Примеры расчета

Пример 1. Для изображенного на рисунке (Рис. 1) сечения определить положение главных осей инерции и величины главных моментов инерции.

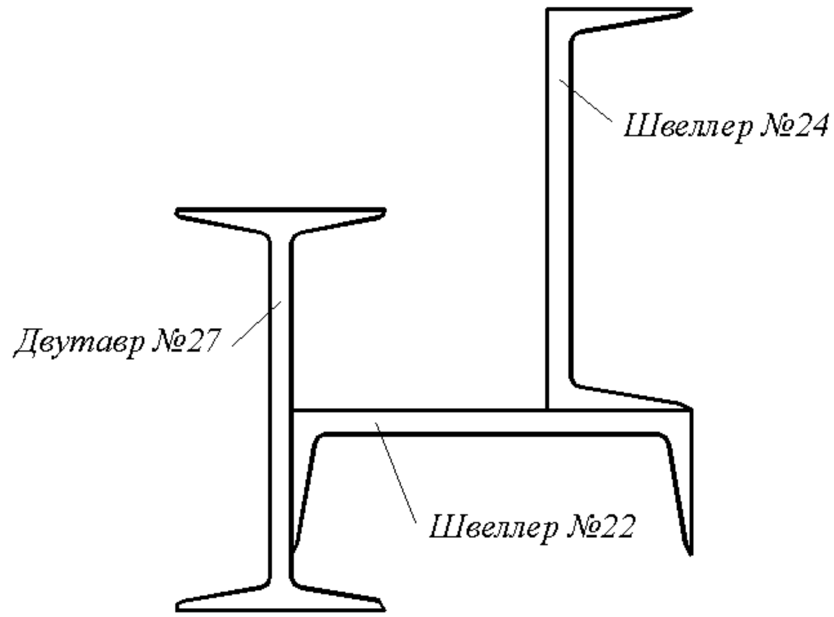

Рис. 1

Р е ш е н и е. 1. Выписываем все данные, необходимые для расчета из ГОСТ 8239–89 и 8240–89.

Для двутавра №27: F_1 = 40,2 см^2; b_1 = 12,5 см; h_1 = 27 см; d_1 = 0,6 см; I_{X1} = 5010 см^4; I_{Y1} = 260 см^4.

Для швеллера №22: F_2 = 26,7 см^2; x_C = 2,21 см; h_2 = 22 см; I_{X2} = 151см^4; I_{Y2} = 2110 см^4.

Для швеллера №24: F_3 = 30,6 см^2; x_C = 2,42 см; h_3 = 24 см; b_3 = 9 см; I_{X3} = 2900 см^4; I_{Y3} = 208 см^4.

2. Определяем положение центра тяжести сечения.

2.1. Пользуясь ГОСТами 8239–89 и 8240–89, проводим центральные оси двутавра и швеллеров через точки C_1, C_2 и C_3 (Рис. 2).

2.2. Принимаем произвольные оси X и Y. Для удобства дальнейших расчетов проводим их через центр тяжести двутавра. Очевидно, что тогда координаты x_1 и y_1 будут равны нулю. Показываем на чертеже координаты центров тяжести швеллеров относительно произвольных осей (Рис. 3).

2.3. Определяем координаты точек c_1, c_2 и c_3 относительно принятых произвольных осей:

x_1 = 0; $x_2 = d_1/2 + h_2/2$ = 3 + 11 = 11,3 см;

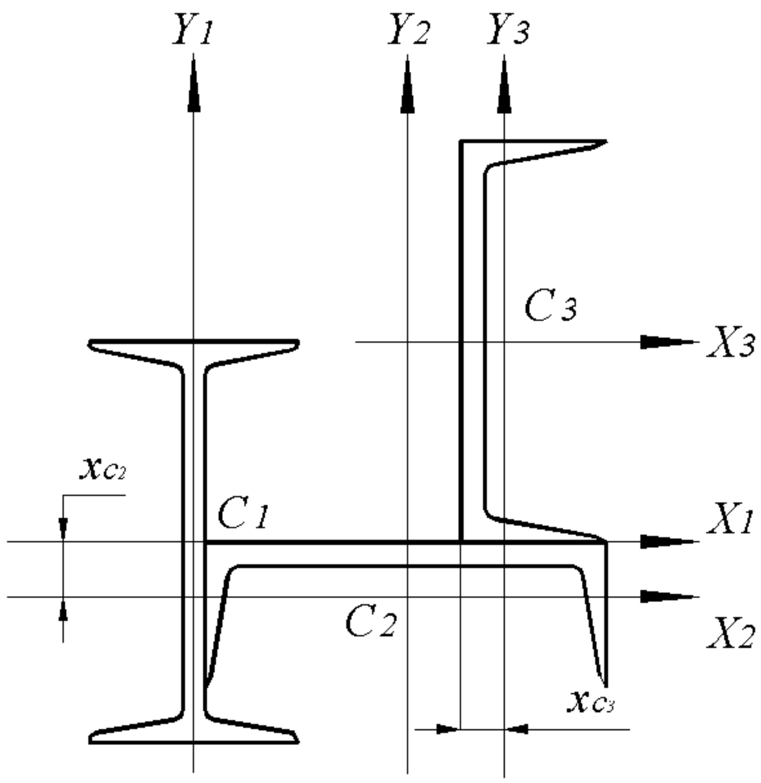

Рис. 2.

$x_3 = d_1/2 + h_2 - b_3 + x_{C3} = 0{,}3 + 22 - 9+ + 2{,}42 = 15{,}72$ см; $y_1 = 0$;
$y_2 = -x_{C2} = -\,2{,}21$ см; $y_3 = h_3/2 = 12$ см.

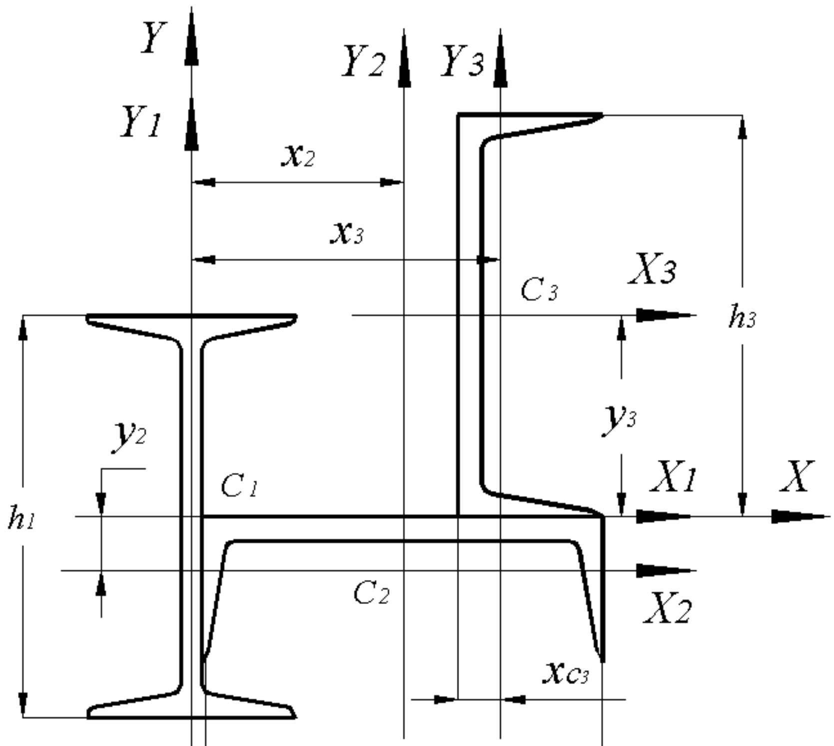

Рис. 3

2.4. Определяем координаты центра тяжести сечения:
$x_C = (F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3)/(F_1 + F_2 + F_3) = (40{,}2\ 0 + 26{,}7\ 11{,}3 + 30{,}6\ 15{,}72)/97{,}5 =$
$= 8{,}03$ см;
$y_C = (F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3)/(F_1 + F_2 + F_3) = [40{,}2\ 0 + 26{,}7\ (-\ 2{,}21) + 30{,}6\ 12]/97{,}5$
=
$= 3{,}16$ см.

2.5. Проводим центральные оси сечения, откладывая полученные координаты от произвольных осей.

3. Находим величины осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.

3.1. Определяем координаты точек центров тяжести двутавра и швеллеров, входящих в сечение, относительно центральных осей (Рис. 4).

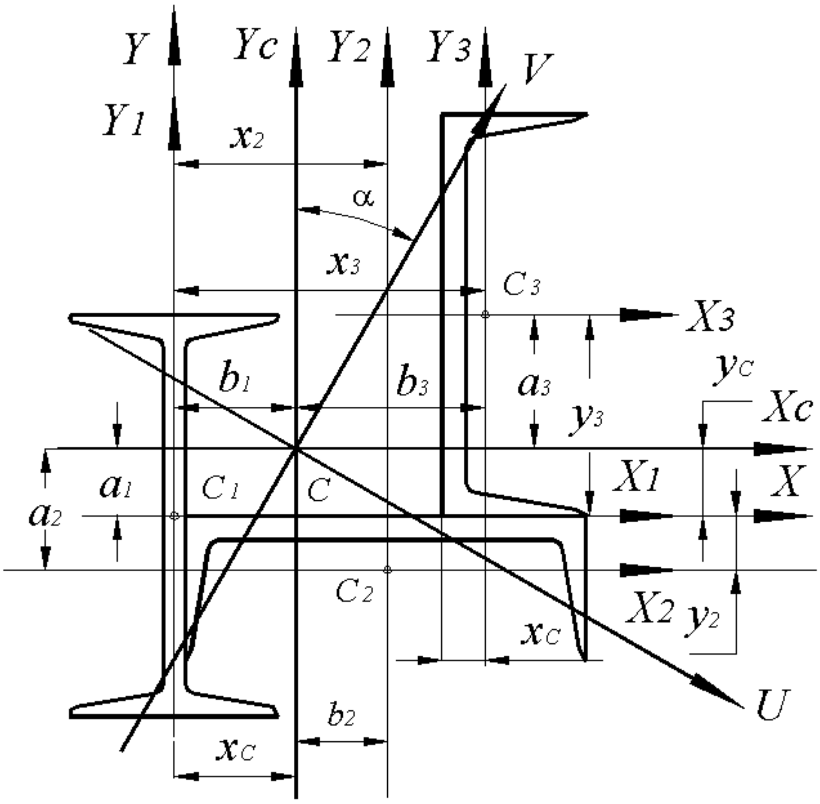

Рис. 4

$a_1 = y_1 - y_C = 0 - 3{,}16 = -\ 3{,}16$ см; $a_2 = y_2 - y_C = -\ 2{,}21 - 3{,}16 = -\ 5{,}37$ см;
$a_3 = y_3 - y_C = 12 - 3{,}16 = 8{,}84$ см; $b_1 = x_1 - x_C = 0 - 8{,}03 = -\ 8{,}03$ см;
$b_2 = x_2 - x_C = =11{,}3 - 8{,}03 = 3{,}27$ см; $b_3 = x_3 - x_C = 15{,}72 - 8{,}03 = 7{,}69$ см.

3.2. Пользуясь формулами перехода к параллельным осям, находим требуемые моменты инерции:

$I_{Xc} = I_{X1} + a_1^2\,F_1 + I_{X2} + a_2^2\,F_2 + I_{X3} + a_3^2\,F_3 = 5010 + (-\ 3{,}16)^2\ 40{,}2 + 151 +$
$+ (-\ 5{,}37)^2\ 26{,}7 + 2900 + 8{,}84^2\ 30{,}6 = 11623{,}62$ см^2;

$I_{Yc} = I_{Y1} + a_1^2\,F_1 + I_{Y2} + b_2^2\,F_2 + I_{Y3} + b_3^2\,F_3 = 260 + (-\ 8{,}03)^2\ 40{,}2 + 2110 +$
$+ 3{,}27^2\ 26{,}7 + 208 + 7{,}69^2\ 30{,}6 = 7265{,}19$ см^4;

$I_{XcYc} = I_{X1Y1} + a_1b_1F_1 + I_{X1Y1} + a_2{\cdot}b_2F_2 + I_{X3Y3} + a_3b_3F_3 =$

$= (-3{,}16)(-8{,}03)\ 40{,}2 + (-5{,}37)\ 3{,}27\ \ 26{,}7 + 8{,}84\ \ 7{,}69\ \ 30{,}6 = 2631{,}39$ см^4.

П р и м е ч а н и е. Так как швеллер и двутавр – сечения симметричные, их центробежные моменты инерции равны нулю.

4. Определяем положение главных осей инерции:

$$\mathrm{tg}\alpha = -2I_{XcYc} / (I_X - I_Y) = -2\ \ 2631{,}39 / (11623{,}62 - 7265{,}19) = -1{,}207.$$

$2\alpha \approx -50^0$; $\alpha \approx -25^0$. Проводим главные оси. Для этого проведем центральные оси на угол 25^0 по часовой стрелке, так как поворот осей осуществлялся против часовой стрелки (Рис.3)

5. По формуле определяем величину главных моментов инерции:

$$I_{max} = 0{,}5[(I_{Xc} + I_{Yc}) + \sqrt{((I_{Xc} - I_{Yc})^2 + 4I_{XcYc}{}^2)}] = 0{,}5[(11623{,}62 + 7265{,}19) +$$

$$+ \sqrt{((11623{,}62 - 7265{,}19)^2 + 4\ \ 2631{,}39^2)}] = 12861{,}02;$$

$$I_{min} = 0{,}5[(I_{Xc} + I_{Yc}) - \sqrt{[(I_{Xc} - I_{Yc})^2 + 4I_{XcYc}{}^2}] = 0{,}5[(11623{,}62 + 7265{,}19) -$$

$$- \sqrt{[(11623{,}62 - 7265{,}19)^2 + 4\ \ 2631{,}39^2}] = 6027{,}80.$$

6. Проводим проверку правильности вычисления главных моментов инерции. Применим для этого формулу (2.22).

$I_{max} + I_{min} = I_{Xc} + I_{Yc}$; $12861{,}02 + 6027{,}803 = 11623{,}62 + 7265{,}19$; $18888{,}82 = 18888{,}82$.

Пример 2. Вычислить главные моменты инерции поперечного сечения (Рис. 5).

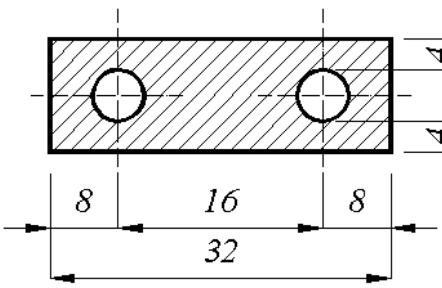

Рис. 5

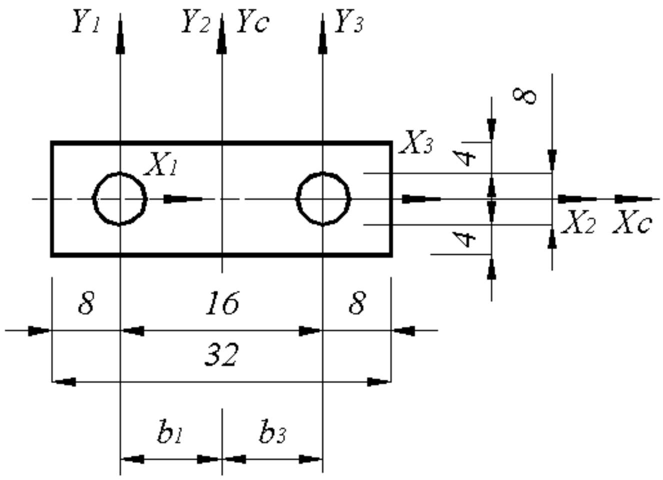

Рис. 6

Р е ш е н и е. 1. Проводим центральные оси прямоугольника и окружностей (Рис. 6). Так как сечение является симметричным, центральные оси прямоугольника будут одновременно и главными осями.

2. Определяем величину главного момента инерции I_{Xc}:

$I_{Xc} = I_{X1} - (I_{X1} + I_{X3}) = I_{X2} - 2I_{X1}$, так как центральные оси всех трех фигур совпадают с осью X_C. Осевые моменты инерции прямоугольника и круга находим по формулам (2.10) и (2.13).

$$I_{Xc} = (bh^3)/12 - 2(\pi d^4)/64 = 32\ 16^3/12 - 2\ 3{,}14\ 8^4/64 = 10520\ см^4.$$

3. Определяем величину главного момента инерции I_{Yc}.

3.1. Мысленно разделим сечение осью Y_C на две фигуры и определим $I_{Y1} = I_{Y3}$. Этот момент инерции определится как разница между моментами инерции квадрата и круга:

$$I_{Y1} = 16^4/12 - 3{,}14\ 8^4/64 = 5260\ см^4.$$

3.2. С помощью формул (2.18) переходим к оси Y_C:

$$I_{Yc} = 2(I_{Y1} + b_1^2 F) = 2(5260 + 8^2\ 16\ 16) = 43288\ см^4.$$

Пример 3. Вычислить главные моменты инерции поперечного сечения (Рис. 7).

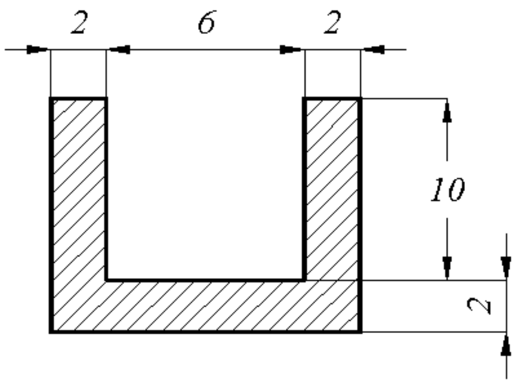

Рис. 7

Р е ш е н и е. 1. Разбиваем сечение на три простых фигуры и в каждой из них проводим центральные оси (Рис. 8).

2. Принимаем, что произвольные оси совпадают с осями X_2 и Y_2. Очевидно, что центральная ось сечения Y_C совпадет с осью Y_2 и будем определять положение только центральной оси X_C.

3. Определяем координаты центров тяжести фигур, входящих в сечение, относительно произвольной оси: X_2; $y_2 = 0$; $y_1 = y_3 = 6$ см (Рис.8).

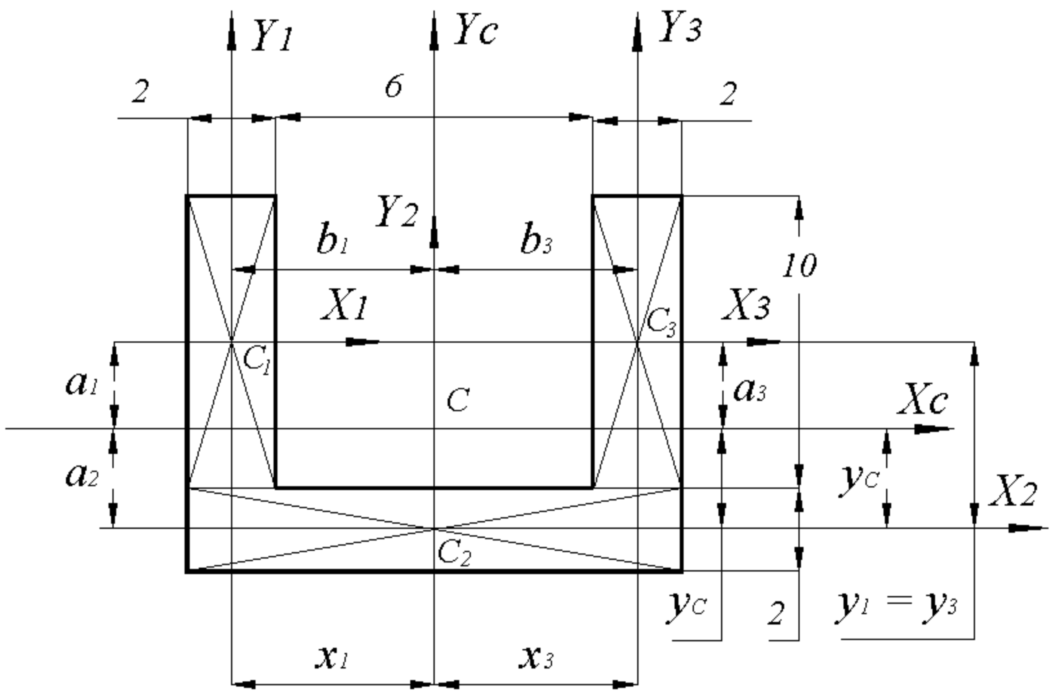

Рис. 8

4. Определяем площади простых фигур:

$$F_1 = F_3 = 10\ 2 = 20\ см^2;\ F_2 = =10\ 2 = 20\ см^2.$$

5. Определяем положение центра тяжести всего сечения:

$$Y_C = (F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3)/(F_1 + F_2 + F_3) = (20\ 0 + 20\ 6 +20\ 6)/60 = 4\ см.$$

6. Откладываем от оси X_2 4 см и проводим центральную ось X_C.

7. Определяем величины координат центров тяжести простых фигур относительно центральных осей.

$a_1 = a_3 = y_1 — y_C = 6 — 4 = 2$ см; $a_2 = y_2 — y_C = 0 — 4 = — 4$ см; $b_1 = —$
4 см;
$b_3 = 4$ см; $b_3 = 0$.

8. Определяем величину главных моментов инерции:

$I_{Xc} = I_{X1} + a_1^2F_1 + I_{X2} +a_2^2F_2 + I_{X3} + a_3^2F_3 = 2\ 10^3/12 + 2^2\ 20 + 10\ 2^3/12 + 4^2\ 20 +$
$+2\ 10^3/12 + 2^2\ 20 = 813{,}3\ см^4;$

$I_{Yc} = I_{Y1} + b_1^2F_1 + I_{Y2} +b_2^2F_2 + I_{Y3} + b_3^2F_3 = 2^3\ 10/12 + 4^2\ 20 + 10^3\ 2/12 + 4^2\ 20 +$
$+ 2^3\ 10\ /12 + 4^2\ 20 = 819{,}99\ см^4.$

Пример 4. Вычислить главные моменты инерции поперечного сечения (Рис. 9).

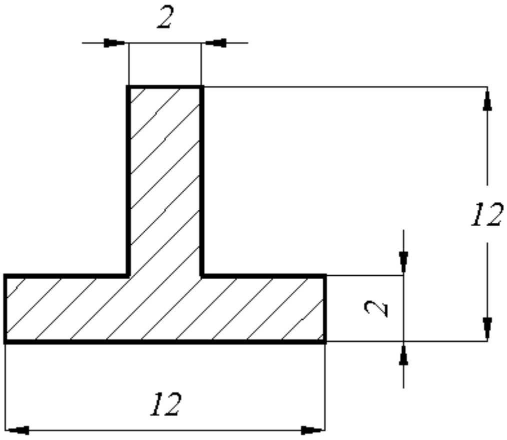

Рис. 9

Р е ш е н и е. 1. Разбиваем сечение на две простых фигуры и в каждой из них проводим центральные оси (Рис. 10).

2. Произвольные оси X и Y проводим через центральные оси нижнего прямоугольника.

3. Так как данное сечение имеет ось симметрии, центральная ось Y_C совпадет с ней и нам остается определить положение оси X_C. Определяем координаты центров тяжести прямоугольников относительно произвольных осей: $y_1 = 0$; $y_2 = 6$ см.

4. Определяем площади прямоугольников:

$$F_1 = 12\ 2 = 24\ см^2;\ F_2 = 10\ 2= 20\ см^2.$$

5. Определяем положение центра тяжести всего сечения:

$$y_C = (F_1y_1 + F_2y_2)/(F_1 + F_2) = (24\ 0 + 20\ 6)\ /44 = 2{,}72\ см.$$

6. Откладываем от произвольной оси X 2,72 см и проводим центральную ось X_C (Рис. 10).

7. Определяем координаты центров тяжести прямоугольников относительно центральных осей:

$a_1 = y_1 —y_C = 0 — 2{,}72 = — 2{,}72$ см; $b_1 = 0$; $a_2 = y_1 — y_C = 6 — 2{,}72 = 3{,}28$ см; $b_2 = 0$.

8. Определяем величину главных моментов инерции:

$I_{Xc} = I_{X1} + a_1^2F_1 + I_{X2} +a_2^2F_2 = 12\ 2^3/12 + 2{,}72^2\ 24 + 2\ 10^3\ /12 + 3{,}28^2\ 20 =$
$= 567{,}39\ см^4;$

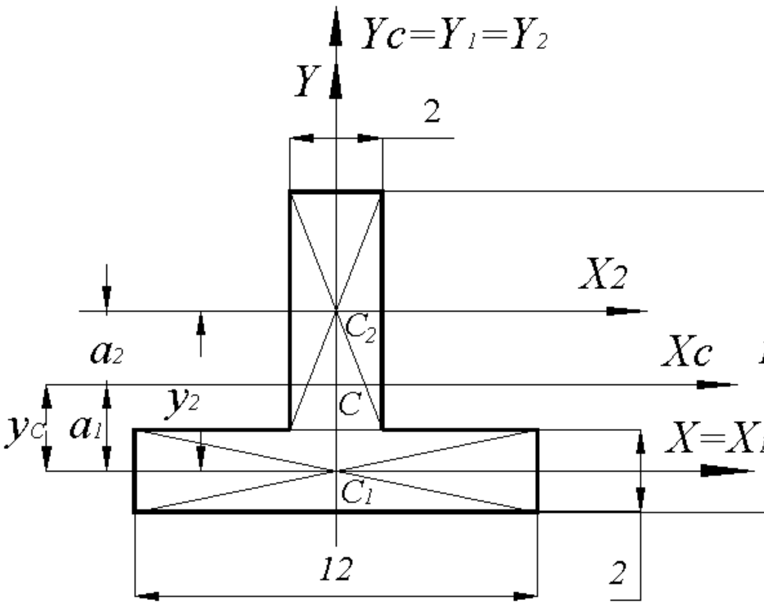

Рис. 10

$I_{Yc} = I_{Y1} + b_1^2F_1 + I_{Y2} + b_2^2F_2 = 12^3\ 2/12 + 0\ 24 + 2^3\ 10/12 + 0\ 20 = 294{,}66$ см^4.

Пример 5. Для заданного сечения определить величину главных моментов инерции (Рис. 11).

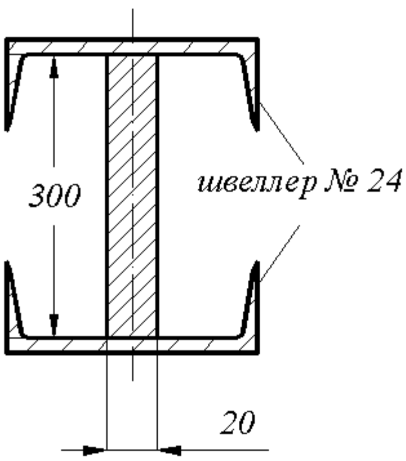

Рис. 11

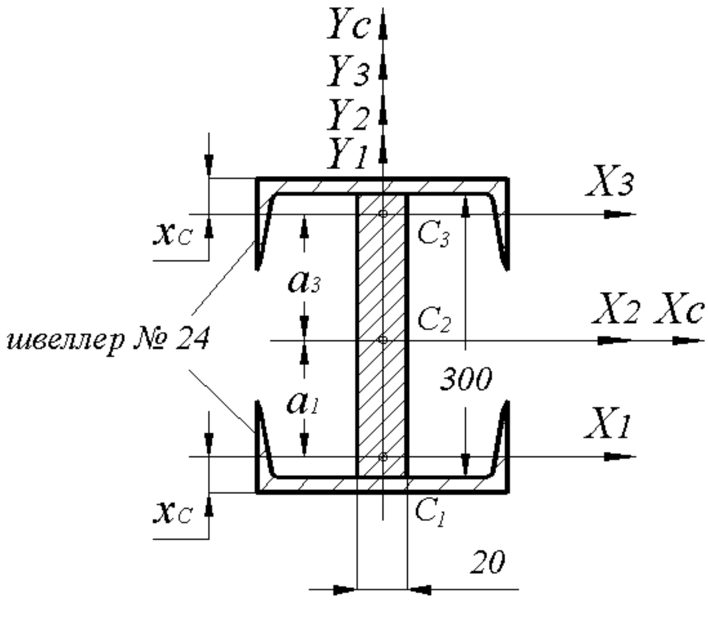

Рис. 12

Р е ш е н и е. 1. Проводим центральные оси фигур, входящих в сечение (Рис. 12).

2. Видно, что центральные оси всех трех фигур Y_1, Y_2, Y_3 совпадают с центральной осью Y_C, поэтому главный момент инерции относительно оси

Y_C, которая одновременно является осью симметрии, следовательно, и главной осью, определится простым суммирование моментов инерции швеллеров и прямоугольника относительно осей Y_1, Y_2 и Y_3.

$$I_{Yc} = I_{Y1} + I_{Y2} + I_{Y3} = 2900 + 2^3\ 30/12 + 2900 = 5820\ см^4.$$

3. Главный момент инерции относительно оси X_C определяем с помощью формул перехода к параллельным осям. Определим вначале координаты a_1, a_2 и a_3: $a_1 = -\ 30/2 - d - (-\ x_C) = -15 - 0{,}56 + 2{,}42 = -\ 13{,}14$ см;
$a_2 = 0$; $a_3 = -\ a_1 = 13{,}14$ см.

П р и м е ч а н и е: *см. ГОСТ 8240–89.*

$$I_{Xc} = I_{X1} + a_1^2F_1 + I_{X2} + a_2^2F_2 + I_{X3} + a_3^2F_3 = 208 + 3{,}14^2\ 30{,}6 + 2\ 30^3\ /12 + $$
$$+ 208 + 3{,}14^2\ 30{,}6 = 101{,}99\ см^4.$$