Определение касательных напряжений при изгибе

При выводе формулы касательных напряжений Д.И. Журавский высказал следующие предположения (Рис. 6.8):

1. Направление всех касательных напряжений в поперечном сечении параллельно поперечной силе Q, которая является их равнодействующей;

2. Касательные напряжения, действующие по площадкам, расположенным на одном и том же расстоянии z от нейтральной оси, равны между собой.

Эти допущения подтверждаются теорией упругости для балок прямоугольного поперечного сечения, если их высота больше ширины.

Возьмем балку, нагруженную внешними усилиями (Рис. 6.9). Выделим двумя поперечными сечениями участок длиной dx.

Допустим, что в левом сечении будут действовать касательные напряжения t, направленные вверх. Тогда в правом сечении в соответствии с законом парности касательных напряжений [см. формулу (3.4)] они будут направлены вниз (рис. 6.10). Также в этих сечения будут направлены и поперечные силы, которые складываются из касательных напряжений.

Величина обеих поперечных сил будет примерно одинакова, так как расстояние dx между сечениями является бесконечно малым. Но закону парности касательных напряжений они будут действовать и по продольным сечениям балки, параллельным нейтральному слою. Следовательно, если на расстояниях z и z + dz от нейтральной оси вырезать элемент с ребрами b, dx и dz, то по взаимно перпендикулярным площадкам будут действовать равные по величине, но противоположные по направлению касательные напряжения τ (Рис. 6.11).

Так как продольные волокна балки при ее деформации не давят друг на друга, то по сечениям балки, параллельным нейтральному слою, нормальные напряжения возникать не будут. Следовательно, мы можем заменить вычисление касательных напряжений τ, действующих в поперечном сечении балки, вычислением равных им напряжений по продольному сечению, параллельному нейтральному слою.

Вырезанный из балки элемент длиной dx изобразим в аксонометрии. Он будет находиться в равновесии от действия внутренних усилий. Как уже было сказано выше, поперечные силы будут примерно равны. Изгибающий момент в левом сечении $M_{ЛЕВ}=M$, а в правом– $M_{ПР} = M + dM$ (рис. 6.12). В этом элементе на расстоянии z от нейтральной оси вырежем участок, который будет находится в равновесии от действия в продольном сечении касательных напряжений и действующих по боковым граням нормальных усилий N.

Для составления уравнения равновесия $\Sigma X = 0$ вычислим все внутренние усилия, действующие на выделенный участок, параллельные оси балки X (Рис. 6.13). Элементарное касательное усилие dT, действующее по площадке со сторонами b и dx, определим по формуле: $dT = \tau dF$; так как $dF = bdx$, то $dT = \tau bdx$.

Нормальные усилия dN и dN_1, действующие по элементарным площадкам dF, определим следующим образом: $dN = \sigma dF$, $dN_1 = \sigma_1 dF$.

Для определения напряжений σ и σ_1 воспользуемся формулой (6.3) для определения напряжений в любой точке поперечного сечения.

$$\sigma = Mz_1/I_Y; \ \sigma = [(M + dM)z_1]/I_Y.$$

Тогда для нормальных усилий N и N_1 получим следующие выражения: $dN = (M/I_Y)z_1dF$; $dN_1 = [(M + M_1)/I_Y]z_1dF$.

Суммируя по всей грани сечения (берем интегралы от левой и правой частей полученных выражений для dN и dN_1), получим:

$$N = (M/I_Y)\int_F z_1dF;\ dN_1 = [(M + M_1)/I_Y]\int_F z_1dF.$$

Интеграл $\int_F z_1dF$ представляет собой статический момент части сечения, обозначенной буквами abcd (Рис. 6.12) относительно нейтральной оси Y. Чтобы не путать со статическим моментом всего сечения S_Y, который в данном случае будет равен нулю, обозначим его $S_{(Z)}$. Тогда будет ясно, что $S_{(Z)}$ представляет собой статический момент относительно нейтральной оси части сечения, отстоящей от него на расстояние z. С учетом этого нормальные усилия будут равны:

$$N = (M/I_Y)\,S_{(Z)};\ N = [(M + dM)/I_Y]\,S_{(Z)}.$$

Составляем уравнение равновесия статики $\Sigma X = 0$:

$\Sigma X = 0 = -dT - N + N_1$; $-\tau bdx - (M/I_Y)S_{(Z)} + (M/I_Y)\,S_{(Z)} + (dM/I_Y)S_{(Z)}$, или $-\tau bdx = (dM/I_Y)S_{(Z)}$; решаем это равенство относительно τ: $\tau = dMS_{(Z)}/(bdxI_Y)$.

Так как $dM/dx = Q$ [см. формулу (4.15)], окончательно можем записать:

$$\tau = QS_{(Z)}/Ib, \tag{6.9}$$

где I– осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси, $м^4$;
b– ширина сечения, м.

Для того чтобы записать условие прочности по касательным напряжениям, надо прежде определить величину максимального напряжения. Для этого в формулу (6.9) подставим величину поперечной силы в опасном сечении балки Q_{max} и максимальный статический момент S_{max} (таковым будет является статический момент *половины сечения* относительно нейтральной оси).

$$t_{max} = Q_{max}S_{max}/Ib \pounds [t]. \qquad (6.10)$$

Определим величину касательных напряжений в балке, имеющей прямоугольное сечение (Рис. 6.14).

Для этого в формуле (6.9) определим статический момент части сечения abcd:

$S_{(Z)} = F_{ABCD}z_0$; $F_{ABCD} = b(h/2–z)$; $z_0 = (h/2–z)/2+z = h/4–z/2+z = h/4 + z/2$;

Тогда получим:

$S_{(Z)} = b(h/2 – z)(h/4 + z/2) = b(h^2/8 + hz/4 – hz/4 – z^2/2) = b(h^2/8 – z^2/2) =$
$= (bh^2/8)(1 – 4z^2/h^2)$.

Подставим значение $S_{(Z)}$ в формулу (6.9) и выразим значение осевого момента инерции I из формулы (2.10):

$$t = (12Q/b^2h^3)(bh^2/8)(1 – z^2/h^2);$$

после всех преобразований будем иметь:

$$t = (3Q/2bh)(1 – 4z^2/h^2). \qquad (6.11)$$

Построим эпюру распределения касательных напряжений по прямоугольному поперечному сечению балки. Очевидно, что она будет ограничена параболой второй степени, так как в формуле (6.11) имеется переменная z^2. Определим значения касательных напряжений при z = 0 (у нейтральной оси) и при z = ± h/2 (на поверхности балки).

t (при z = 0) = 3Q/2bh; t (при z = ± h/2) = $(3Q/2bh)(1 – 4h^2/4h^2) = 0$.

По полученным данным строим эпюру (Рис. 6.15).

Таким образом, при изгибе касательные напряжения достигают максимальной величины у нейтральной оси и равны нулю на поверхности балки.

кПа = – 42,2 МПа.