Примеры расчета

Пример. Токарный резец прямоугольного сечения длиной l = 70 мм испытывает усилие резания P = 1,75 кН (Рис. 6.31). Проверить прочность резца, если допускаемое напряжение на изгиб $[\sigma]$ = 200 МПа.

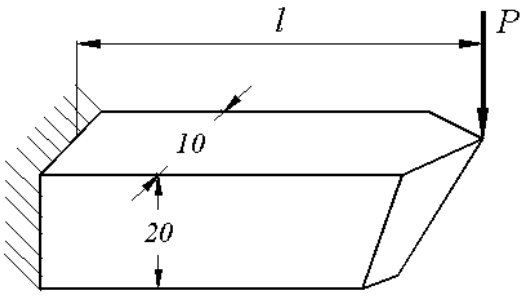

Рис. 6.31

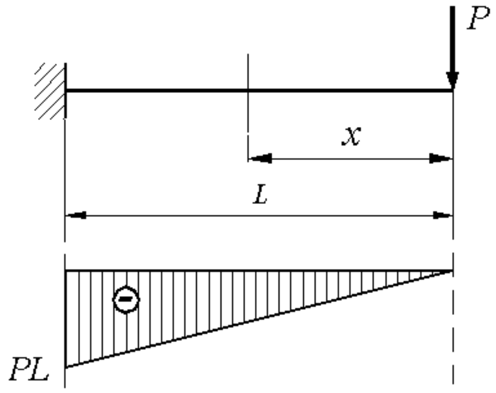

Рис. 6.32

Р е ш е н и е. Видно, что расчетная схема будет представлять собой консольную балку (Рис. 6.32).

Следовательно, $M_{max} = Pl = 1{,}75 \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 122{,}5 \times 10^{-3}$ кНм.

Запишем условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям [см. формулу (6.5)]:

$$\sigma_{max} = M_{max}/W \le [\sigma].$$

Определим величину осевого момента сопротивления поперечного сечения резца:

$$W = bh^2/6 = 10 \cdot 10^{-3}\,(20 \cdot 10^{-3})^2/6 = 666{,}67 \cdot 10^{-9}\ \text{м}^3.$$

Определим величину максимального напряжения:

$$\sigma_{max} = (122{,}5 \cdot 10^{-3})/666{,}67 \cdot 10^{-9} = 0{,}184 \cdot 10^6\ \text{кПа} = 184\ \text{МПа}.$$

Так как $\sigma_{max} < [\sigma]$ (184 МПа < 200 МПа), условие прочности соблюдается.

Пример Стеновой каркас (фахверк) гаражного здания состоит из вертикальных элементов– колонн и ригелей, которые воспринимают вес кирпичной кладки (Рис. 6.33).

Подобрать из прокатных двутавров сечение ригеля AB над проемом для ворот шириной l = 6 м при допускаемом напряжении стали $[\sigma]$ = 150 МПа.

Р е ш е н и е. Ригель работает как простая балка (Рис.6.34), шарнирно опирающаяся на колонны. Однако на него действует не полный вес простенка, а только часть, поскольку внутри кладки образуется самонесущий свод. Поэтому в запас прочности ригель рассчитывают на условную треугольную нагрузку от веса той части простенка, которая заштрихована на рисунке. Примем наибольшую интенсивность треугольной нагрузки q = 40 кН/м, тогда расчетная схема будет иметь вид (Рис.6.34).

Так как нагрузка приложена к балке симметрично реакции

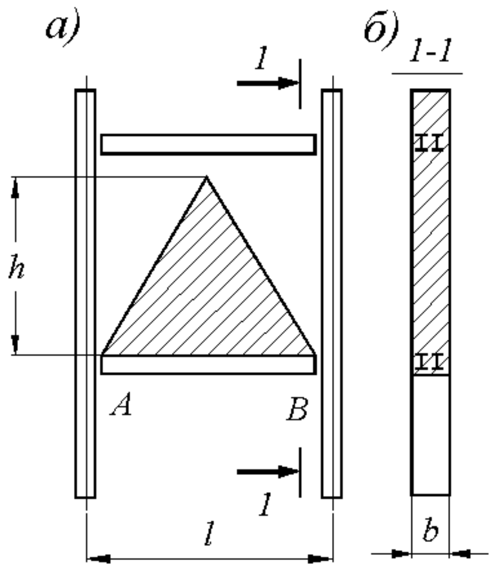

Рис.6.33

$$V_a = V_b = [(1/2)ql]/2 = 40\cdot 6/4 = 60 \text{ кН}.$$

Эпюра Q: В левой опоре $Q_{лев}=V_a$=60 кН; в правой опоре $Q_{пр}= V_b$ = –60 кН; в середине пролета $Q_{сер} = V_a – 3(1/2)q = 60 – 60 = 0$.

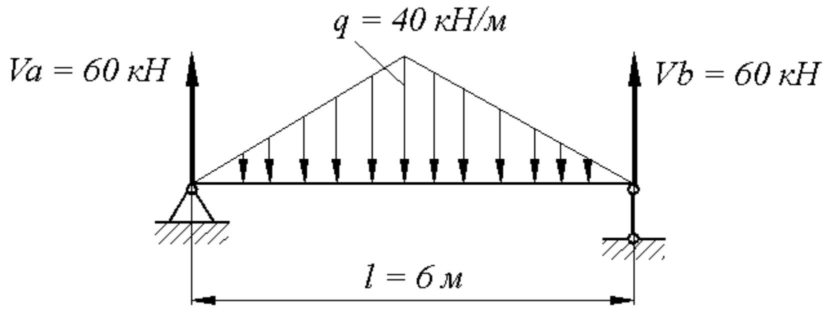

Рис. 6.34

На левом участке эпюра Q будет ограничена параболой выпуклостью вверх, так как вторая производная от уравнения Q будет отрицательной, а на правом– выпуклостью вниз (вторая производная будет положительной).

Эпюра M: В опорах изгибающие моменты $M_{лев} = M_{пр} = 0$. Максимальным изгибающий момент будет в середине пролета

$$M_{max} = 3V_a – 3\,(1/2)q(1/3)\cdot 3 = 60\cdot 3 – 20\cdot 3 = 120 \text{ кНм}.$$

Эпюра изгибающих моментов будет ограничена параболой третьей степени выпуклостью к стрелкам распределенной нагрузки (Рис. 6.35).

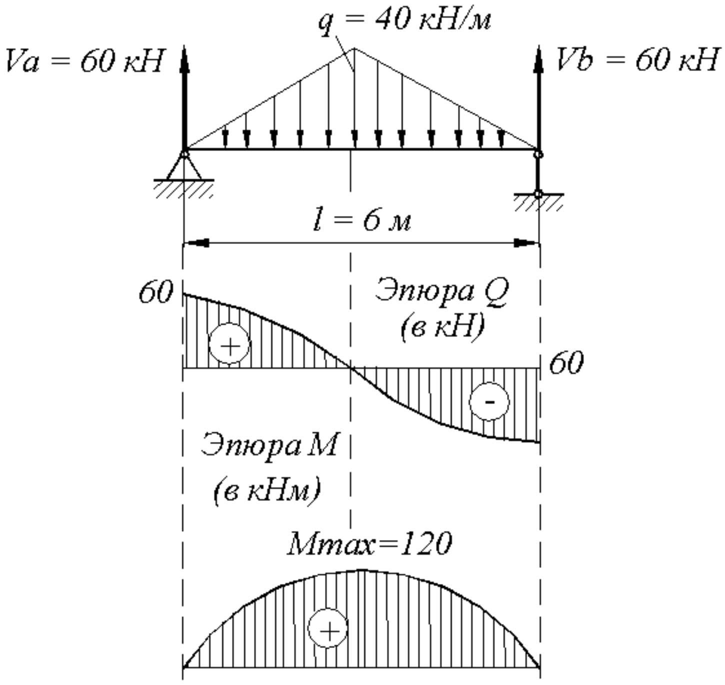

Рис. 6.35

Подбираем поперечное сечение ригеля из условия прочности по нормальным напряжениям: $\sigma_{max} = M_{max}/W \le [\sigma]$, отсюда

$$W = M_{max}/[\sigma] = 120/(150\cdot 10^3) = 0{,}8\cdot 10^{-3}\ м^3 = 800\ см^3.$$

Пользуясь ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр №36 с W_X=743 см^3.

Проводим проверку прочности: $\sigma_{max} = (120\cdot 10^{-3})/(743\cdot 10^{-6}) = 161{,}5$ МПа, тогда $\{[\sigma] - \sigma_{max}\}/\{[\sigma]\cdot 100\%\} = (150 - 161)/150\cdot 100\% = -7{,}66\% > 5\%$.

Принимаем №40 с W_X = 953 см^3.

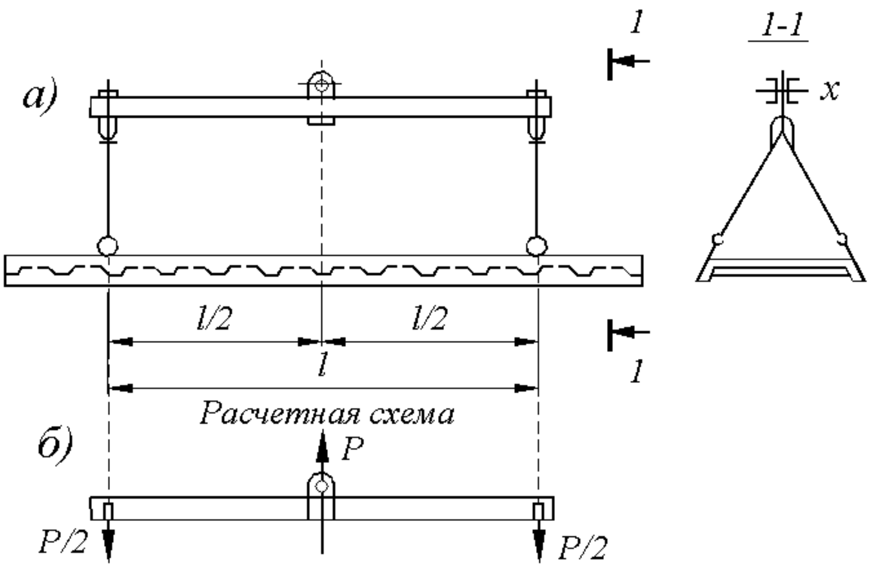

Рис. 6.36

Пример. Траверса подъемного крана длиной $l = 8$ м, состоит из двух швеллеров №30 (Рис. 6.36). Определить ее грузоподъемность, если допускаемое напряжение стали $[\sigma] = 150$ МПа.

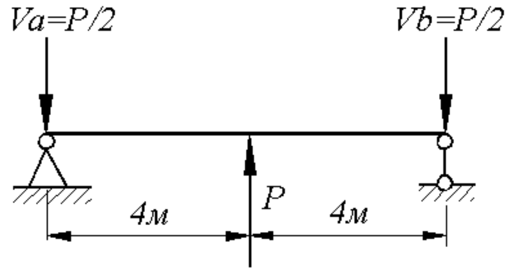

Рис. 6.37

Р е ш е н и е. Вес поднимаемого груза поровну распределяется между точками подвеса. Он прикладывается к траверсе в виде двух сосредоточенных сил P/2, действующих вниз и уравновешиваемых противоположно направленной силой P. Таким образом, траверса работает как простая двухопорная балка, нагруженная посередине вертикальной сосредоточенной силой (Рис. 6.37).

Наибольший изгибающий момент возникнет в сечении под силой P и будет равен $M_{max} = Pl/4 = 8P/4 = 2P$ (Рис.6.38).

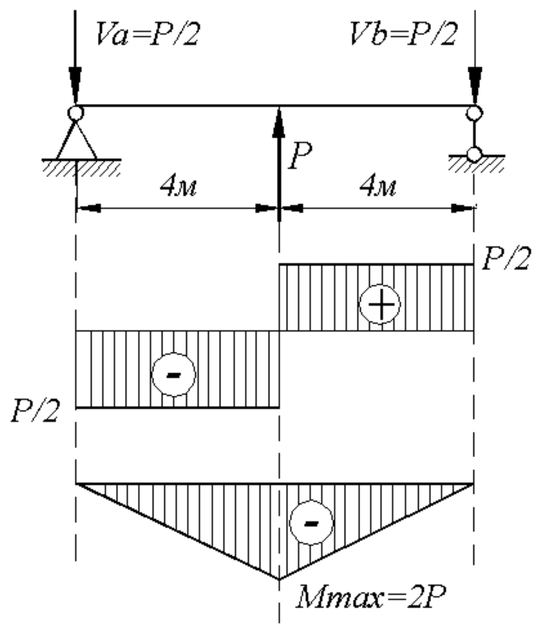

Рис. 6.38

Для определения грузоподъемной силы воспользуемся условием прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = M_{max}/W \le [\sigma],$$

отсюда

$$M_{max} = 2P = [\sigma]W, \text{ тогда}$$

$$P = \{[\sigma]W\}/2.$$

Для швеллера №30 $W_X = 387$ см^3 (ГОСТ 8240–89), тогда

$$2W_X = 774 \text{ см}^3 = 774 \times 10^{-6} \text{ м}^3,$$

следовательно:

$$P = (150 \cdot 10^3 \cdot 774 \times 10^{-6})/2 = 58{,}05 \text{ kH}$$

Грузоподъемность траверсы определим, разделив грузоподъемную силу на ускорение свободного падения g:

$$m = P/g = 58{,}05/9{,}81 = 5{,}9 \cdot 10^3 \text{ кг} = 5{,}9 \text{ т}.$$

Пример . При боковом заносе автомобиля на его колеса действуют реакции $R = 8$ кН и усилия бокового скольжения $T = 5$ кН. Поперечное сечение А–А – круглое кольцевое с $D = 90$ мм и $d = 80$ мм, радиус колеса $r_K = 400$ мм, $a=180$ мм. Определить величину напряжения, возникающего в сечении А–А (Рис. 6.39).

Р е ш е н и е. 1. Определяем величину изгибающего момента в сечении А–А

$$M = R \cdot a + T \cdot r_K = 8 \cdot 0{,}18 + 5 \cdot 0{,}4 = 3{,}44 \text{ кНм}.$$

2. Определяем величину осевого момента сопротивления поперечного сечения

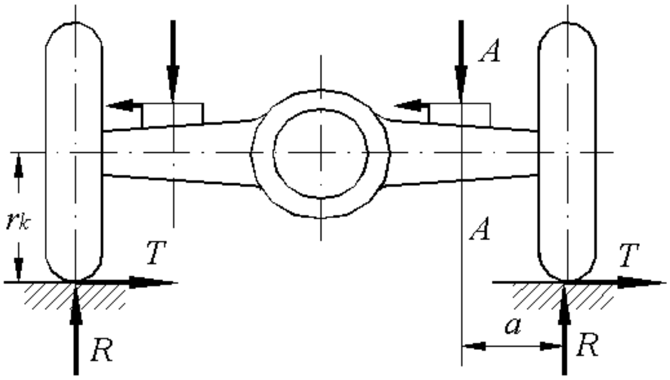

Рис. 6.39

$$W = (pD^3/32)(1 - d^4/D^4) = [3{,}14\cdot (90\cdot 10^{-3})^3/32][1 - (80\cdot 10^{-3})^4/(90\cdot 10^{-3})^4] =$$

$$= 71533{,}13(1 - 0{,}62) = 27039\cdot 10^9 \text{ м}^3 = 27{,}039 \text{ см}^3.$$

3. Определяем величину максимального напряжения в сечении А–А

$$s_{max} = M/W = 3{,}44/27039\cdot 10^{-9} = 0{,}12722\cdot 10^6 \text{ кПа} = 127{,}22 \text{ МПа}.$$

Пример . Для представленной на чертеже балки (Рис. 6.40) подобрать двутавровое поперечное сечение. Проверить ее прочность по нормальным, касательным и главным напряжениям при [s] = 160 МПа.

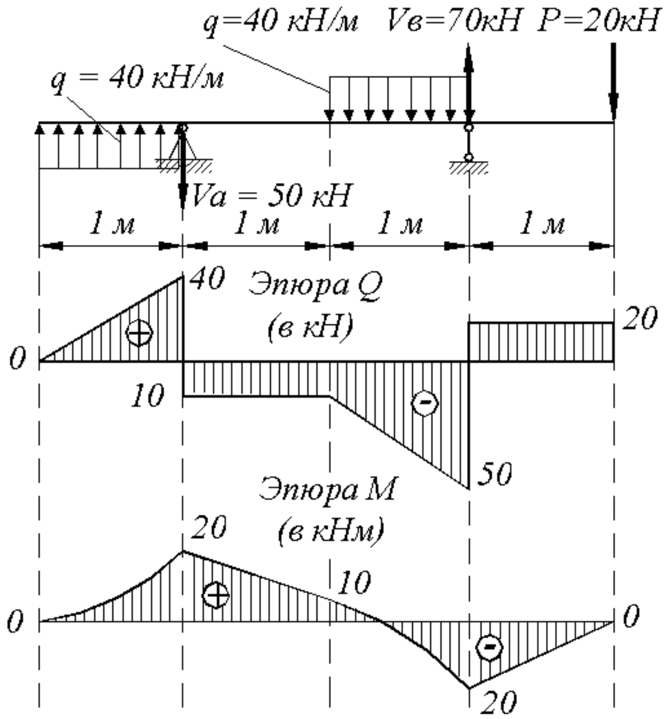

Рис. 6.40

Р е ш е н и е. Определяем величину опорных реакции и строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

П р и м е ч а н и е: *проверьте правильность определения опорных реакций и построение эпюр Q и M.*

Подбираем двутавровое поперечное сечение, исходя из условия прочности по нормальным напряжениям.

$$s_{max} = M_{max}/W \text{ £ } [s];\ W = M_{max}/[s] = 20/160 \cdot 10^{3} = 0{,}125 \cdot 10^{-3}\text{ м}^{3} = 125\text{ см}^{3}.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр №16 с ближайшим значением W_X=109 см^3. Проводим проверку прочности:

$$s_{max} = (20 \cdot 10^{-3})/(109 \cdot 10^{-6}) = 183{,}5\text{ МПа}.$$

Сравниваем допускаемое и максимальное напряжения:

$$\{[s] - s_{max}\}/\{[s]100\%\} = (160 - 183{,}5)/160 \cdot 100\% = 14{,}7\% > 5\%.$$

Следовательно, окончательно примем двутавр №18 с W_X = 143 см^3. Выпишем из ГОСТа основные характеристики профиля, которые понадобятся в дальнейшем расчете: высота сечения h = 180 мм; ширина полки сечения b = 90 мм; толщина стенки d = 5,1 мм; средняя толщина полки t = 8,1 мм; осевой момент инерции относительно нейтральной оси I_X = 1290 см^4; статический момент площади полусечения $S_{(Y)}$ = 81,4 см^3.

Проводим проверку прочности по касательным напряжениям. Допускаемое напряжение [t] = 0,5[s], [см. формулу (1.15)] составит [t]=80МПа. Для проверки прочности воспользуемся формулой (6.10):

$$t_{max} = Q_{max}S_{max}/bI = (50 \cdot 10^{-3} \cdot 81{,}4 \cdot 10^{-6})/(5{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}) = 61{,}86\text{ МПа} < 80,$$

следовательно, условие прочности по касательным напряжениям удовлетворяется.

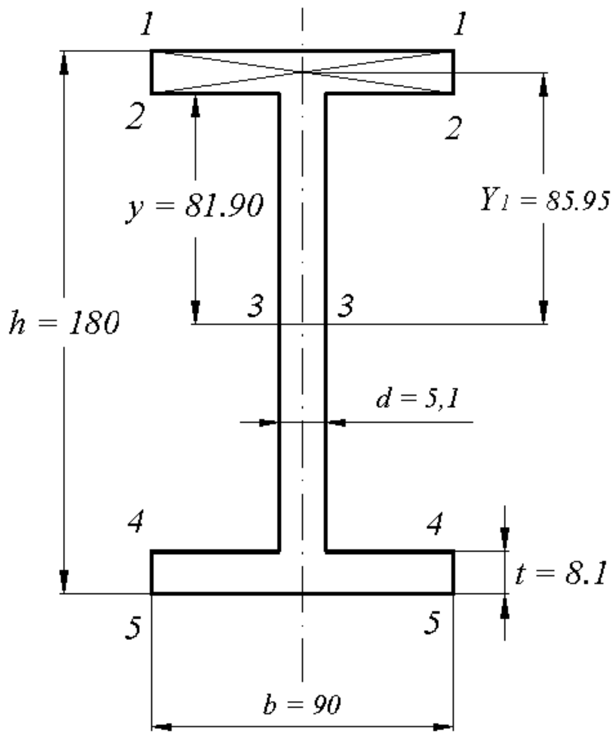

Рис. 6.41

Так как в одном и том же поперечном сечении балки поперечная сила и изгибающий момент имеют максимальные значения, а сечение балки является двутавровым (Рис.6.41), проводим проверку прочности по главным напряжениям. Выбираем четвертую теорию прочности [см. формулу (6.13)]. Для того чтобы определить величины нормального и касательного напряжения в подкоренном выражении, строим эпюры их распределения по сечению балки. С этой целью подсчитаем нормальные и касательные напряжения в пяти сечениях двутавра.

Ранее было установлено, что нормальные напряжения достигают максимальной величины на поверхности балки и равны нулю у нейтральной оси (Рис. 6.6).

Тогда $\sigma_{1-1} = \sigma_{5-5} = \sigma_{max} = M_{max}/W = (20\cdot 10^{-3})/(143\cdot 10^{-6}) = 139{,}86$ МПа.

Напряжение $\sigma_{2-2} = \sigma_{4-4}$ определим, пользуясь формулой (6.13):

$$\sigma_{2-2} = \sigma_{4-4} = (M_{max}/I_X)y = [(20\cdot 10^{-3})/(1290\cdot 10^{-8})]81{,}90\cdot 10^{-3} = 126{,}48 \text{ МПа}.$$

Так как на поверхности балки касательные напряжения всегда равны нулю, то $\tau_{1-1} = \tau_{5-5} = 0$. У нейтральной оси касательные напряжения достигают наибольшей величины, то есть $\tau_{3-3} = \tau_{max} = 61{,}86$ МПа. Значения касательных напряжений $\tau_{2-2} = \tau_{4-4}$ определим по формуле (6.9) при двух значениях b:
при b равном ширине полке (b = 90 мм); при b равном толщине стенки (b=5,1мм). Прежде определим

$$S_{(Y)} = F_{полки}y = bt(h/2 - t/2) = 9\times 0{,}81(9 - 0{,}405) = 62{,}657 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{2-2} = \tau_{4-4} \text{ (при b=90 мм) } =$$

$$= (50\cdot 10^{-3}\cdot 62{,}657\cdot 10^{-6})/(90\cdot 10^{-3}\cdot 1290\cdot 10^{-8}) = 2{,}69 \text{ мПа};$$

$$\tau_{2-2} = \tau_{4-4} \text{ (при b = 5,1 мм) } =$$

$$= (50\cdot 10^{-3}\times 62{,}657\cdot 10^{-6})/(5{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 1290\cdot 10^{-8}) = 47{,}62 \text{ МПа};$$

По полученным данным строим эпюры (Рис. 6.42).

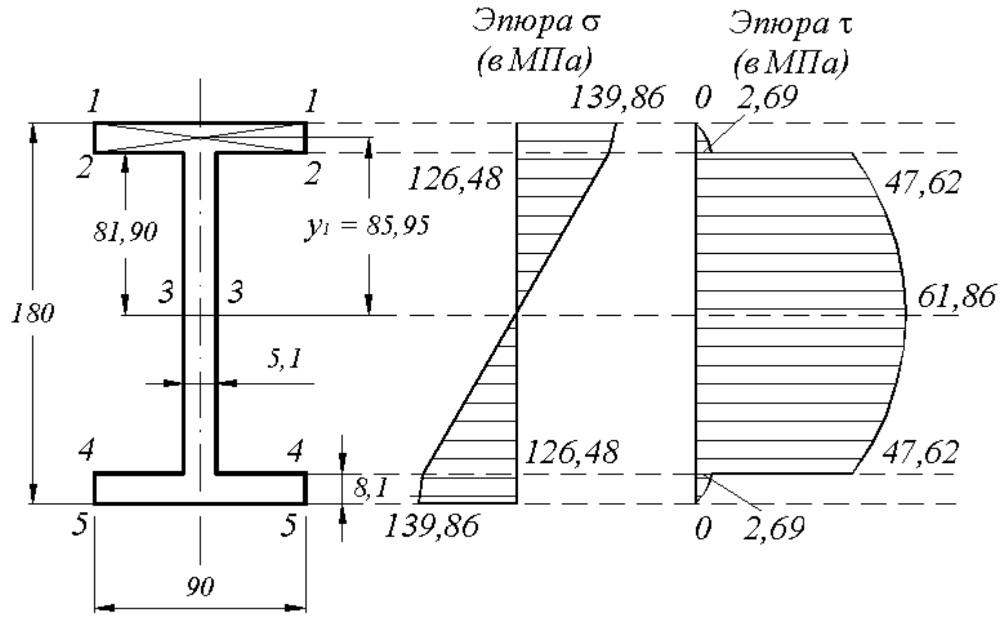

Рис. 6.42

Подставляем в формулу (6.13) значения напряжений σ_{2-2} и τ_{2-2} (при b=5,1мм), близкие к максимальным значениям σ_{max} и τ_{max}:

$$\sigma_{расч.4} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = (126{,}48^2 + 3\cdot 47{,}62^2)^{1/2} = 150{,}99 \text{ МПа}.$$

Видно , что $\sigma_{расч.4} < [\sigma]$ (150,99 МПа < 160 МПа). Следовательно, условие прочности по главным напряжениям удовлетворяется и окончательно принимаем для балки двутавровое сечение №18.

Пример Изогнутая рама машины подвергается действию двух сил Р по 8 кН каждая (Рис. 6.43). Найти краевые напряжения в сечении АВ. Радиус оси R_0 = 80 мм; сечение прямоугольное 80×30 мм.

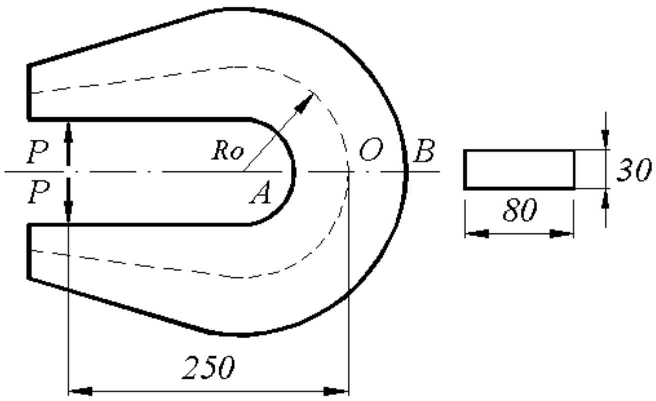

Рис. 6.43

Р е ш е н и е. 1. Находим радиус нейтрального слоя [см. формулу (6.18)]:

$$r = h/[\ln(R_1/R_2)].$$

В нашем случае: h = 80 мм, R_1 = 120 мм, R_2 = 40 мм, следовательно

$$r = 80/[\ln(120/40)] = 80/1{,}099 = \\ = 72{,}8 \text{ мм}.$$

2. Определяем z_0 (расстояние от центра сечения до нейтральной оси):

$$z_0 = R_0 - r = 80 - 72{,}8 = 7{,}2 \text{ мм} = 7{,}2\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

3. Определяем величину статического момента сечения:

$$S = Fz_0 = 80\cdot 30\cdot 7{,}2 = 17280 \text{ мм}^3 = 17280\cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

4. Определяем расстояния от нейтральной оси до точек А и В:

$$z_1 = h/2 + z_0 = 40 + 7{,}2 \text{ мм} = 47{,}2 \text{ мм} = 47{,}2\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

$$z_2 = h/2 - z_0 = 40 - 7{,}2 \text{ мм} = 32{,}8 \text{ мм} = 32{,}8\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

5. Определяем величину изгибающего момента относительно центра тяжести сечения:

$$M = P\cdot 0{,}25 = 8\cdot 0{,}25 = 2 \text{ кНм}.$$

Кроме того, очевидно, что нормальное усилие N = 8 кН, а площадь поперечного сечения $F = 80\cdot 30 = 2400$ мм^2 = $2400\cdot 10^{-4}$ м^2.

6. Определяем, пользуясь формулой (6.20), напряжения в точках А и В (σ_1 и σ_2):

$$\sigma_1 = [8/(2400\cdot 10^{-4})] + [2/(17280\cdot 10^{-9})](32{,}8\cdot 10^{-3}/40\cdot 10^{-3}) = \\ = (3{,}3 + 94{,}8)\cdot 10^3 = 98{,}1\cdot 10^3 \text{ кПа} = 98{,}1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = [8/(2400\cdot 10^{-4})] - [2/(17280\cdot 10^{-9})](47{,}2\cdot 10^{-3}/20\cdot 10^{-3}) = \\ = (3{,}3 - 45{,}5)\cdot 10^3 = -42{,}2\cdot 10^3 \text{ кПа} = -42{,}2 \text{ МПа}.$$