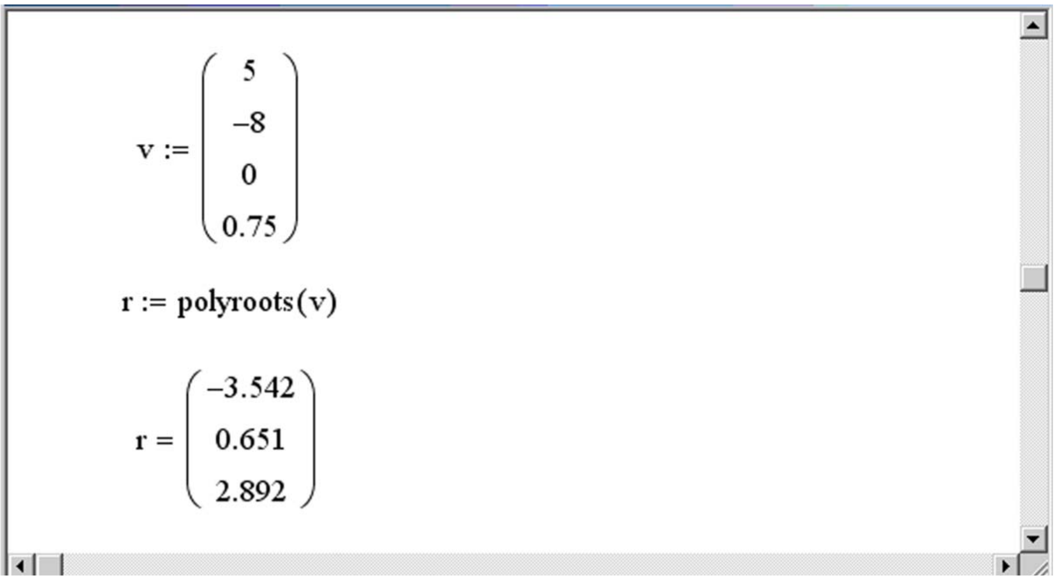


Рис. 3.2. Решение уравнения с помощью функции Polyroots

3.3. Решение уравнений с помощью функции Find(x)

Функция *Find* (Найти) работает в ключевой связке с ключевым словом *Given* (Дано). Конструкция *Given – Find* использует расчетную методику, основанную на поиске корня вблизи точки начального приближения, заданной пользователем.

Если задано уравнение $f(x) = 0$, то его можно решить следующим образом с помощью блока *Given – Find*:

– задать начальное приближение

$$x := x0;$$

– ввести служебное слово

Given;

– записать уравнение, используя знак *жирное равно*

$$f(x) = 0;$$

– написать функцию *Find* с неизвестной переменной в качестве параметра

$$Find(x) =$$

В результате после знака равно выведется найденный корень.

Если существует несколько корней, то их можно найти, меняя начальное приближение $x0$ на близкое к искомому корню.

Пример. Решение уравнения $x^2 + 8 = e^x$ с помощью функции *Find* представлено на рисунке 3.3.

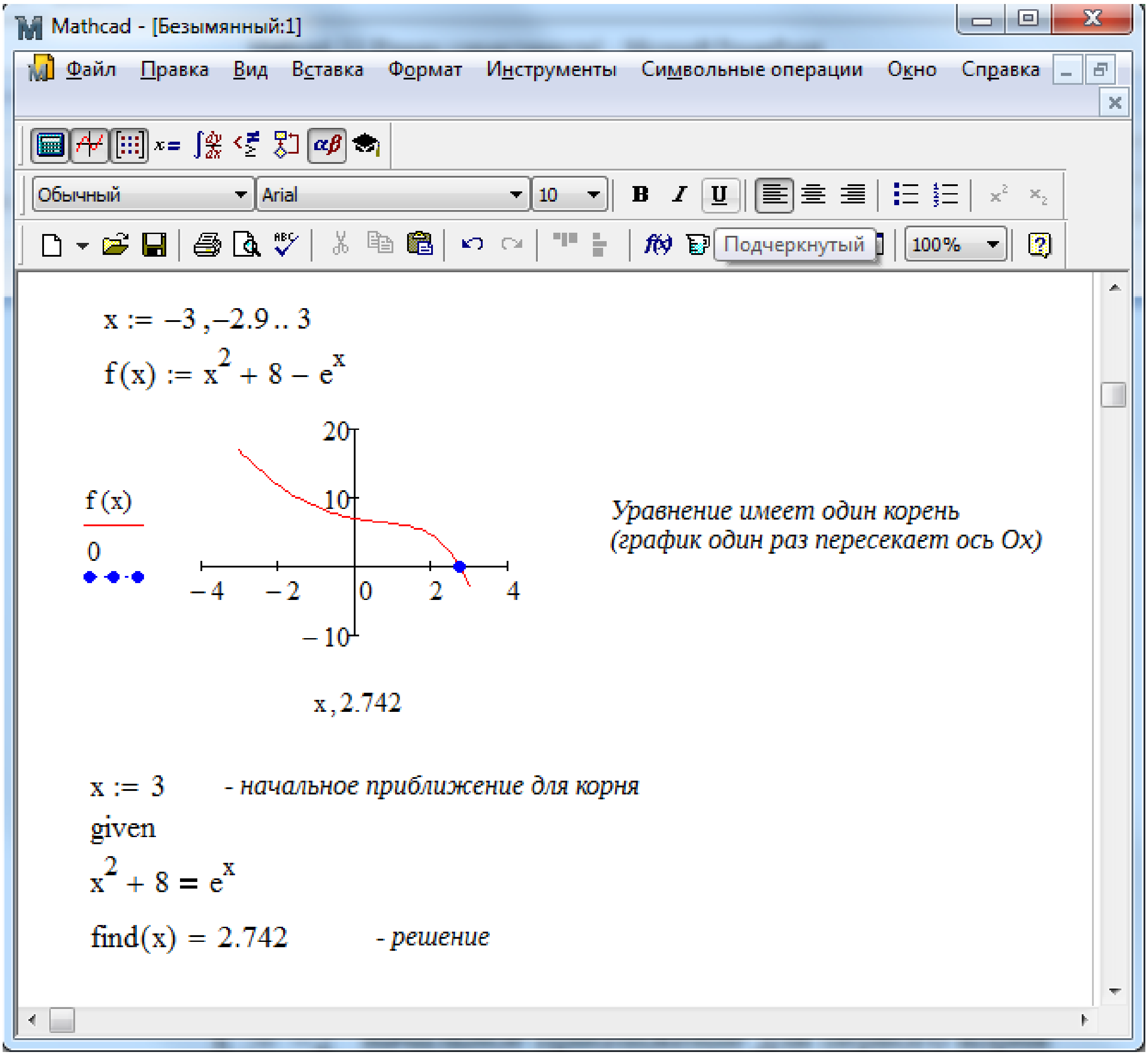


Рис. 3.3. Решение уравнения с помощью функции *Find*

Иногда возникает необходимость отметить на графике какие-либо точки (например, точки пересечения функции с осью *Ox*). Для этого необходимо:

- указать значение x данной точки (по оси *Ox*) и значение функции в этой точке (по оси *Oy*);
- дважды щелкнуть по графику и в окне форматирования во вкладке *Трассировка* для соответствующей линии выбрать *Символ* — ●.

Пример. На графике отмечена точка пересечения функции $f(x) = x^2 + 8 - e^x$ с осью *Ox*. Координата x этой точки была найдена в предыдущем примере: $x = 2{,}742$ (корень уравнения $x^2 + 8 - e^x = 0$) (рис. 3.4).

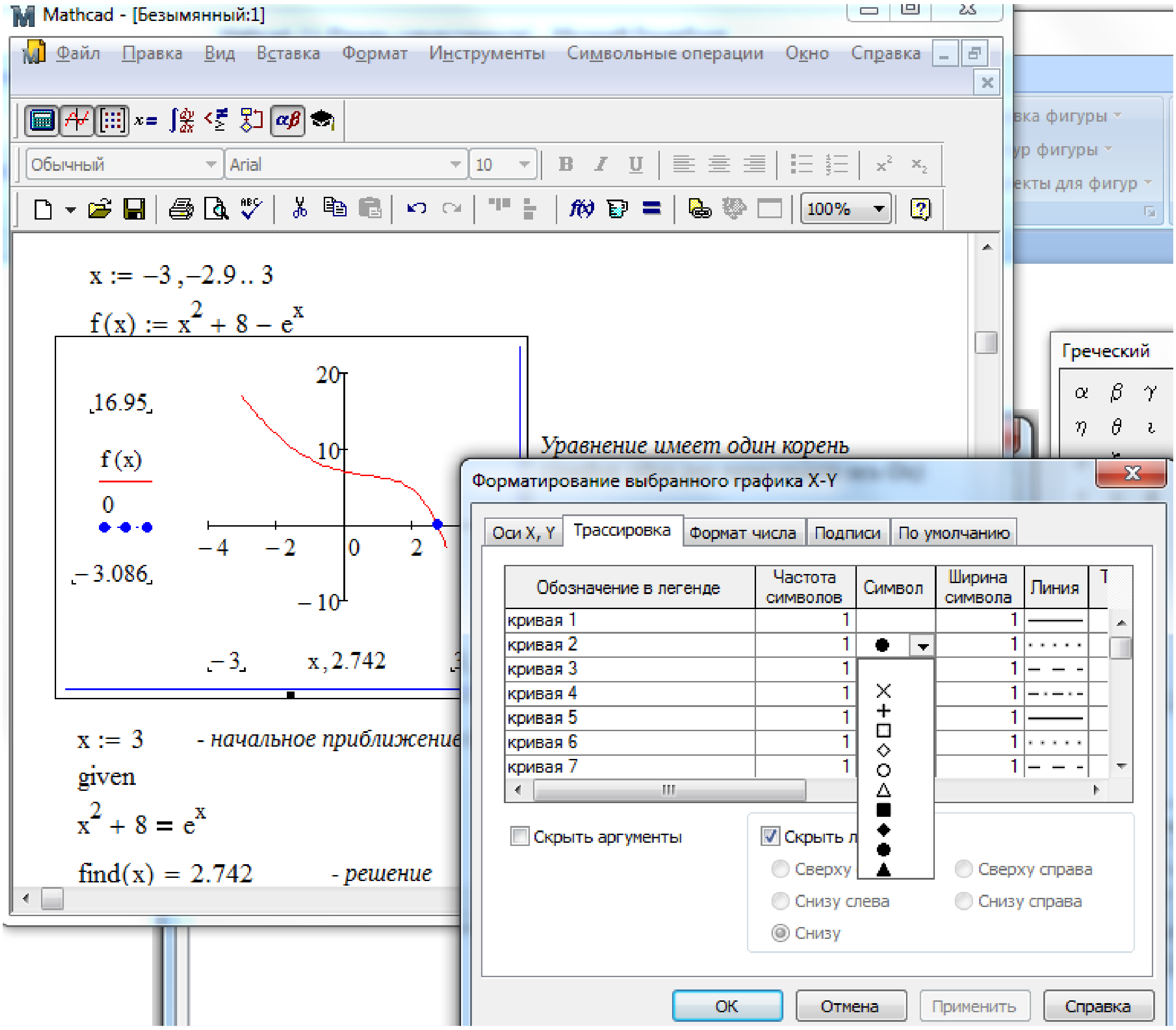


Рис. 3.4. График функции $f(x)=x^2+8-e^x$ с отмеченной точкой пересечения

Задания для самостоятельной работы

Решить каждое уравнение всеми тремя способами, рассмотренными выше, на графиках отметить найденные точки пересечения с осью *Ox*:

1) $2x^3-2x^2-3x+5=0$;
2) $x^4-10x^3+35x^2-50x-96=0$;
3) $x^2-10x+21=0$;
4) $2x^3-3x^2+2x-3=0$;
5) $4x^4-14x^2-3=0$;
6) $4x^2-12x-24=0$;
7) $x^4+0.5x^3-0.51=0$;
8) $3x^2-25x+1=0$;
9) $x^2+3x+2=0$;
10) $5x^3+10x^2+5x-1=0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Алгоритм решения уравнений с помощью функции *root.*
2. Особенности использования функции *Polyroots.*
3. Алгоритм решения уравнений с помощью вычислительного блока *Given – Find.*

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

4.1. Решение систем линейных уравнений

Систему линейных уравнений можно решить *матричным методом* (или через обратную матрицу, или используя функцию *lsolve*(A,B)) и с использованием двух функций *Find* и функции *Minerr*.

4.1.1. Матричный метод

Пример. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x1 + 4x2 = 5 \\ 5x1 + 4x2 = 3 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений матричным методом представлено на рисунке 4.1.

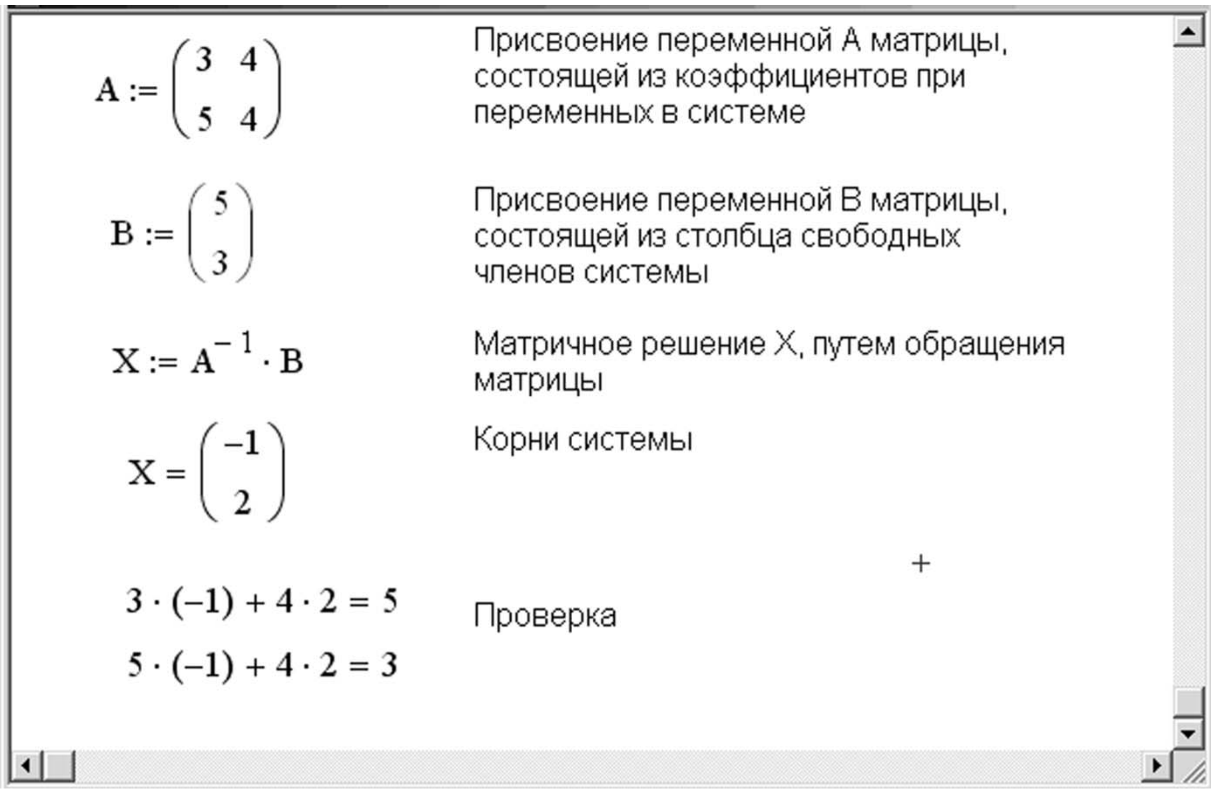


Рис. 4.1. Решение системы линейных уравнений матричным методом

4.1.2. Использование функции lsolve(A,B)

Lsolve(*A*,*B*) — это встроенная функция, которая возвращает вектор X для системы линейных уравнений $A \cdot X = B$ при заданной матрице коэффициентов A и векторе свободных членов B.

Пример. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 1,2357x_1 + 2,1742x_2 - 5,4834x_3 = 1 \\ 6,0696x_1 - 6,2163x_2 - 4,6921x_3 = 1 \\ 3,4873x_1 + 6,1365x_2 - 4,7483x_3 = 1 \end{cases}.$$

Способ решения данной системы с использованием функции *lsolve*(*A*,*B*) приведен на рисунке 4.2.

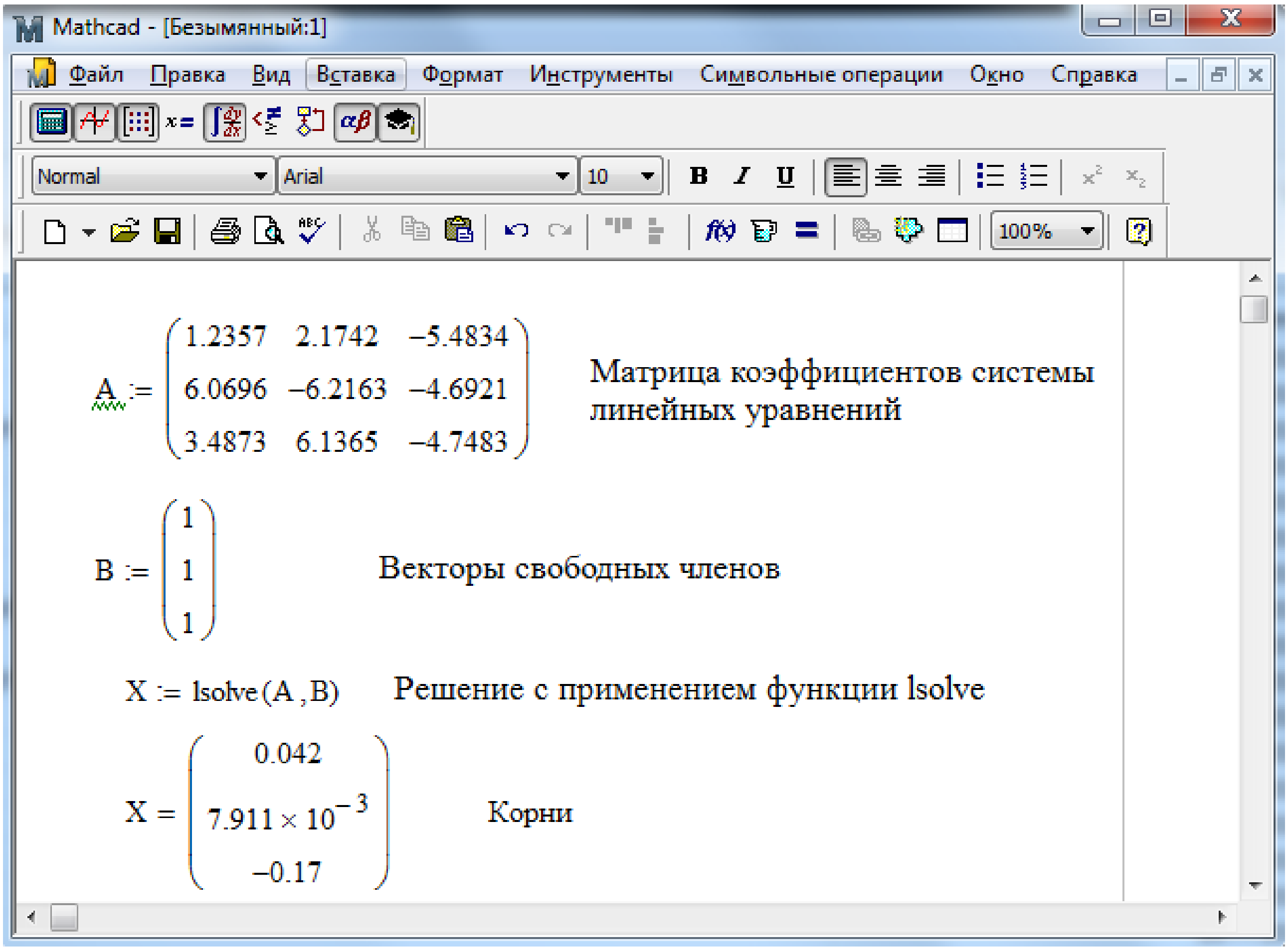


Рис. 4.2. Решение системы линейных уравнений с использованием функции *lsolve*

4.1.3. Решение системы линейных уравнений с помощью функции Find

При данном методе уравнения вводятся без использования матриц, т.е. в «натуральном виде». Предварительно необходимо указать начальные приближения неизвестных переменных. Это могут быть любые числа, входящие в область определения. Часто за них принимают столбец свободных членов.

Для того чтобы решить систему линейных уравнений с помощью вычислительного блока *Given – Find*, необходимо:

– задать начальные приближения для всех переменных;
– ввести служебное слово *Given*;
– записать систему уравнений, используя знак жирное равно =;
– написать функцию *Find*, перечислив неизвестные переменные в качестве параметров функции.

В результате расчетов выведется вектор решения системы.

П р и м е р. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Решение данной системы с помощью вычислительного блока *Given – Find* приведено на рисунке 4.3.

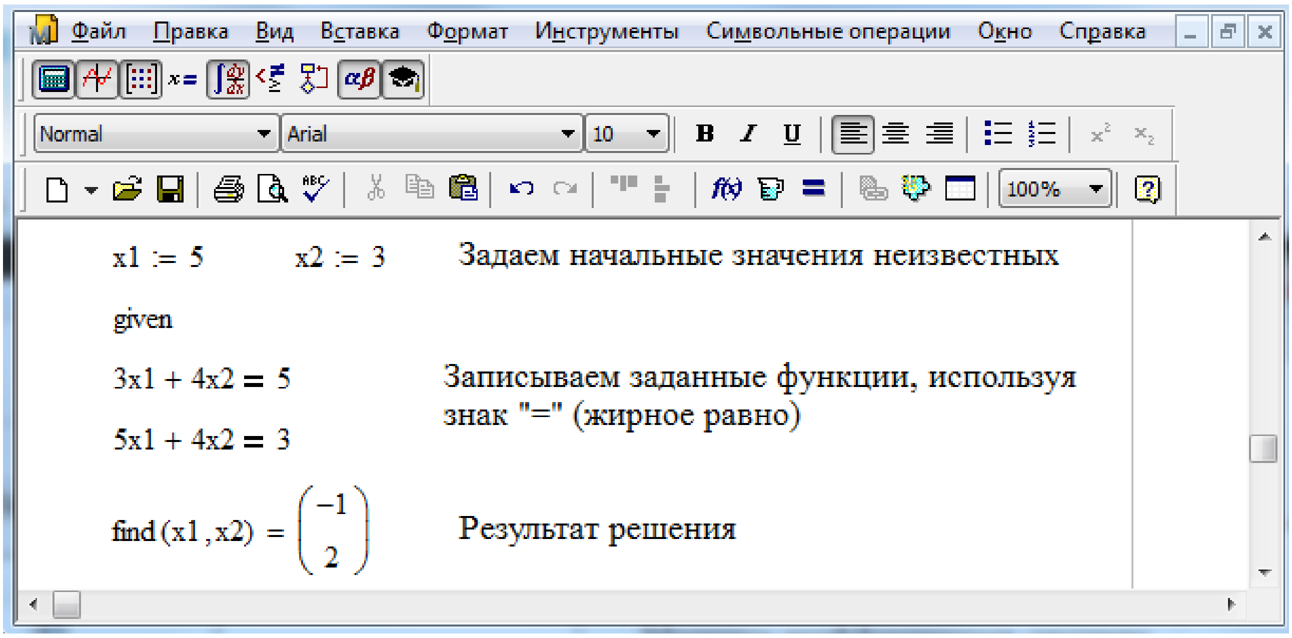


Рис. 4.3. Решение системы линейных уравнений с помощью функции Find

MathCAD позволяет решать системы линейных уравнений с помощью функции *Find* не только в скалярной, но и в матричной форме, при этом начальные приближения задаются в виде вектора.

П р и м е р. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Решение данной системы в матричной форме с помощью вычислительного блока *Given – Find* приведено на рисунке 4.4.

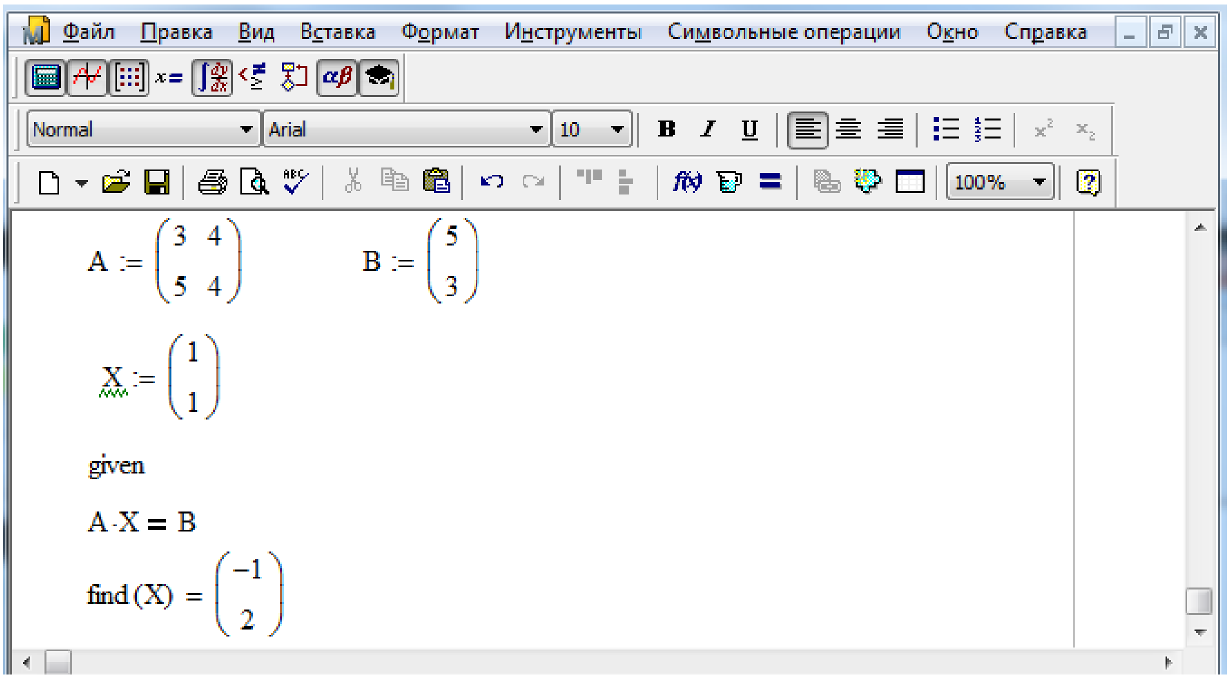


Рис. 4.4. Решение системы линейных уравнений с помощью функции *Find* в матричной форме

Задания для самостоятельной работы

Решить системы линейных уравнений разными способами:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ 4x + 2y - 5z = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -47x_1 + 47x_2 + 22x_3 + 31x_4 = 38 \\ -49x_1 + x_2 + 16x_3 - 57x_4 = 23 \\ 54x_1 + 53x_2 - 5x_3 + 41x_4 = 55 \\ 40x_1 + 47x_2 - 33x_3 - 59x_4 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -29x_1 - 26x_2 + 30x_3 = 12 \\ -151x_1 - 50x_2 - 49x_3 = 10 \\ 31x_1 + 40x_2 - 48x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -13x_1 - 54x_2 + 12x_3 + 7x_4 = 19 \\ -25x_1 - 34x_2 - 46x_3 + 55x_4 = 40 \\ 58x_1 + 24x_2 - 45x_3 + 6x_4 = 1 \\ 44x_1 - 7x_2 - 56x_3 - 45x_4 = 59 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

6) $\begin{cases} -29x_1 - 26x_2 + 30x_3 + 18x_4 = 12 \\ -151x_1 - 50x_2 - 49x_3 - 45x_4 = 10 \\ 31x_1 + 40x_2 - 48x_3 - 58x_4 = 1 \\ 11x_1 - 41x_2 - 57x_3 - 44x_4 = 19 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x + 2y - z = 2 \\ 4x - y + 3z = -3 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 12x_1 - 7x_3 + 43x_4 = 26 \\ 6x_1 + 33x_2 + 20x_3 - 24x_4 = 51 \\ -50x_1 + 43x_2 + 51x_3 + 1x_4 = 40 \\ 40x_1 + 47x_2 - 33x_3 - 59x_4 = 4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 7 \\ 4x - 3y - z = 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 12x_1 + 0x_2 - 7x_3 + 43x_4 = 26 \\ 6x_1 + 33x_2 + 20x_3 - 24x_4 = 51 \\ -50x_1 + 43x_2 + 51x_3 + 1x_4 = 40 \\ 40x_1 + 47x_2 - 33x_3 - 59x_4 = 4 \end{cases}$

4.2. Решение систем нелинейных уравнений

Системы нелинейных уравнений в MathCAD решаются с помощью вычислительного блока *Given – Find*.

Конструкция *Given – Find* использует расчетную методику, основанную на поиске корня вблизи точки начального приближения, заданной пользователем.

Для решения системы уравнений с помощью блока *Given – Find* необходимо:

1) задать начальные приближения для всех переменных;
2) ввести служебное слово *Given*;
3) записать систему уравнений, используя знак жирное равно =;
4) написать функцию *Find*, перечислив неизвестные переменные в качестве параметров функции.

В результате расчетов выведется вектор решения системы.

Если система имеет несколько решений, алгоритм следует повторить с другими начальными приближениями.

Примечание. Если решается система из двух уравнений с двумя неизвестными, перед решением желательно построить графики функций, чтобы проверить, есть ли корни у системы (пересекаются ли графики заданных функций), и если есть, то сколько. Начальное приближение можно выбрать по графику поближе к точке пересечения.

Пример. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 14 \\ y = 7x + 45 \end{cases}.$$

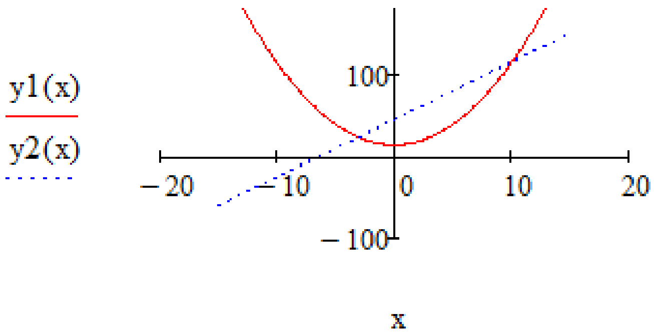
Перед решением системы построим графики функций: параболы (первое уравнение) и прямой (второе уравнение). Построение графика прямой и параболы в одной системе координат приведено на рисунке 4.5.

Прямая и парабола пересекаются в двух точках, значит, система имеет два решения. По графику выбираем начальные приближения неизвестных x и y для каждого решения. Нахождение корней системы уравнений представлено на рисунке 4.5.

$x := -15, -14.9 .. 15$ *интервал изменения переменной*

$y1(x) := x^2 + 14$

$y2(x) := 7x + 45$ *уравнения*



парабола и прямая пересекаются в двух точках

$x := -3$

$y := 30$

начально приближенные координаты первой точки пересечения

given

$y = x^2 + 14$

$y = 7x + 45$

$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \text{find}(x, y)$

$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.076 \\ 23.465 \end{pmatrix}$ *решение*

$x := 10$

$y := 110$

начально приближенные координаты второй точки пересечения

Given

$y = x^2 + 14$

$y = 7x + 45$

$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \text{find}(x, y)$

$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.076 \\ 115.535 \end{pmatrix}$ *решение*

Рис. 4.5. Построение графика двух функций в одной системе координат и нахождение корней системы нелинейных уравнений

Для того чтобы отметить на графике точки пересечения параболы и прямой, координаты точек, найденные при решении системы, введем по оси *Ox* (значения *x*) и по оси *Oy* (значения *y*) через запятую. В окне форматирования графика во вкладке *Трассировка* для *кривой 3* и *кривой 4* выбрать *Символ* — ●. (рис. 4.6).

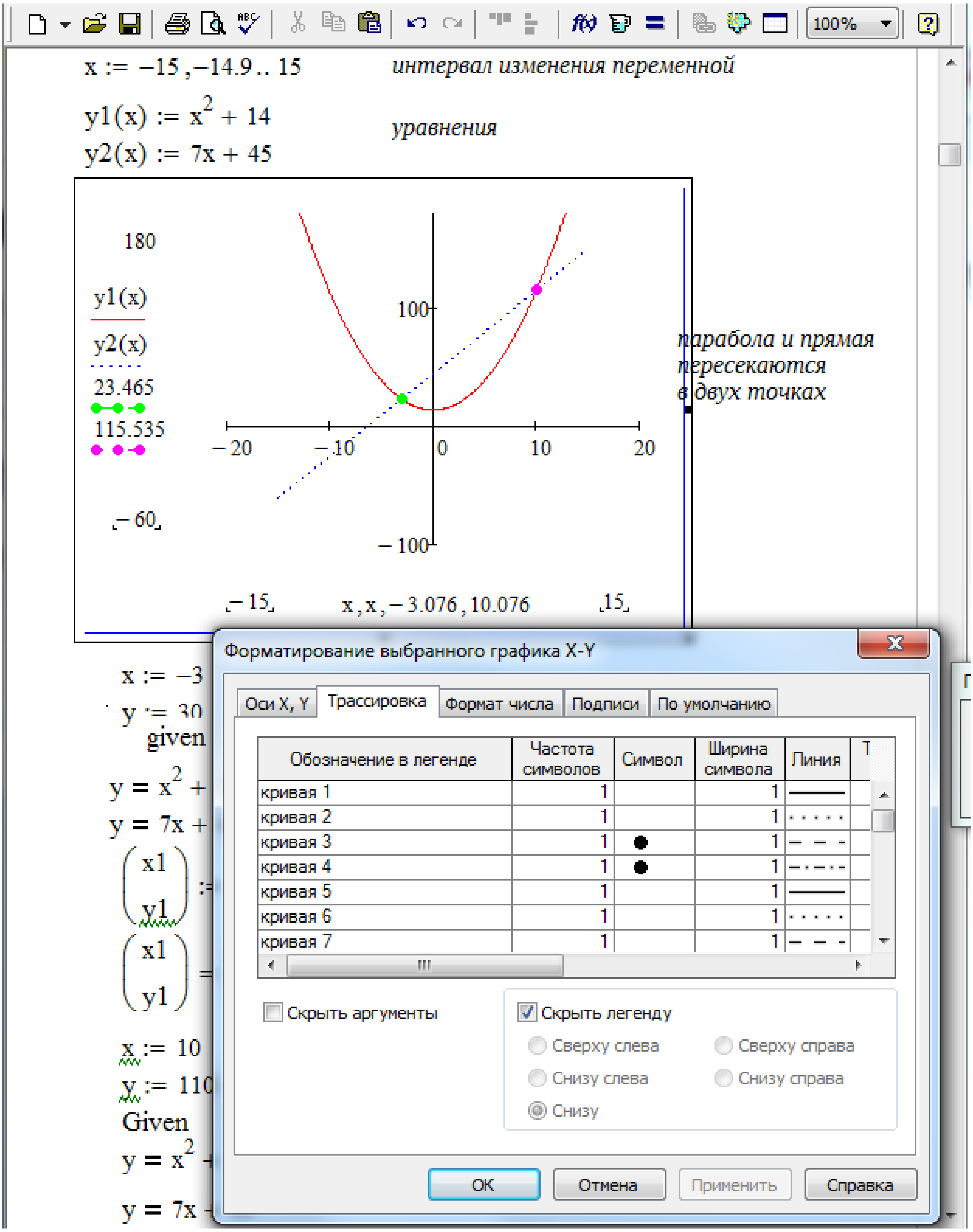


Рис. 4.6. Графики функций с отмеченными точками пересечения

Задания для самостоятельной работы

Решить систему нелинейных уравнений и построить графики функций в одной системе координат. Отметить на графике точки пересечения кривых.

1) $\begin{cases} y = 12 \cdot x^2+1 \\ y = 10 \cdot x+3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2 \cdot x+2 \\ y = 3 \cdot x^2-10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 11 \cdot x-3 \\ y = 12 \cdot x-7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = 12 \cdot x+10 \\ y = 8 \cdot x-6 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = 4 \cdot x+2 \\ y = 6 \cdot x^3-9 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = 2 \cdot x^2-6 \\ y = 6 \cdot x+5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = 11 \cdot x-9 \\ y = -6 \cdot x^2-3 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y = 11 \cdot x+6 \\ y = -3 \cdot x^2+9 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y = 9 \cdot x-10 \\ y = -4 \cdot x^2+3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = 2 \cdot x^3+1 \\ y = 1.5x^2 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{12x^2-5} \\ y = -6 \cdot x^2-3 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{8x+7} \\ y = (4 \cdot x^2+2)-10 \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Матричный метод решения системы линейных уравнений.
2. Решение системы линейных уравнений при помощи блока *Given – Find*.
3. Алгоритм решения системы нелинейных уравнений.

5. СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Кроме числовых расчетов, в MathCAD можно производить символьные вычисления.

Наиболее простым и часто используемым методом проведения символьных вычислений является применение символьного знака равенства (→). Для того чтобы произвести символьные вычисления с помощью этого знака, достаточно:

- ввести необходимое математическое выражение;
- ввести символьный знак равенства (→) (его можно выбрать на математической панели *Символьные* или ввести с клавиатуры нажатием клавиш Ctrl + . (точка)).

На экране появится результат символьного вычисления.

Таким образом, можно производить вычисление производной любого заданного порядка, определенного и неопределенного интеграла, суммы и произведения ряда, предела выражения.

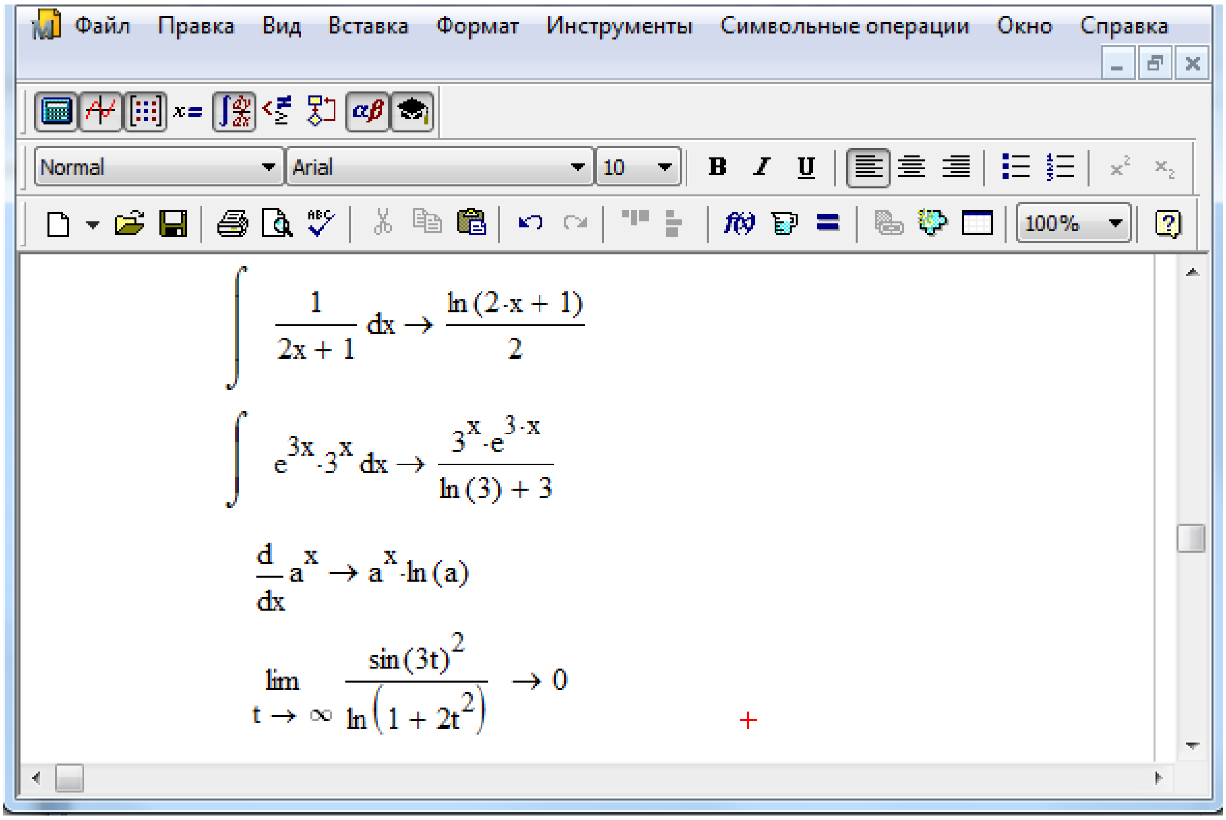


Рис. 5.1. Символьные вычисления производной, интеграла, пределов

Задания для самостоятельной работы

1. Самостоятельно проинтегрируйте и продифференцируйте функции:

1) $\tan(t)^2$; 2) $(\tan(t) + \cos(t))^2$; 3) $e^{3t}\,3^{t}$.

2. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

5.1. Упрощение выражений

Команда *Simplify* (Упростить) служит для алгебраических и тригонометрических упрощений выбранного выражения. Она выполняет арифметические преобразования, сокращает общие множители, использует основные тождества для тригонометрических и обратных функций, уменьшает степени.

Примеры использования команды *Simplify* (Упростить) приведены на рисунке 5.2.

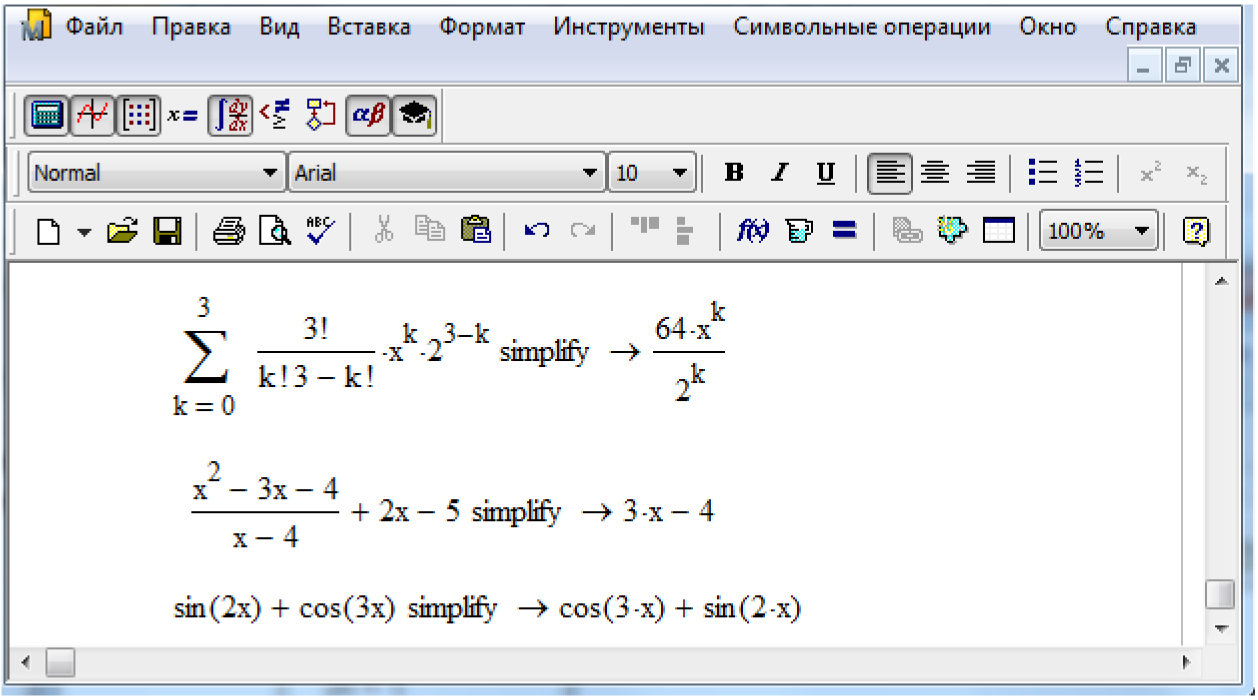


Рис. 5.2. Примеры упрощения выражений

Задания для самостоятельной работы

Упростите математические выражения:

1) $(a-2)(a^2+a-1)-a^2\,(a-1)$;
2) $(3-p)(9+3p+p^2)-(1-p^3)$.

5.2. Развертывание выражений

Операция символьного развертывания противоположна операции упрощения и выполняется с помощью команды *Expand* (Развернуть). В ходе разложения раскрываются все суммы и произведения, а сложные тригонометрические выражения разлагаются с помощью тригонометрических тождеств.

Примеры использования команды *Expand* (Развернуть) приведены на рисунке 5.3.

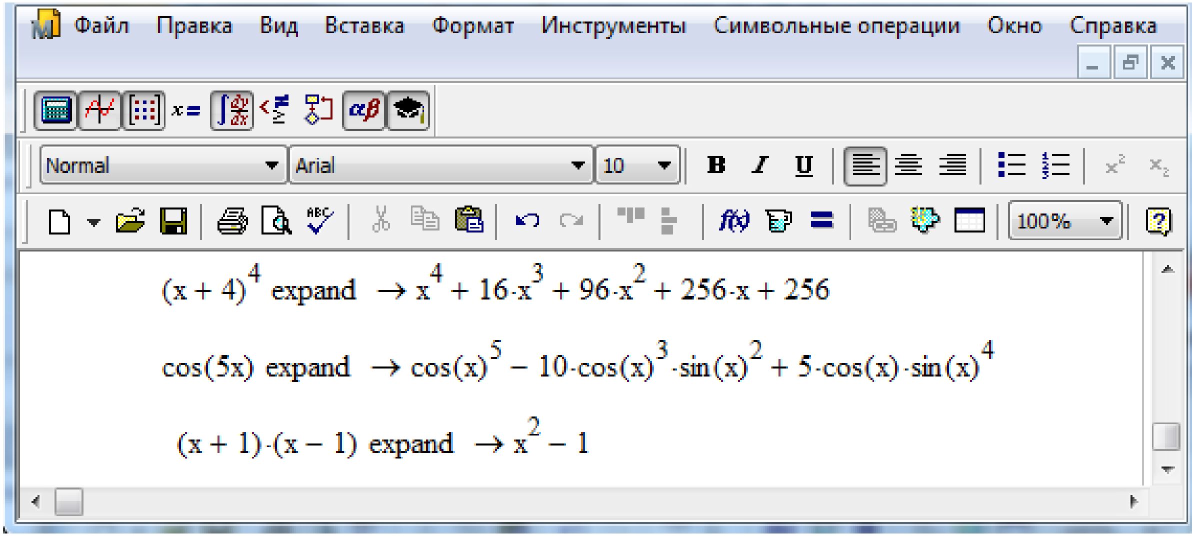


Рис. 5.3. Примеры развертывания выражений

Задания для самостоятельной работы

Представьте в виде многочлена:

1) $5y(y^2-3)(y^2+3)$; 2) $(a^4-3)(a^4+3)(a^8+9)$.

5.3. Разложение на множители

Команда *Factor* (Разложить на множители) позволяет представить полиномы как произведения более простых полиномов, а целые числа как простые сомножители. Команда объединяет сумму дробей в одну дробь и упрощает «многоэтажную» дробь с несколькими дробными частями.

Примеры разложения на множители приведены на рисунке 5.4.

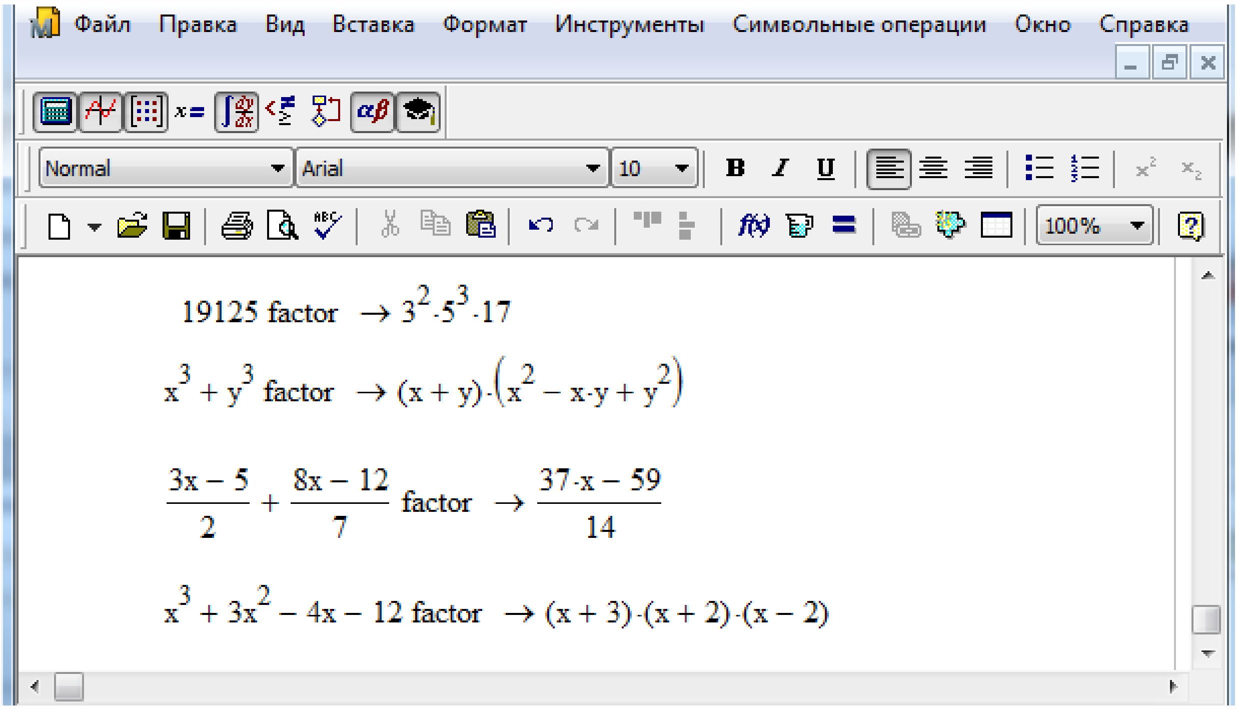


Рис. 5.4. Примеры разложения на множители

Задания для самостоятельной работы

Преобразуйте в произведение выражения:

1) $2y^3 - y^2 - 32y + 16$;

2) $x^2(x + 2y) - x - 2y$;

3) $2a^5y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$;

4) $\dfrac{\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{1}{3-x}}$

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите способы выполнения символьных операций в MathCAD.
2. В чем недостаток символьного знака равенства?
3. Перечислите основные команды меню Символика.
4. Что необходимо сделать перед применением команд меню *Символика.*

6. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ MATHCAD ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В данном разделе приведены примеры решения задач, для решения которых необходимо решить уравнение или систему уравнений.

6.1. Нахождение локальных экстремумов функций

Необходимое условие экстремума (максимума и/или минимума) непрерывной функции формулируется так: экстремумы могут иметь место только в тех точках, где производная или равна нулю, или не существует (в частности, обращается в бесконечность). Для нахождения экстремумов непрерывной функции сначала находят точки, удовлетворяющие необходимому условию, то есть находят все действительные корни уравнения $\frac{df(x)}{dx}=0$.

Если построен график функции, то можно сразу увидеть — максимум или минимум достигается в данной точке *x*. Если графика нет, то каждый из найденных корней исследуют одним из способов.

1-й способ. Сравнение знаков производной. Определяют знак производной $\frac{df(x)}{dx}$ в окрестности точки (в точках, отстоящих от экстремума функции по разные стороны на небольших расстояниях). Если знак производной при этом меняется от «+» к «–», то в данной точке функция имеет максимум. Если знак меняется от «–» к «+», то в данной точке функция имеет минимум. Если знак производной не меняется, то экстремумов не существует.

2-й способ. Вычисление второй производной. В этом случае вычисляется вторая производная $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ в точке экстремума. Если она меньше нуля, то в данной точке функция имеет максимум, если она больше нуля — то минимум.

П р и м е р. Нахождение экстремумов (минимумов/максимумов) функции $f(x)=0{,}15x^3-4x^2-122x+20$.

Сначала построим график функции (рис. 6.1).

Определим по графику начальные приближения значений *x*, соответствующих локальным экстремумам функции *f*(*x*). Найдем эти экстремумы, решив уравнение $\frac{df(x)}{dx}=0$. Для решения используем блок *Given – Find* (рис. 6.2.).

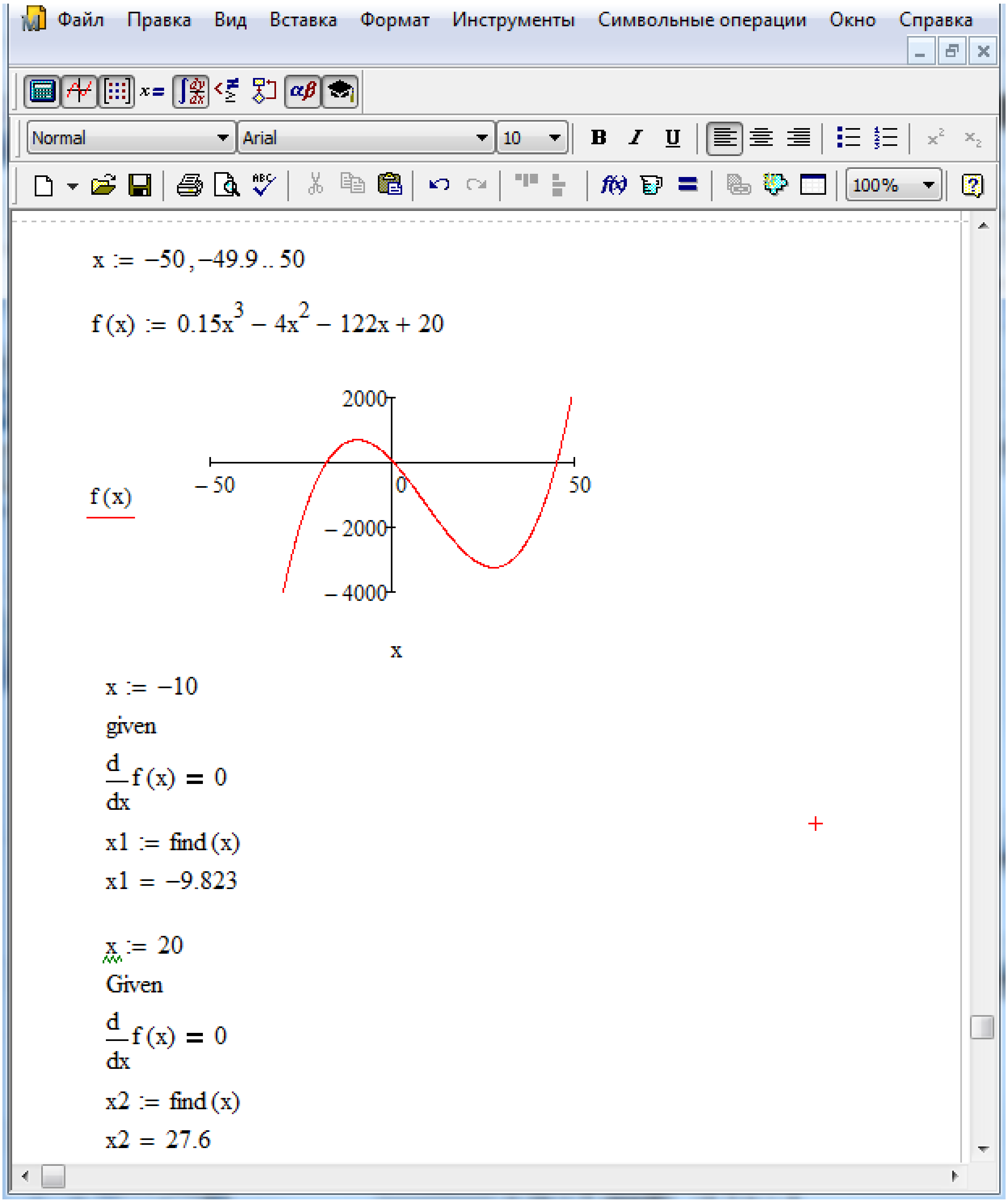


Рис. 6.1. Построение графика функции и нахождение локальных экстремумов

Определим вид экстремумов *первым способом*, исследуя изменение знака производной в окрестности найденных значений (рис. 6.2).

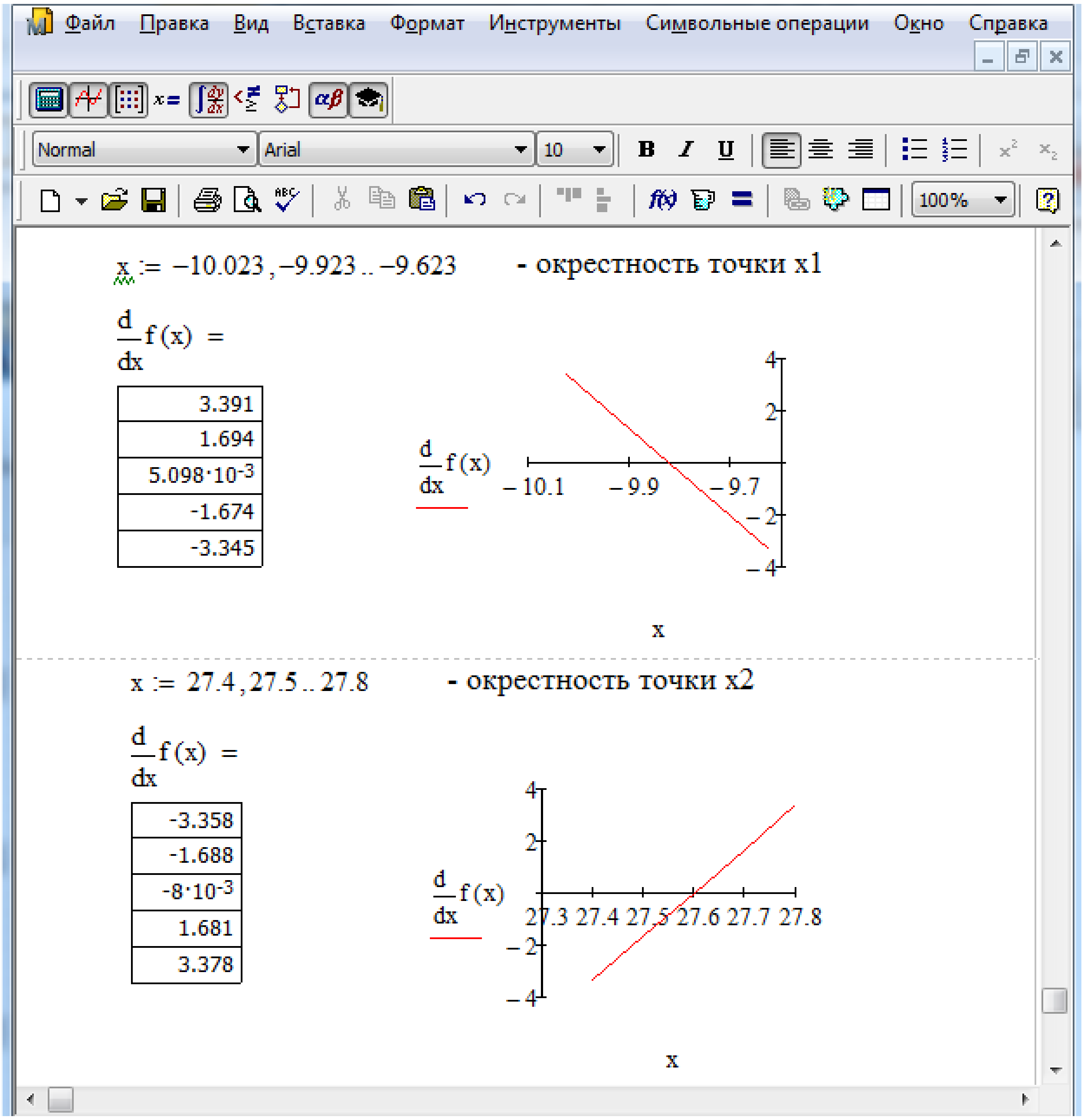


Рис. 6.2. Определение вида экстремума

Из таблицы значений производной и из графика видно, что знак производной в окрестности точки $x1$ меняется с плюса на минус, поэтому в этой точке функция достигает максимума. А в окрестности точки $x2$ знак производной поменялся с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция достигает минимума.

Определим вид экстремумов *вторым способом*, вычисляя знак второй производной (рис. 6.3).

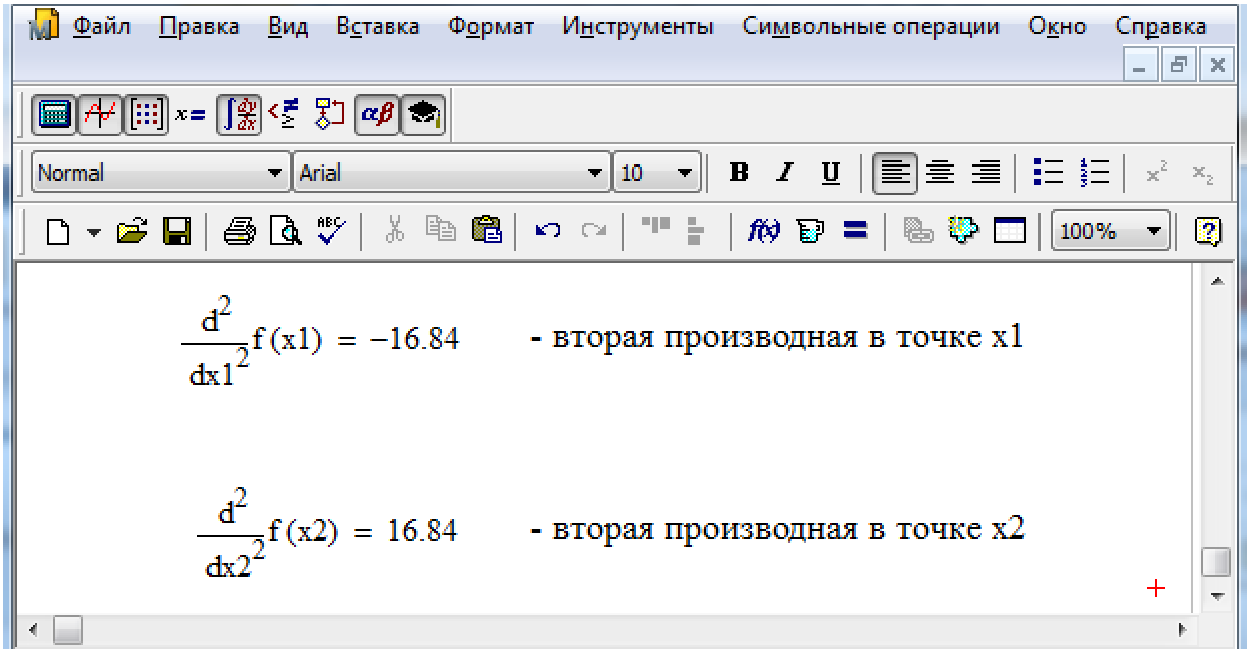


Рис. 6.3. Определение вида экстремума в с помощью второй производной

Видно, что в точке $x1$ вторая производная меньше нуля, значит, точка $x1$ соответствует максимуму функции. А в точке $x2$ вторая производная больше нуля, значит, точка $x2$ соответствует минимуму функции.

Задания для самостоятельной работы

Построить графики и найти минимумы и максимумы функций:

1) $f(x) = x\,ln(x)$;
2) $f(x) = x^2 e^{-x}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$;
4) $f(x) = (0.8x^3 - 484x^2 - 3333x)\cdot 10^{-4}$;
5) $f(x) = x^4 + 0.5x^3 - 4x^2 - 3x - 0.5$;
6) $f(x) = 5x^3 + 25x^2 + 5x - 9$;
7) $f(x) = x \cdot \sin(x)$;
8) $f(x) = x^2 - 10$;
9) $f(x) = x^2 - \sin(2x)$;
10) $f(x) = (0.91x^3 - 561.1x^2)\cdot 10^{-4}$

6.2. Определение площадей фигур, ограниченных непрерывными линиями

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *f(x)*, отрезком [a, b] на оси *Ox* и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, $a < b$, определяется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пример. Нахождение площади фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 1 - x^2$ и $y = 0$ (рис. 6.5).

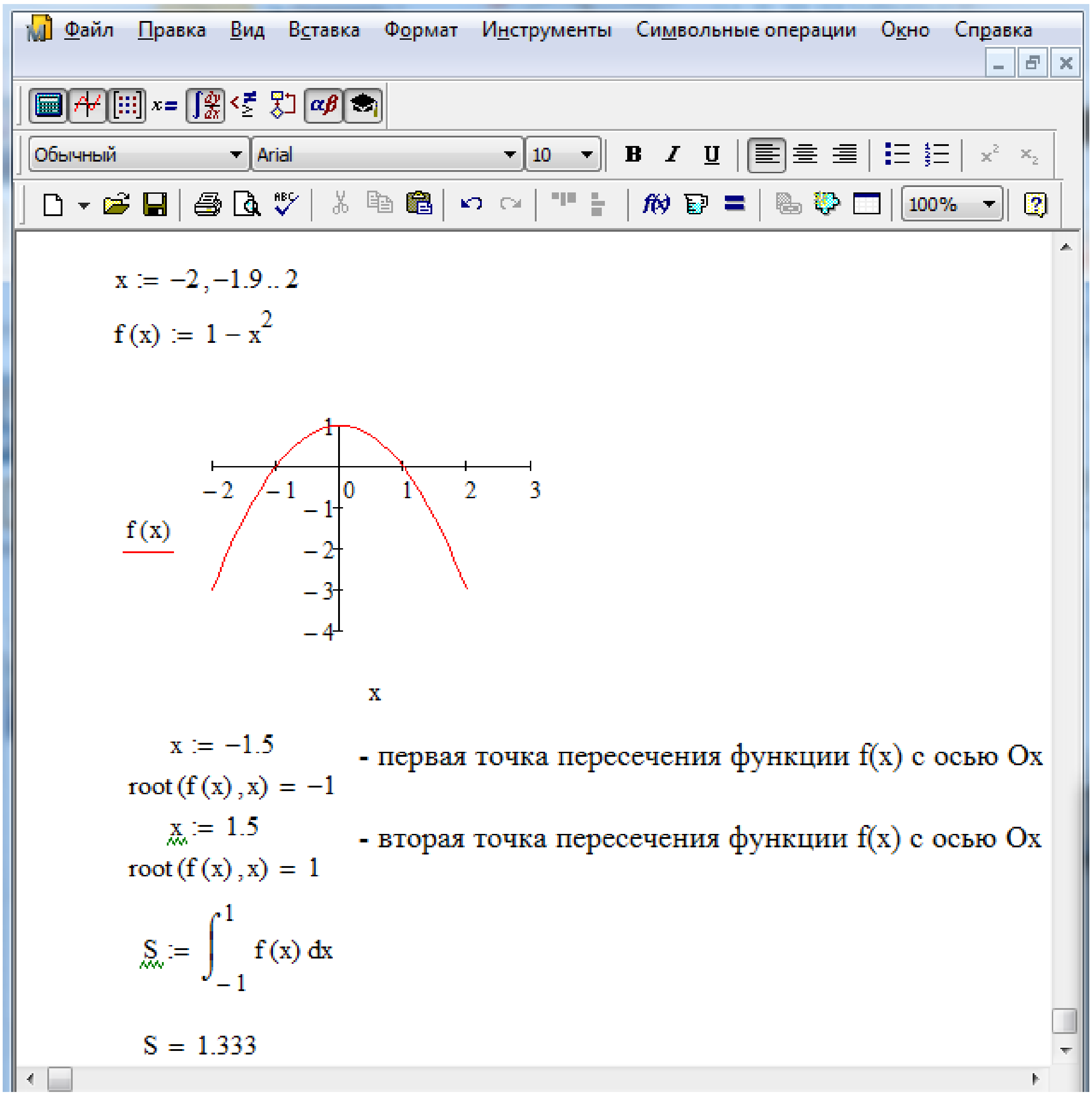


Рис. 6.4. Нахождение площади фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 1 - x^2$ и $y = 0$

Площадь фигуры, заключенной между графиками функций *f1(x)* и *f2(x)* и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left| f2(x) - f1(x) \right| dx \quad .$$

Внимание. Чтобы избежать ошибок при вычислении площади, разность функций надо брать по модулю. Таким образом, площадь будет всегда положительной величиной.

Пример. Нахождение площади фигуры, ограниченной линиями $f1(x) = 1 - x^2$ и $f2(x) = x^2 - 2$. Решение представлено на рисунке 6.6.

1. Строим график функций.

2. Находим точки пересечения функций с помощью функции *root*. Начальные приближения определим по графику.

3. Найденные значения x подставляем в формулу $S=\int_a^b |f2(x)-f1(x)|dx$ как пределы интегрирования.

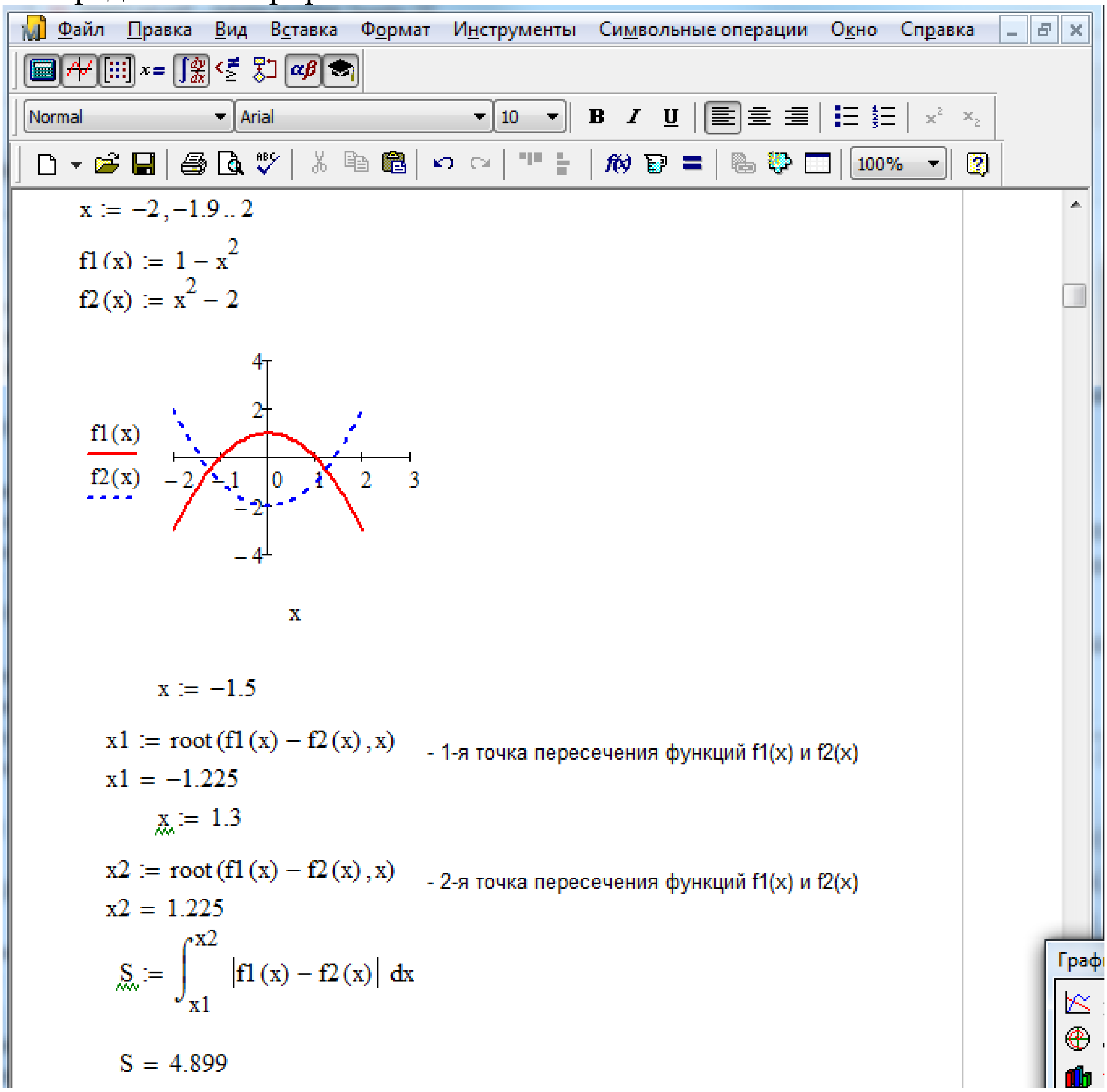


Рис. 6.6. Нахождение площади фигуры,

ограниченной фунциями $f1(x)=1-x^2$ и $f2(x)=x^2-2$

Задания для самостоятельной работы

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = 4 - x^2$, $y = 5x$;
2) $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$;
3) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;
4) $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$;
5) $y = 10 - x^4$, $y = 3x - 56$;
6) $y = 0.98\,x^3$, $y = 10x - 6$;
7) $y = x^4 - 8$, $y = 8x + 6$;
8) $y = \sin(x/2) - 5$, $y = -4x^2 + 2$;
9) $y = 1 - x^3$, $y = -8x+5$;
10) $y = \tan(x/4) - 4$, $y = x^2 - 6$.

6.3. Построение кривых по заданным точкам

6.3.1. Построение прямой, проходящей через две заданные точки

Для составления уравнения прямой, проходящей через две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, предлагается следующий алгоритм:

1. Прямая задается уравнением $y = ax + b$, где a и b — коэффициенты прямой, которые нам требуется найти.

Подставляем в это уравнение заданные координаты точек и получаем систему

$$\begin{cases} y0 = ax0 + b \\ y1 = ax1 + b \end{cases}.$$

2. Данная система является линейной. В ней две неизвестные переменные: a и b. Систему можно решить матричным способом.

Пример. Построение прямой, проходящей через точки A(–2, –4) и B(5,7).

Подставим в уравнение прямой координаты данных точек и получим систему

$$\begin{cases} -4 = -2a + b \\ 7 = 5a + b \end{cases}.$$

Решение этой системы в MathCAD представлено на рисунке 6.7.

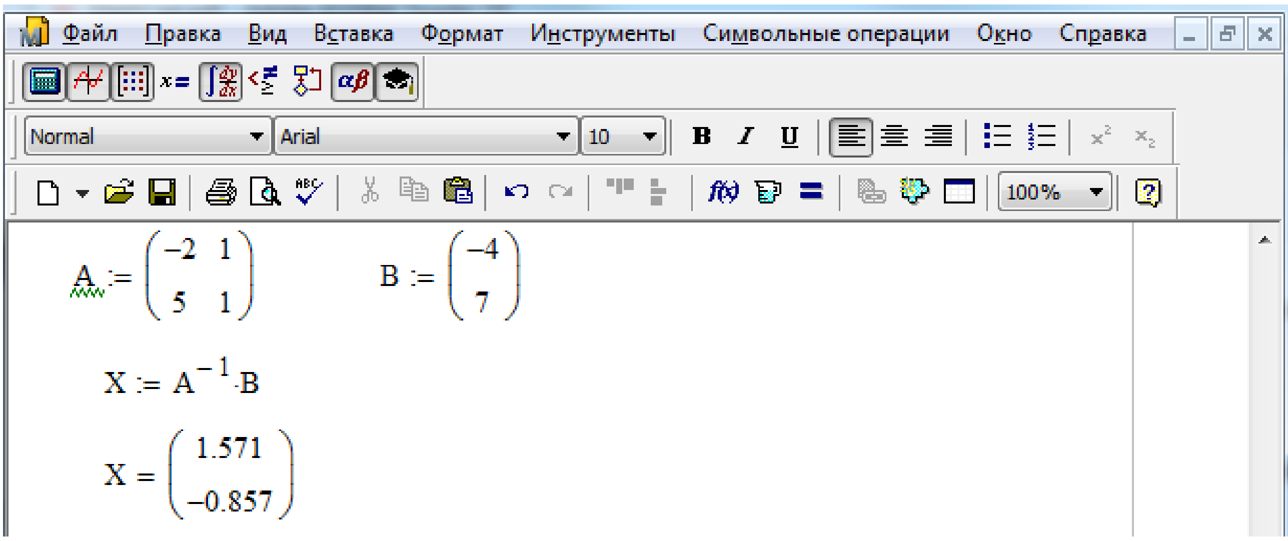


Рис. 6.7. Решение системы

В результате решения системы получаем $a = 1{,}571$, $b = –0{,}857$. Значит, уравнение прямой будет иметь вид: $y = 1{,}571\ x – 0{,}857$. Построим эту прямую (рис. 6.8).

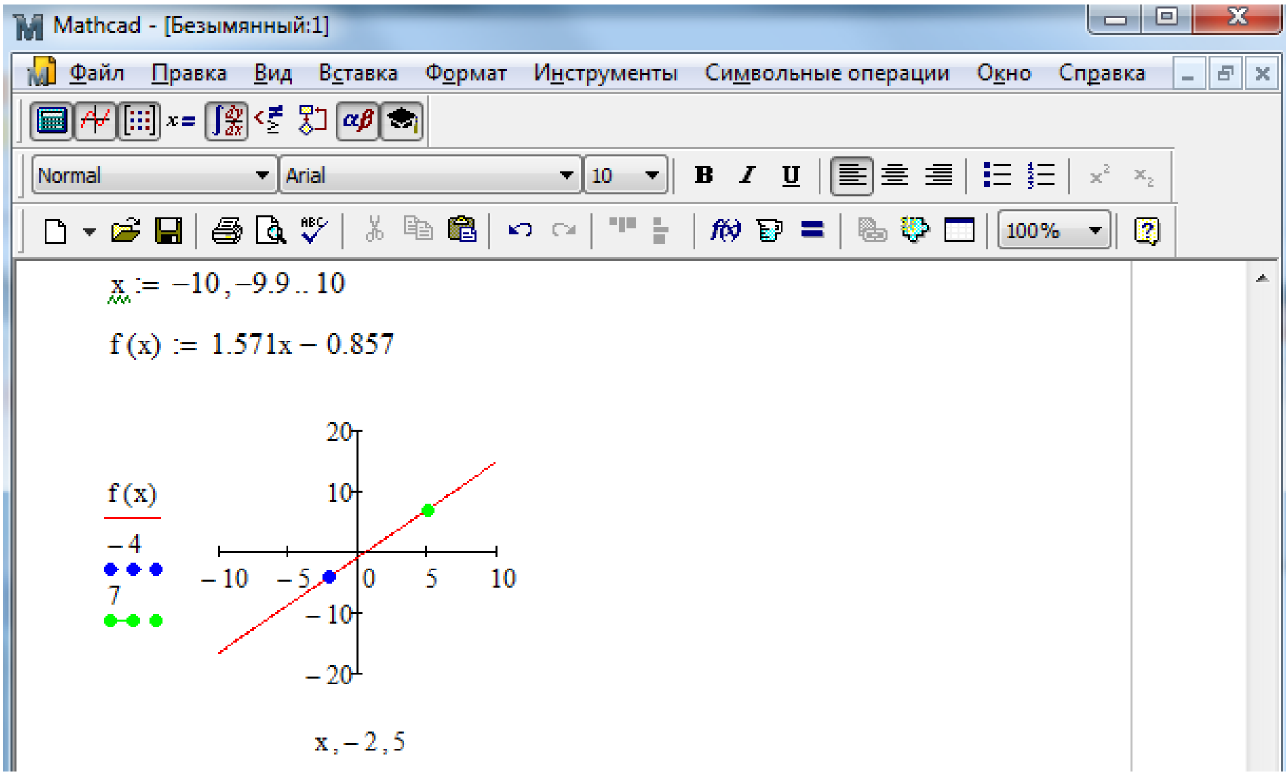


Рис. 6.8. Построение прямой

6.3.2. Построение параболы, проходящей через три заданные точки

Для построения параболы, проходящей через три точки A(x_0, y_0), B(x_1, y_1) и C(x_2, y_2), алгоритм следующий:

Парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — коэффициенты параболы, которые нам требуется найти.

Подставляем в это уравнение заданные координаты точек и получаем систему:

$$\begin{cases} y0 = a \cdot x0^2 + b \cdot x0 + c \\ y1 = a \cdot x1^2 + b \cdot x1 + c \\ y2 = a \cdot x2^2 + b \cdot x2 + c \end{cases}$$

Данная система является линейной. В ней три неизвестные переменные: a, b и c. Систему можно решить матричным способом.

Полученные коэффициенты подставляем в уравнение и строим параболу.

Пример. Построение параболы, проходящей через точки A(–1, –4), B(1, –2) и C(3,16).

Подставляем в уравнение параболы заданные координаты точек и получаем систему:

$$\begin{cases} -4 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ -2 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 16 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений и построение параболы в MathCAD представлено на рисунке 6.9.

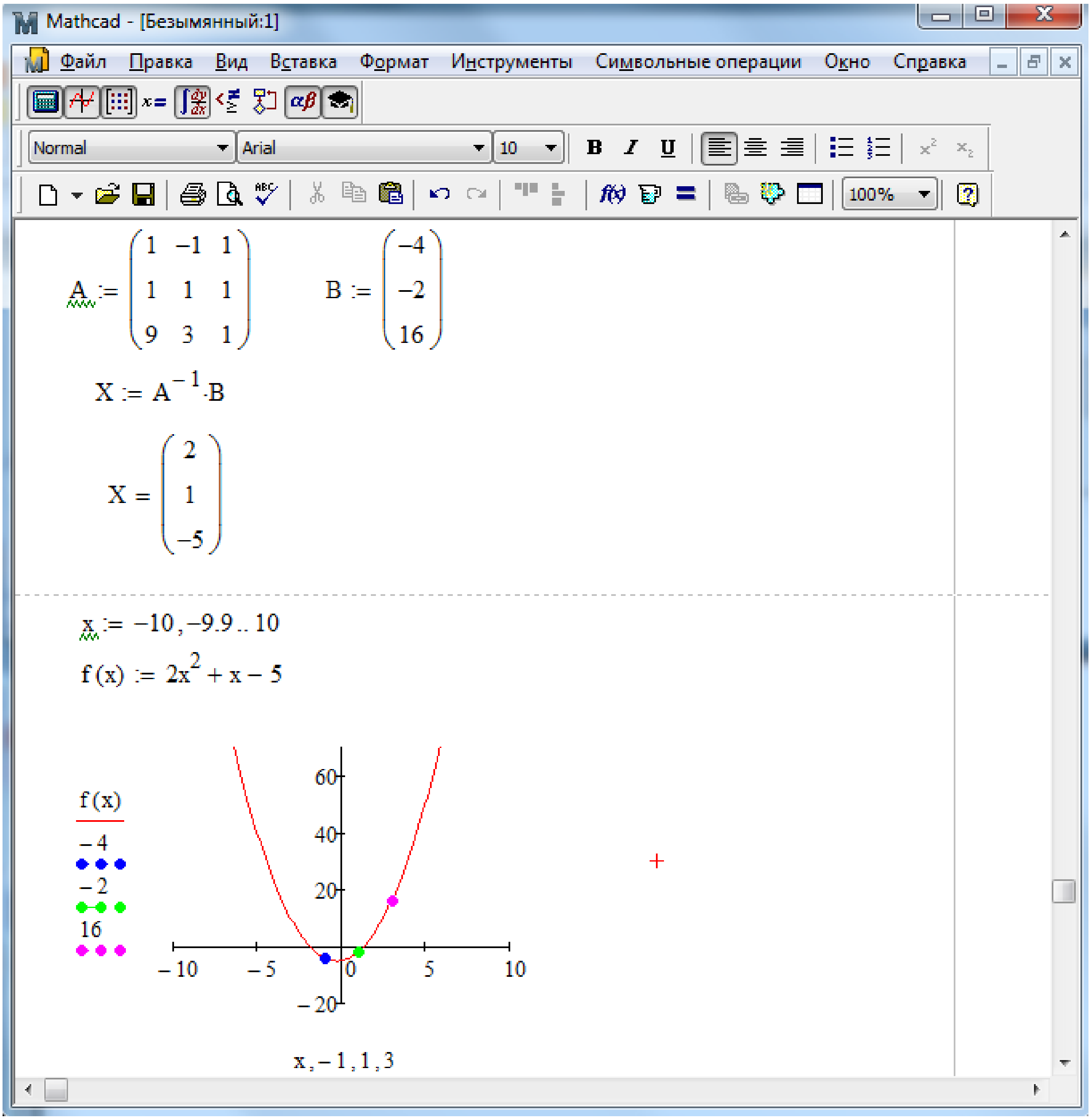


Рис. 6.9. Решение системы уравнений и построение параболы

6.3.3. Построение окружности, проходящей через три заданные точки

Для построения окружности, проходящей через три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Окружность задается уравнением

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2,$$

где x_0, y_0 — координаты центра окружности;

R — радиус окружности.

Подставим в уравнение окружности заданные координаты точек и получим систему

$$\begin{cases}\left(x1-x0\right)^2+\left(y1-y0\right)^2=R^2\\ \left(x2-x0\right)^2+\left(y2-y0\right)^2=R^2\\ \left(x3-x0\right)^2+\left(y3-y0\right)^2=R^2\end{cases}.$$

Данная система является нелинейной. В ней три неизвестные переменные: $x0$, $y0$ и R. Система решается с применением вычислительного блока *Given – Find*.

Пример. Построение окружности, проходящей через три точки A(–2, 3), B(6, 1) и C(2, 4).

Подставим в уравнение окружности заданные координаты точек и получим систему

Решение системы в MathCAD представлено на рисунке 6.11.

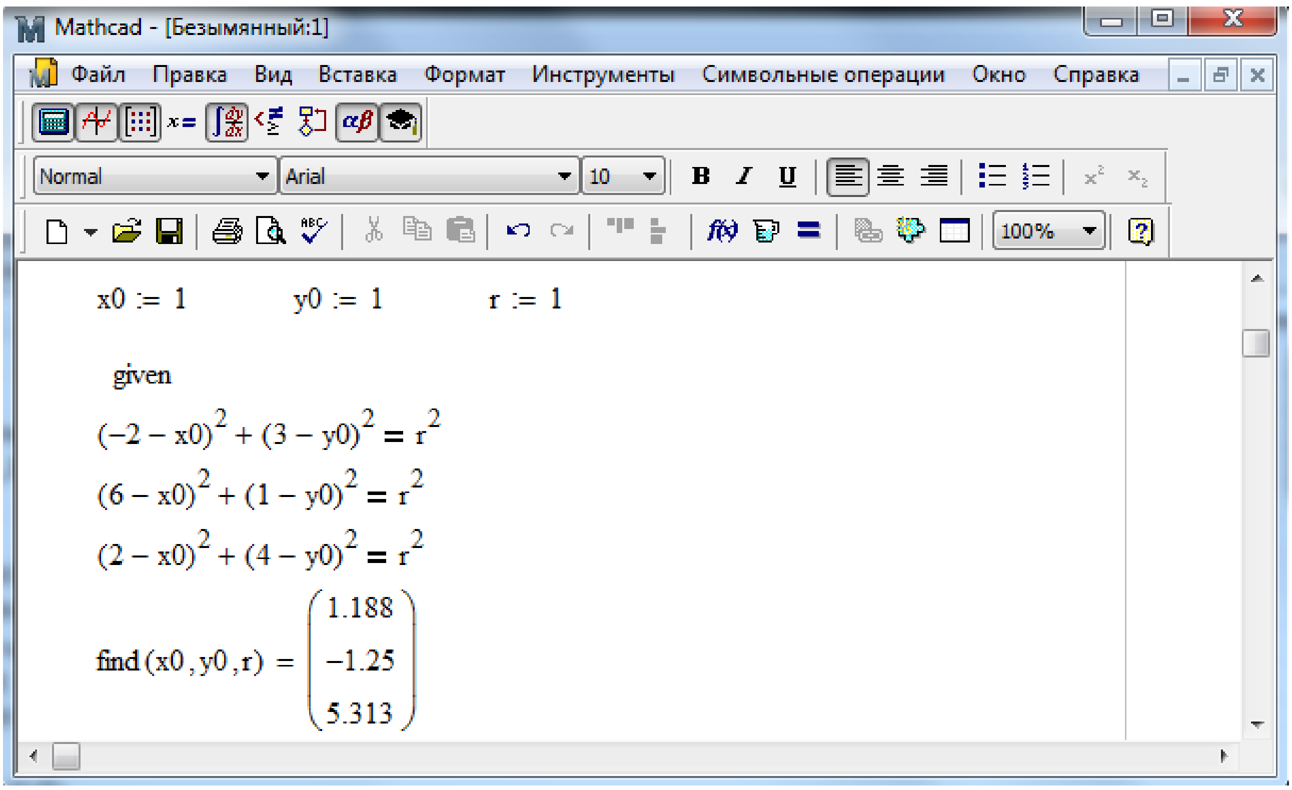


Рис. 6.11. Решение системы

В результате решения системы получено: *x0* = 1.188, *y0* = -1.25, *r* = 5.313. Подставим полученные координаты центра окружности и радиус в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Получим $(x - 1.188)^2 + (y + 1.25)^2 = 5.313^2$.

Выразим из этого уравнения *y*:

$$(y - y_0)^2 = R^2 - (x - x_0)^2;$$

$$y - y_0 = \pm\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2};$$

$$y = \pm\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0.$$

и построим окружность (рис. 6.12).

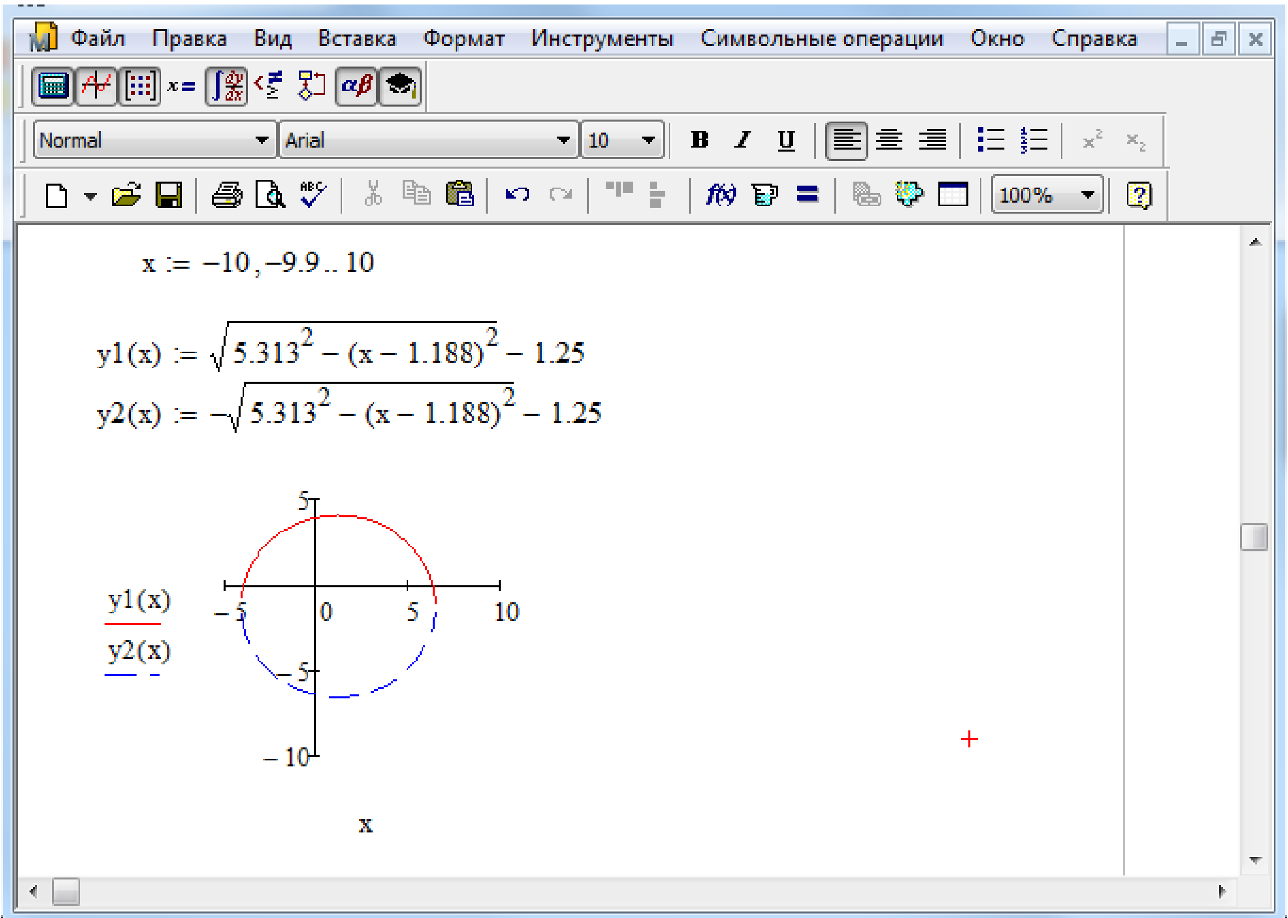


Рис. 6.12. Построение окружности

Задания для самостоятельной работы

1) Дана окружность с центром в точке *O*(3;4) и радиусом *R* = 6. Прямая проходит через центр окружности и точку *A* (–2, –1). Построить окружность и прямую и найти их точки пересечения.

2) Дано: $A(–2, 5)$ и $B(–5, 2)$ — координаты центров двух окружностей. $R_1 = 6$; $R_2 = 5$ — их радиусы. Построить эти окружности и параболу, проходящую через центры окружностей и точку $C(1, 2)$.

3) Даны две окружности O1 (0; 0) с R = 5 и O2 (–5; –2) с R=7. Построить окружности и прямую, проходящую через центры окружностей. Отметить точки на графике.

4) Дано: A (-1; 1) и B (0; 4) –точки, принадлежащие прямой. Эти же точки являются центрами двух окружностей R1=4, R2=7. Построить прямую и окружности. Найти точки пересечения, отметить точки на графике. Отметить точки на графике.

5) Дана окружность с центром в точке О (-2; 3) и радиусом R = 8. Прямая проходит через центр окружности и точку А (0; 5). Построить окружность и прямую, найти их точки пересечения. Отметить точки на графике.

6) Построить параболу по точкам А (-3; 0); В (4; 0); С (0; -5). При этом, точка В (4;0) является центром окружности с R = 3. Найти точки пересечения этих функций. Отметить точки на графике.

7) Дано: A (-5; 4) и B (6; 3) –точки, принадлежащие прямой. Эти же точки являются центрами двух окружностей R1=6, R2=4. Построить прямую и окружности. Найти точки пересечения. Отметить точки на графике.

8) Найти точки пересечения с осями координат окружности с центром О (4;5) и R=9. Соединить их отрезками по периметру, чтобы получился встроенный четырехугольник. Отметить точки на графике.

9) Постройте окружность, проходящую через три точки А (-1; 4); В (6; 2); С(3; -3). Найти и отметить точки пересечения с осями координат. Отметить точки на графике.

10) Дано: O1 (-6; 3) и O2 (4; 2) — координаты центров двух окружностей. R1=2; R2=4 — их радиусы. Построить эти окружности и параболу, проходящую через центры окружностей и точку С (-1, -2). Отметить точки на графике.

Вопросы для самоконтроля

1. Необходимое и достаточное условия экстремума функции.
2. Способы определения вида экстремума функции (максимум и минимум).
3. Определение площади криволинейной трапеции.
4. Построение кривых по заданным точкам.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Полезные клавиши и комбинации клавиш

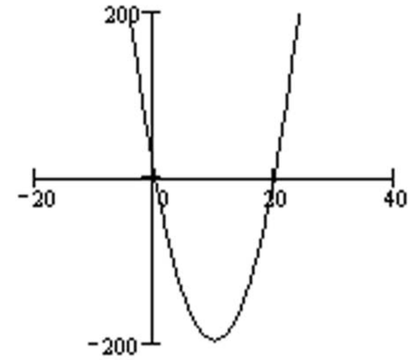
Ниже приведены полезные клавиши и комбинации клавиш, позволяющие ускорить ввод данных.

Внимание. Ввод символов производится при английской раскладке клавиатуры.

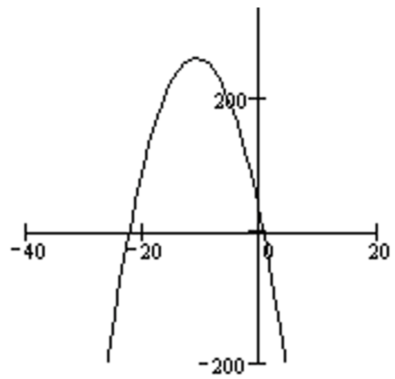
Ввод на клавиатуре	**Выполняемые действия и выводимые символы**
Ctrl + F9	вставка пустых строк
Ctrl + F10	удаление пустых строк
^	возведение в степень, x^y
\	извлечение квадратного корня, $\sqrt{x}$
*	умножение
/	деление
+	сложение
–	вычитание
$\vert$	модуль числа или определитель матрицы, $\lvert x \rvert$
[	нижний индекс у элементов вектора или матрицы, x_1
:	локальный оператор присвоения, (:=)
Ctrl + =	жирный знак равенства (**=**) — логическое равенство
;	задание диапазона чисел ранжированной переменной, (..)
Ctrl + M	вставка матрицы

Графики элементарных функций

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. График — парабола с осью симметрии, параллельной оси *y*, с вершиной в точке с координатами $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ (рис. П2.1).



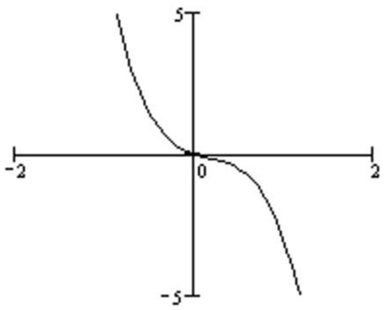
а) a > 0



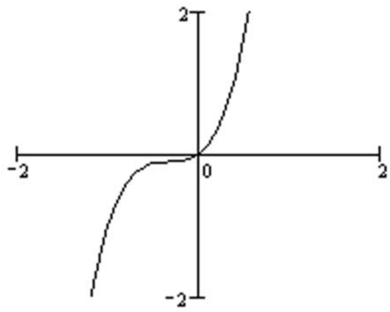
б) a < 0

Рис. П2.1. Парабола

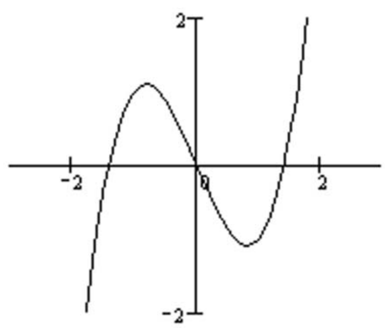
Функция третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. График функции — кубическая парабола. У него имеется, по крайней мере, одна (а может быть, и две, и три) точка пересечения с осью *x*. На вид кривой влияет значение коэффициента *a* и значение $\Delta = 3ac - b^2$ (рис. П2.2).



а) $\Delta > 0$, a < 0



б) $\Delta = 0$, a > 0



в) $\Delta < 0$, a > 0

Рис. П2.2. График функции третьей степени

Целая рациональная функция n-й степени

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Графики функции имеют не более *n* точек пересечения с осью *x*, не более *n-1* экстремумов, не более *n-2* точек перегиба (рис. П2.3).

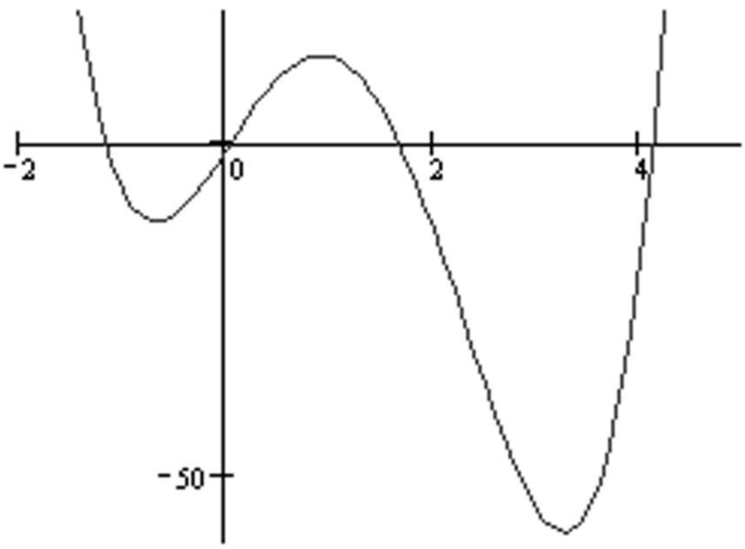
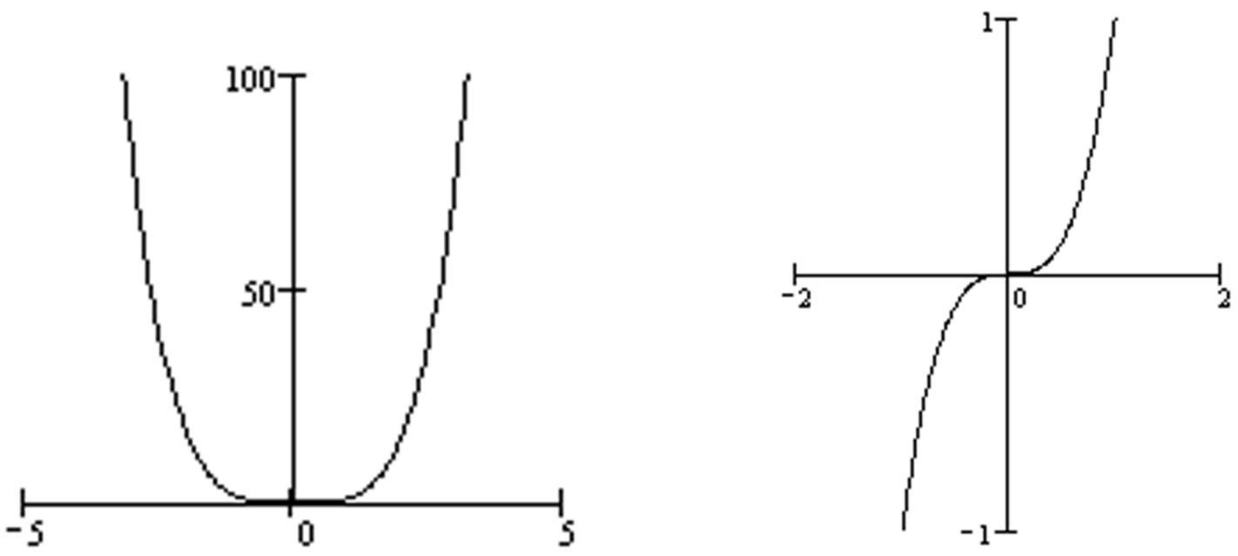


Рис. П2.3. График целой рациональной функции 4-й степени

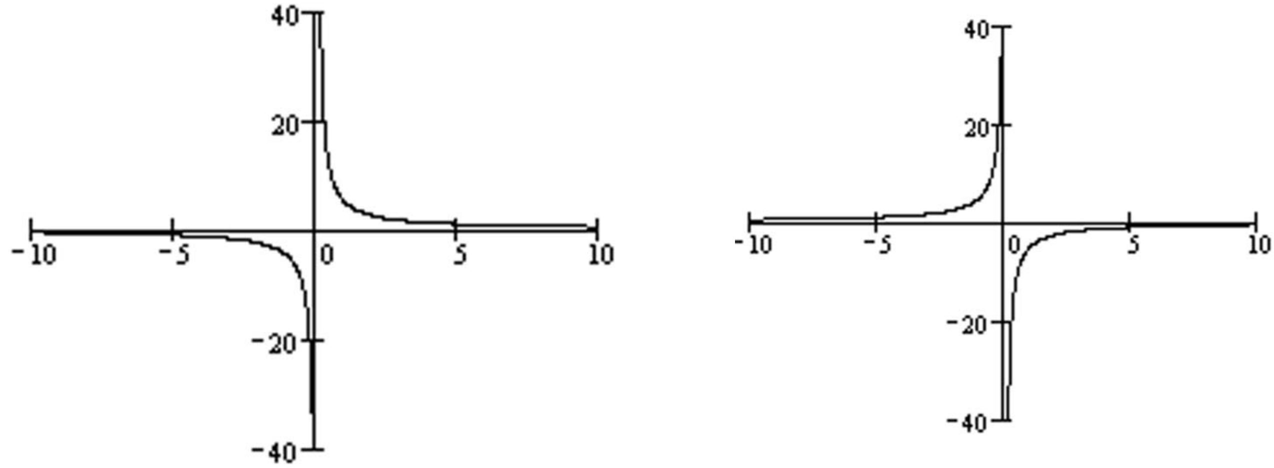
Степенная функция $y = x^n$, $n \geq 2$ — целое. Все графики этой функции проходят через точку (1,1) и касаются оси *x* в точке (0,0) (рис. П2.4).



а) n — четное *б) n — нечетное*

Рис. П2.4. График степенной функции

Обратная пропорциональность $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$. График такой функции — равносторонняя гипербола с асимптотами — осями координат (рис. П2.5).



а) a > 0 *б) a < 0*

Рис. П2.5. Гипербола

Дробно-линейная функция $y = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$, $a_2 \neq 0$. Графики функции — равносторонние гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат и проходящими через тоску с координатами $\left(\frac{-b_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_2} \right)$ (рис. П2.6).

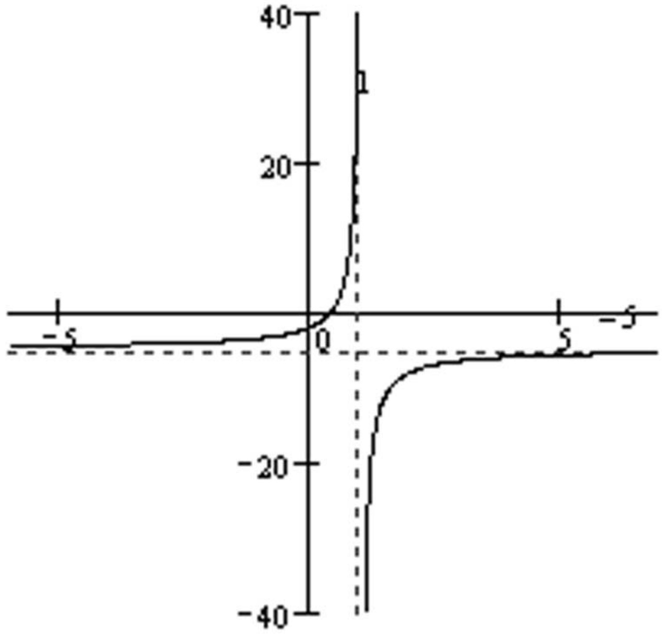
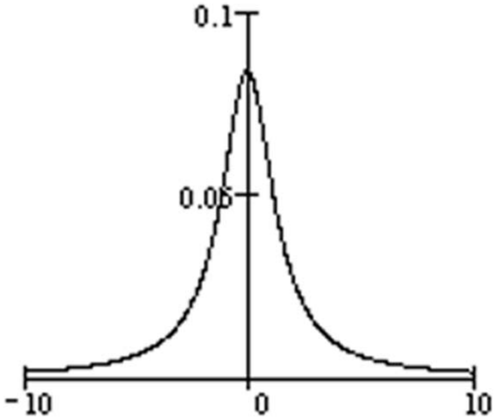
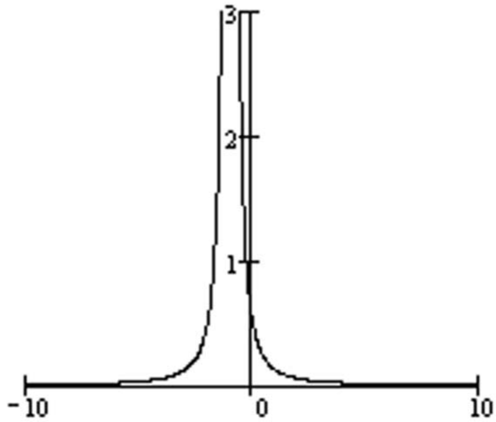


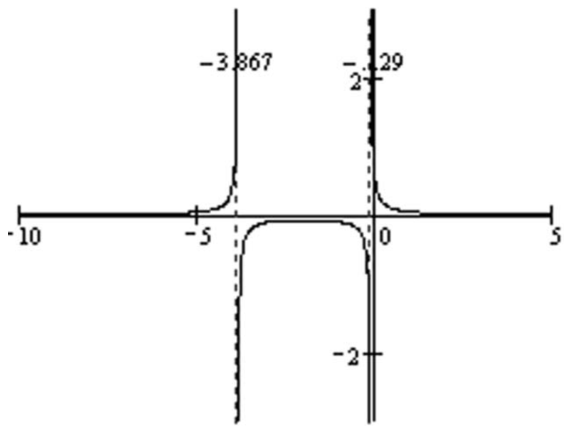
Рис. П2.6. Гипербола

Нелинейная дробно-рациональная функция $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$. Вид кривой существенно определяется значением дискриминанта $\Delta = 4ac - b^2$ (рис. П2.7).





а) Δ > 0 *б) Δ = 0*



в) Δ < 0

Рис. П2.7. График нелинейной дробно-рациональной функции

Тригонометрические функции

Синус $y = \sin x$. Это периодическая функция с периодом $T = 2\pi$. Её график — синусоида (рис. П2.8).

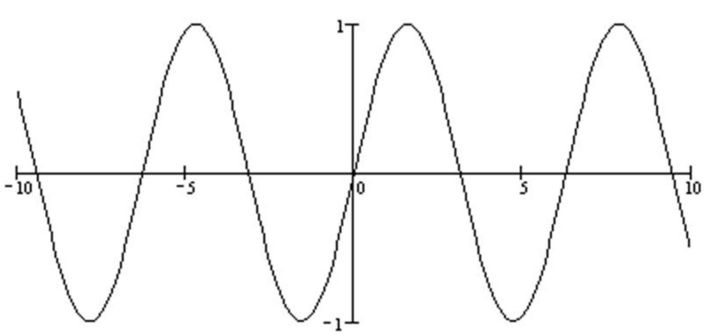


Рис. П2.8. Синусоида

Косинус $y = cos\,x$. Это периодическая функция с периодом $T = 2\pi$. Её график — синусоида, сдвинутая по оси x на $\pi/2$ (рис. П2.9).

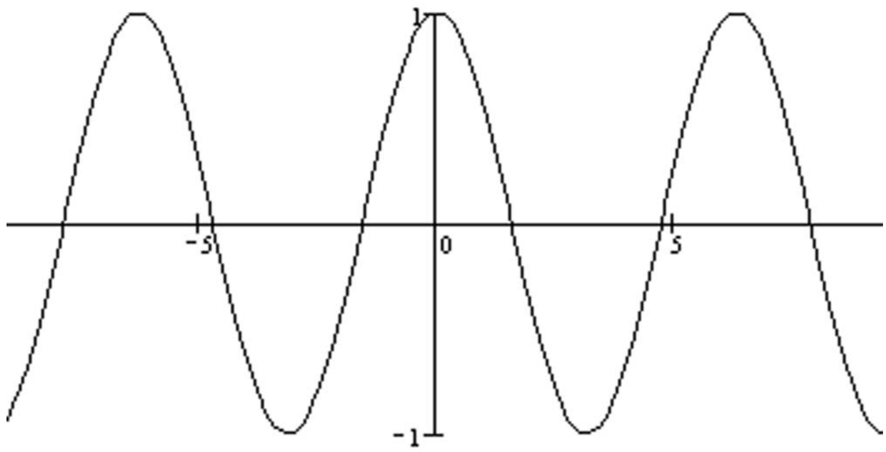


Рис. П2.9. График функции $y = \cos x$

Тангенс $y = tan\,x$. Функция периодична с периодом $T = \pi$ (рис. П2.10).

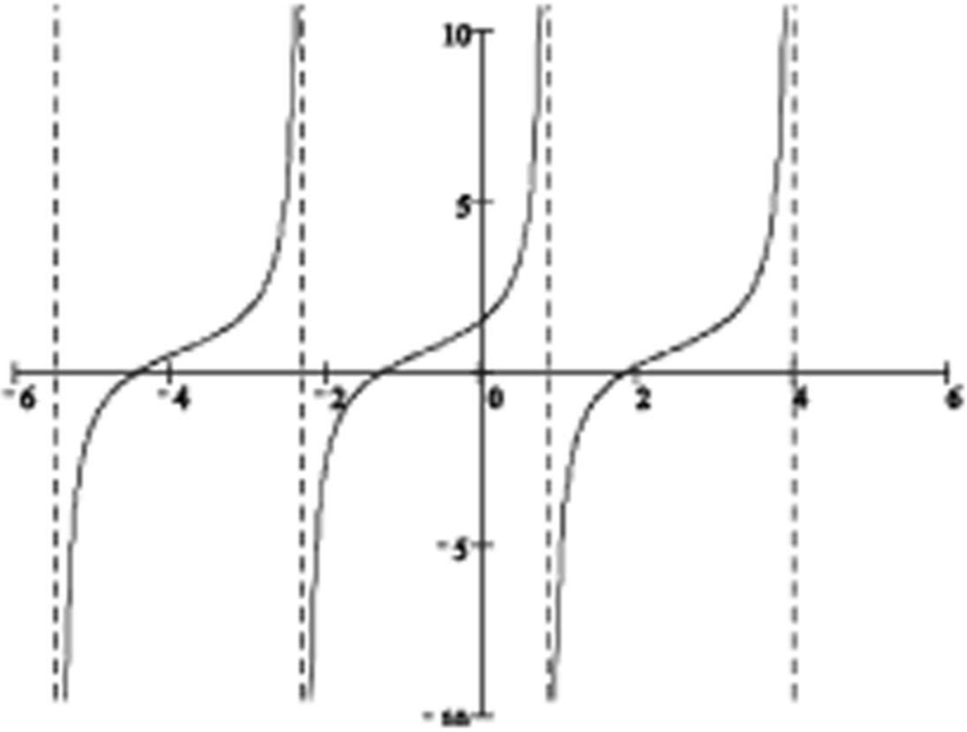


Рис. П2.10. Тангенсоида

Показательные и логарифмические функции

Показательная функция $y = e^{bx} = exp(bx)$. Её еще называют экспоненциальной. При $b > 0$ функция монотонно возрастает, при $b < 0$ она монотонно убывает (рис. П2.11).

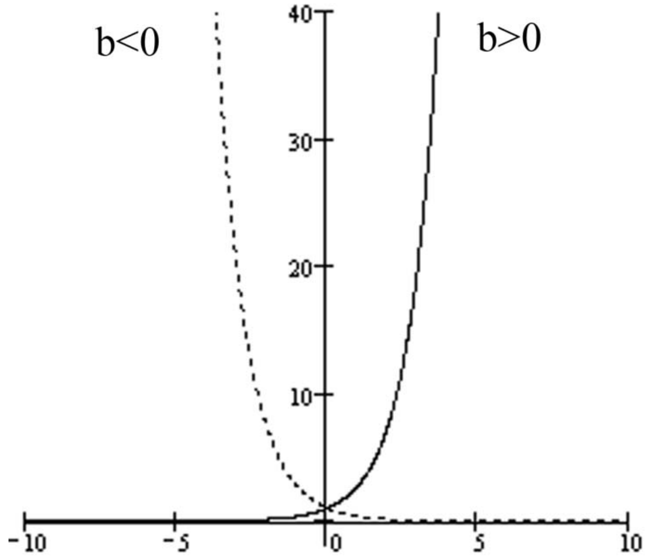


Рис. П2.11. Экспонента

Логарифмическая функция $y = log_a x, a > 0, a \neq 1$. Является обратной для показательной функции. При a > 1 функция монотонно возрастает, при 0 < a < 1 она монотонно убывает (рис. П2.12).

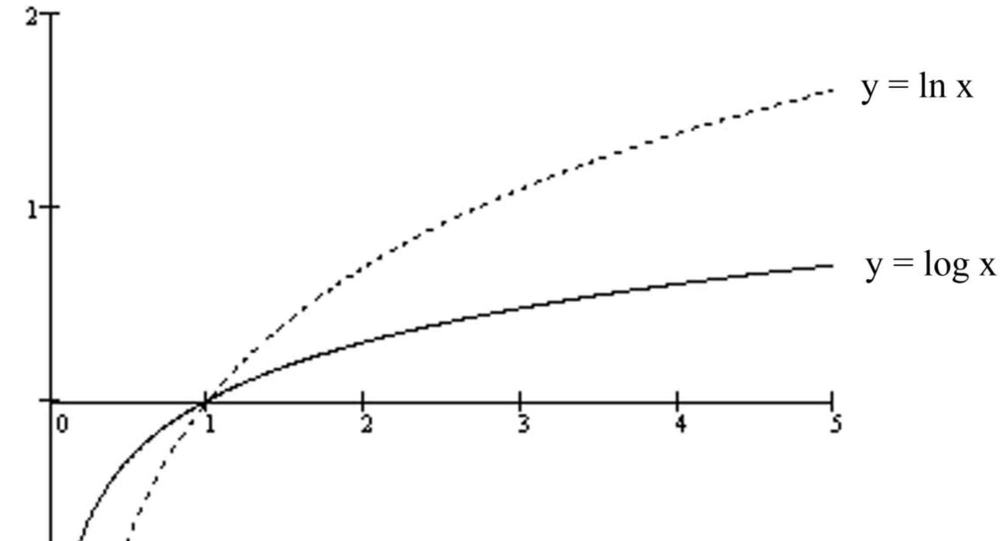


Рис. П2.12. Графики логарифмических функций

Приложение 3

Встроенные функции

Название	Правописание
Арккосинус гиперболический	acosh(x)
Синус	sin(x)
Косинус	cos(x)
Тангенс	tan(x)
Котангенс	cot(x)
Арксинус	asin(x)
Арккосинус	acos(x)
Арктангенс	atan(x)
Арккотангенс	acot(x)
Синус гиперболический	sinh(x)
Косинус гиперболический	cosh(x)
Тангенс гиперболический	tanh(x)
Натуральный логарифм	ln(x)
Десятичный логарифм	log(x)
Логарифм по основанию b	log(x,b)
Экспонента	exp(x)
Действительная часть комплексного числа	Re(z)
Мнимая часть комплексного числа	Im(z)
Максимальный элемент вектора	max(V)
Минимальный элемент вектора	min(V)
Число элементов вектора	length(V)
Число строк матрицы	rows(M)
Число столбцов матрицы	cols(M)
След матрицы	tr(M)
Вектор решений системы линейных алгебраических уравнений вида $M \cdot x = B$	lsolve(M,B)
Функция нахождения корней многочлена степени n, где V — вектор коэффициентов многочлена	polyroots(V)
Функция нахождения значений x, при которых $f(x)$ равно нулю	root($f(x),x$)

Приложение 4

Некоторые сообщения об ошибках

Сообщение	Содержание и причина
unmatched parenthesis	дисбаланс скобок — попытка вычислить выражение, содержащее левую скобку без соответствующей правой
must be vector	должно быть вектором — в данной операции требуется векторный аргумент
must be nonzero	должно быть ненулевым
must be positive	должно быть положительным
must be scalar	должно быть скаляром
index out of bounds	индекс вне границ
wrong size vector	неверный размер вектора
array size mismatch	несовпадение размеров массивов
no matching Given	нет соответствующего *Given* — использование функций *Find* или *Minerr* без соответствующего им слова *Given*
error in constant	ошибка в константе — после цифры следуют буквы
Interrupted	прервано — при нажатии [Esc] при выполнении вычислений, для пересчета — [F9]
missing operator	пропущенный операнд
did not find solution	решение не найдено
too few arguments	слишком мало аргументов
too few constraints	слишком мало ограничений
too many arguments	слишком много аргументов — используемой функции требуется меньше аргументов

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.: ил.+ Видеокурс.

2. В.Ф. Очков, Е.П. Богомолова, Д.А. Иванов. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет, 2016. - 388 с. ISBN 978-5-8114-2127-5.

3. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс. — СПб.: Питер, 2011. — 400 с.: ил.