Функциональные ряды

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого есть функции от x, называется ***функциональным рядом***.

Придавая x определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Область сходимости функционального ряда — это совокупность значений x, при которых функции

$$u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$$

определены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ — сходится.

Областью сходимости чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX.

Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x).$$

$S(x)$ называется ***суммой функционального ряда***.

Представим $S(x)$ в виде

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

где $S_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x)$, $R_n(x)=u_{n+1}(x)+\ldots$.

$R_n(x)$ называется ***остатком функционального ряда***.

Свойства функциональных рядов

Теорема 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)\ldots$ — непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx,\ [a,b] \in X$.

Теорема 2. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x),\ u_2'(x),\ \ldots,\ u_n'(x), \ldots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'.$$

Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{3.1}$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots, \tag{3.2}$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — действительные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд (3.1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| < |x_0|.$$

2. Если ряд (3.1) расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого

$$|x| > |x_0'|.$$

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда.

Если x_0 — точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости.

Обозначим $|x_0| = R$ — ***радиус сходимости***, $(-R; R)$ — ***интервал сходимости*** степенного ряда.

1. Пусть $R > 0$. Если $|x| < R$, то при всех x ряд сходится абсолютно. Если $|x| > R$, то при всех x ряд расходится.

2. Пусть $R = 0$. Ряд сходится только в точке 0 (или x_0).

3. Пусть $R = \infty$. Ряд сходится на всей числовой оси OX.

На концах интервала вопрос о сходимости (расходимости) решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Рассмотрим ряд (3.2). Если $x_0 = 0$, то получим ряд (3.1).

Определим область сходимости ряда (3.2).

Пусть $x - x_0 = X$, тогда

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots$$

$|X| < R$ — интервал сходимости ряда (3.2). Получим

$$|x - x_0| < R,$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Точки $x = x_0 \pm R$ исследуются на сходимость отдельно.

Методы поиска интервала сходимости

1. Если $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $x - x_0$, то

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

при условии, что этот предел существует (конечный или бесконечный).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n \frac{1}{n^2}.$$

Решение

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Найдем радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Решим неравенство

$$|x-2| < 1.$$

Получим интервал

$$1 < x < 3.$$

Исследуем отдельно точки $x=1$, $x=3$.

Пусть $x=1$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=3$. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

который сходится (по интегральному признаку Коши).

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $1 \le x \le 3$.

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}.$$

Решение

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n}{(n+1) \cdot 5^{n+1} \cdot (x+1)^n} \right| = \frac{1}{5}|x+1| < 1.$$

Решим неравенство $|x+1| < 5$. Получим $-6 < x < 4$.

Исследуем отдельно точки $x = -6$, $x = 4$.

Пусть $x = -6$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x = 4$. Получим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится.

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $-6 \le x < 4$.

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < R$, то есть

$$x_0 - R < x < x_0 + R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c = x_0 + \Theta(x - x_0),\ 0 < \Theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ получим ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

Теорема 1

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M,$$

где M — положительная постоянная, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,\ n = 0, 1, 2, \dots,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

$$f(x) = \sin x,\ f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = -\cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0) = -1, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

2. $f(x) = \cos x$.

Заметим, что $\cos x = (\sin x)'$. Продифференцируем ряд (3.6) и получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

3. $f(x) = e^x$.

Данная функция имеет производные всех порядков на интервале $(-a;a)$, где $a > 0$ — любое число, причем $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^a$, $(n = 0,1,2,\ldots)$. Так как $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то получаем ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Разложение остальных элементарных функций необходимо выполнить самостоятельно (*Конспект №16*)

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

Решение

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

1. Вычислим производные

$$y = \frac{1}{x-5},\ y(6) = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{(x-5)^2},\ y'(6) = -1,$$

$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3},\ y''(6) = 2!,$$

$$y''' = -\frac{2\cdot 3}{(x-5)^4},\ y'''(6) = -3!,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}},\ y^{(n)}(6) = (-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5} = 1 + \frac{-1}{1!}(x-6) + \frac{2!}{2!}(x-6)^2 - \frac{3!}{3!}(x-6)^3 + \ldots = \sum_{n}^{\infty}(-1)^n (x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0<\theta<1;$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(c-5)^{n+2}(n+1)!}(x-6)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}},\ c = 6+\theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n}\right| = |x-6| < 1,\quad 5<x<7.$$

Пусть $x=5$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n = 1+1+\ldots$, который расходится.

Пусть $x=7$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x\in(5;7)$.

3. Докажем, что для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Для всех $x\in(5;7)$ имеем

$c-5>1,\ |x-6|<1,$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{c-5}\left(\frac{x-6}{c-5}\right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-6)^n,\quad x\in(5;7).$$

Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

1. Приближенное вычисление значения функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n|<|u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Приближенное вычисление значения функции в точке.

Пример. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\pi}{18}\approx 0{,}17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^\circ = 1-\frac{(0{,}17453)^2}{2!}+\frac{(0{,}17453)^4}{4!}+\ldots.$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0{,}17453)^4}{4!}<0{,}0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2|<|u_3|<0{,}0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^{\circ} \approx 1 - 0{,}01523;$$

$$\cos 10^{\circ} \approx 0{,}9848.$$

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^{0,25} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \; -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение e^x вместо x выражение $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \; -\infty < x < +\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{0,25} (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots)dx = x\Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^{0,25} - \frac{x^7}{42}\Big|_0^{0,25} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} + \ldots,$$

Так как

$$\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0{,}001,$$

то

$$\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1,\ y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

Решение

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, ...:

$$y'(x) = x^2 y^2 - 1,\ y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy',\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(yy')' =$$

$$= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'',\ y'''(0) = 2,\ \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \ldots.$$