## Примеры расчета

**Пример 1.** Для заданного стержня (Рис. 1.) построить эпюры нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений при следующих площадях поперечных сечений: $F_l$ = 25 см$^2$, $F_2$ = 15 см$^2$, $F_3$ = 12 см$^2$. Объемный вес $\gamma$ = 78 кН/м$^3$, модуль Юнга Е = 2 10$^5$ МПа.

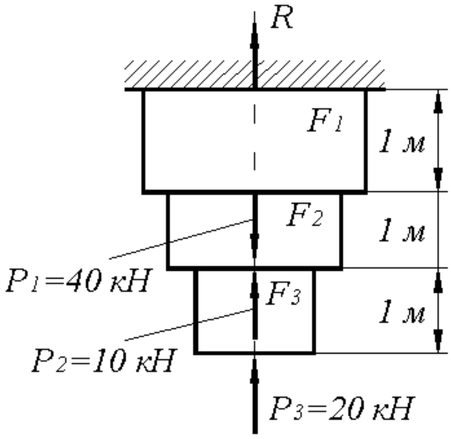


Рис. 1

Р е ш е н и е. 1. Определяем величину реакции заделки стержня

$\Sigma Y = 0 = -P_1+P_2 + P_3 - \gamma F\ 1 - \gamma F_1\ 1 - \gamma P_3\ 1 + R$, тогда

$R = 40 - 10 - 20 + 78\ 25\ 10^4\ \ 1 + 78\ 15\ 10^4\ 1+ + 78\ 12\ 10^{-4} = 10{,}41$ кН.

2. Строим эпюру нормальных усилий:

2.1. Нормальные усилия на первом участке (Рис. 2, а)

$N_1 = R - \gamma F_1 x_1 = 10{,}41 - 0{,}20x_1;\ 0 \le x_1 \le 1$ м;

при $x_1 = 0$, $N_1 = 10{,}41$ кН, а при $x_1 = 1$ м, $N_1 = = 10{,}21$ кН.

2.2. Нормальные усилия на втором участке (Рис. 2, б)

$$N_2 = R - P_1 - \gamma F_1\ 1 - \gamma F_2 x_2 = - 29{,}79 - 0{,}12x_2;\ 0 \le x_2 \le 1 \text{ м};$$

при $x_2 = 0$, $N_2 = -29{,}79$ кН, а при $x_2 = 1$ м, $N_2 = -29{,}91$ кН.

2.3. Нормальные усилия на третьем участке (Рис. 2, в)

$$N_3 = R - P_1 + P_2 - \gamma F_1\ 1 - \gamma F_2 \cdot 1 - \gamma F_3 \cdot x_3 = -19{,}91 - 0{,}09x_3;\ 0 \le x_3 \le 1 \text{ м};$$

при $x_3 = 0$, $N_3 = -19{,}91$ кН, а при $x_3 = 1$ м, $N_3 = -20$ кН.

3. Строим эпюру нормальных напряжений (Рис. 3):

3.1. Нормальные напряжения на первом участке $\sigma_1 = N_1/F_1$,
при $x_1 = 0$, $\sigma_1 = 10{,}41/(25\ 10^{-4}) = 4164{,}0$ кПа = 4,16 МПа, при $x_1 = 1$ м,
$\sigma_1 = 10{,}21/(25\ 10^{-4}) = 4084{,}0$ кПа = 4,08 МПа.

3.2. Нормальные напряжения на втором участке $\sigma_2 = N_2/F_2$,
при $x_2 = 0$, $\sigma_2 = -29{,}79/(15\ 10^{-4}) = -19860{,}0$ кПа = –19,86 МПа, при $x_2 = 1$ м,
$\sigma_2 = -29{,}91/(15\ 10^{-4}) = -19940{,}0$ кПа = –19,94 МПа.

3.3. Нормальные напряжения на третьем участке $\sigma_3 = N_3/F_3$,
при $x_3 = 0$, $\sigma_3 = -19{,}91/(12\ 10^{-4}) = -16590{,}17$ кПа = –16,59 МПа, при $x_3$ =1 м,
$\sigma_3 = -20/(12\ 10^{-4}) = -16667$ кПа = –16,67 МПа.

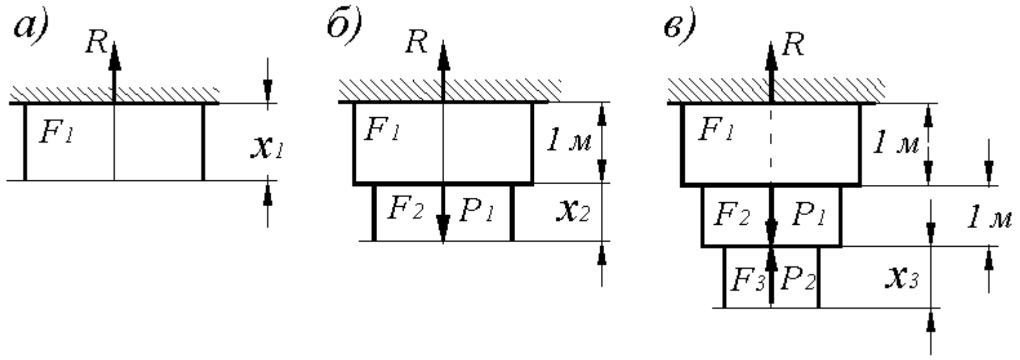


Рис. 2

4. Строим эпюру перемещений $\Delta L$:

4.1. Перемещения на первом участке

$$\Delta L_1 = (Rx_1/EF_1) - (\gamma x_1^2/2E);\ 0 \le x_1 \le l\ м;$$

при $x_l = 0$, $\Delta L_l = 0$; при $x_1 = 1$ м,
$\Delta L_1 = (10{,}41\ 1)/(2\ 10^8\ 25\ 10^{-4}) - (78\ 1^2)/(2\ 2\ 10^8) = 2{,}06\ 10^{-5}$ м.

4.2. Перемещения на втором участке

$\Delta L_2 = [((R - P_1 - \gamma F_1\ 1)\ x_2 / EF_2\ ) - (\gamma x_2^2 / 2E)] + \Delta L_1$, (при $x_1 = 1$ м); $0 \le x_2 \le l$ м,
при $x_2 = 0$, $\Delta L_2 = \Delta L_1$, (при $x_1 = 1$ м) $= 2{,}06\ 10^{-5}$ м,
при $x_2 = 1$ м, $\Delta L_2 = [(10{,}41 - 40 - 78\ 25\ 10^{-4})\ 1/(2\ 10^8\ 15\ 10^{-4})] -$
$- (78\ 1^2)/(2\ 2\ 10^8) + 2{,}06\ 10^{-5} = -7{,}89\ 10^{-5}$ м.

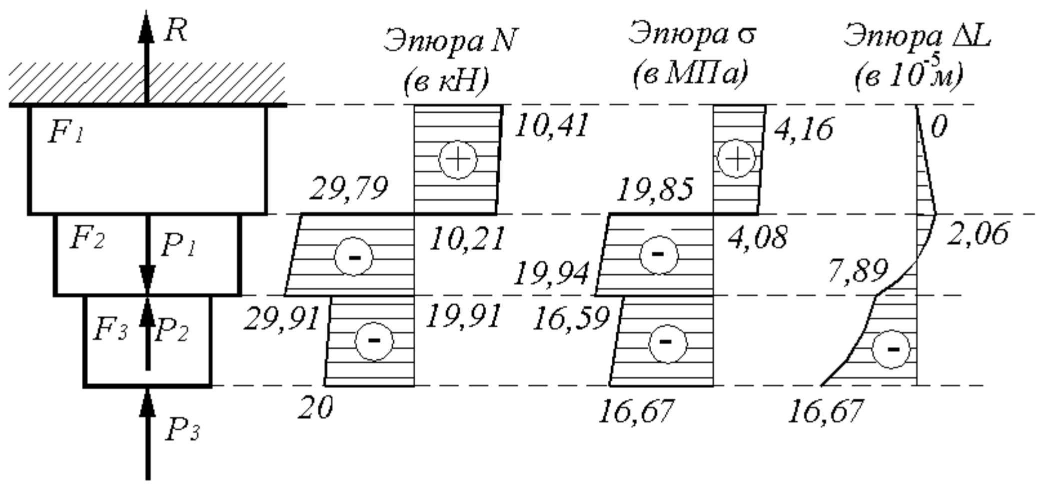


Рис. 3

4.3. Перемещения на третьем участке

$$\Delta L_3 = [(R - P_1 + P_2 - \gamma F_1\ 1 - \gamma F_2\ 1)\ x_3/(EF_3)] - [(\gamma x_3^2)/(2E)] + \Delta L_2;\ (при\ x_1 = 1\ м);$$
$$0 \le x_2 \le l\ м;$$

при $x_3 = 0$, $\Delta L_3 = \Delta L_2$, (при $x_2 = 1$ м) $= -7{,}89 \cdot 10^{-5}$ м;
при $x_3 = 1$ м,

$$\Delta L_3 = [(10{,}41 - 40 + 10 - 78\ 25\ 10^{-4}\ 1 - 78\ 15\ 10^{-4}\ 1)\ 1/(2\ 10^{8}\ 12\ 10^{-4})] -$$
$$- [(78\ 1^{2})/(2\ 10^{8}\ 2)] - 7{,}89\ 10^{-5} = -16{,}2\ 10^{-5} \text{ м.}$$

Строим эпюры нормальных сил, нормальных напряжении и перемещений (Рис. 3).

**Пример 2**. Чугунная колонна кольцевого поперечного сечения имеет наружный диаметр D = 25 см и толщину стенки t = 25 мм. Чему равны относительное и продольное укорочения колонны при нагрузке P = 500 кН. Найти напряжения в поперечном сечении. Высота колонны h = 3 м.

Р е ш е н и е. 1. Определяем величину продольного укорочения колонны $\Delta L$, пользуясь законом Гука:

$$\Delta L = (Ph)/(EF) = (500\ 3)/(1{,}1\ 10^{8}\ F).$$

Так как внутренний диаметр колонны $d = D - 2t = 25 - 5 = 20$ см, то

$$F = (\pi/4)(D^{2} - d^{2}) = 176{,}6 \text{ см}^{2} = 176{,}6\ 10^{-4} \text{ м}^{2}, \text{ тогда}$$

$$\Delta L = (500\ 3)/(1{,}1\ 10^{8}\ 176{,}6\ 10^{-4}) = 7{,}7\ 10^{-4} \text{ м} = 0{,}77 \text{ см.}$$

2. Определяем величину относительного укорочения колонны по формуле:
$\varepsilon = \Delta L/L = 7{,}7\ 10^{-4}/3 = 2{,}57\ 10^{-4}$.

3. Находим напряжение, возникающее в поперечном сечении колонны по формуле (1.8): $\sigma = \varepsilon E = 2{,}57\ 10^{-4}\ 1{,}1\ 10^{8} = = 28270$ кПа = 28,3 МПа.

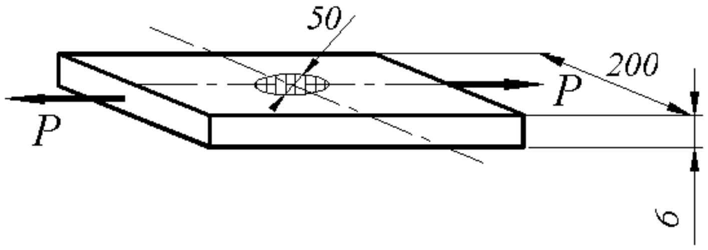


Рис. 4

**Пример 3**. Определить допускаемую растягивающую нагрузку P для балинитового стержня (Рис. 4), если предел текучести $\sigma_T$ = 170 МПа, а коэффициент безопасности k = 3.

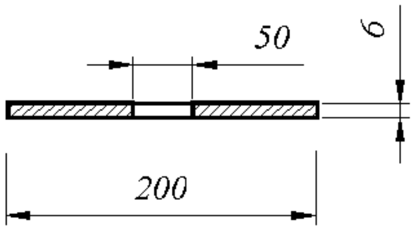


Рис. 5

Р е ш е н и е. 1. Определяем величину допускаемого напряжения;

$$[\sigma] = \sigma_T / n = 170/3 = 56{,}6 \text{ МПа}.$$

2. Определяем величину площади поперечного сечения стержня (Рис.5):

$$F = 20\ 0{,}6 - 5\ 0{,}6 = 9 \text{ см}^2 = 9\ 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3. Определяем величину до пускаемой растягивающей нагрузки:

$$P = [\sigma]\ F = 56{,}6\ 9\ 10^4 = 509{,}4\ 10^{-4} \text{ МН} = 50{,}94 \text{ кН}.$$

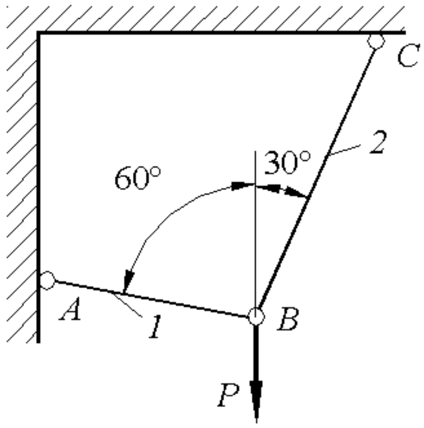


Рис. 6

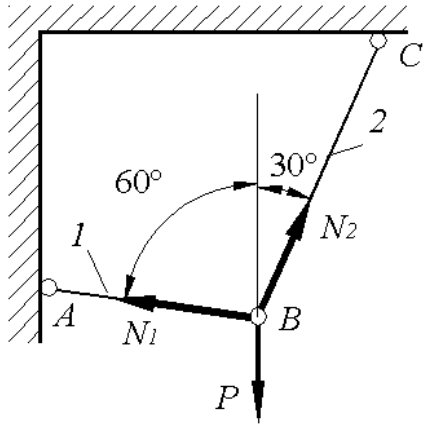


Рис. 7

**Пример 4**. Какой наибольший груз можно безопасно подвесить к шарниру В (Рис. 6), если допускаемое напряжение [σ] = 160 МПа, диаметр первого $d_1$=15мм, а диаметр второго стержня $d_2$ = 20 мм.

Р е ш е н и е. 1. Определяем площади поперечных сечений стержней:

$$F_1 = (\ \pi d_1^2)/4 = (3{,}14\ 225)/4 = 176{,}6 \text{ мм}^2 = 176{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_2 = (\pi d_2^2)/4 = (3{,}14\ 400)/4 = 3{,}14 \text{ мм}^2 = 314\ 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Определяем величины усилий, возникающих в стержнях (Рис. 1.20):

$$N_1 = [\sigma]\ F_1 = 160\ 176{,}6\ 10^{-4} = 2{,}82 \text{ МН};\ N_2 = [\sigma]\ F_2 = 160\ 314\ 10^{-4} = 5{,}02 \text{ МН}.$$

3. Составляем уравнение равновесия статики $\Sigma Y = 0$ и определяем величину наибольшего груза P:

$$\Sigma Y = N_1 \cos 60° + N_2 \cos 30° - P = 0,$$

следовательно $P = N_1 \cos 60° + N_2 \cos 30° = 2{,}82 \cdot 0{,}5 + 5{,}02\ 0{,}86 = 5{,}72$ МН.

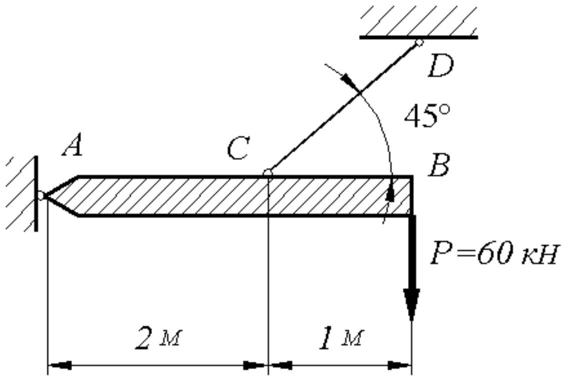


Рис. 8

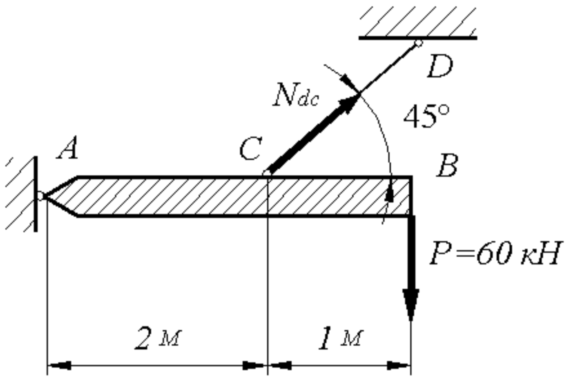


Рис. 9

**Пример 5.** Жесткая балка АВ поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD (Рис. 8). Определить диаметр стержня, если допускаемое напряжение [σ] = 140 МПа.

Р е ш е н и е. 1. Определяем усилие $N_{CD}$, возникающее в стержне (Рис.9). Составляем для этого уравнение равновесия статики $\Sigma M_A = 0$.

$$\Sigma M_A = -P \ 3 + N_{DC} \ 2\sin 45° = 0.$$

Из этого уравнения находим, что $N_{DC} = (3P)/(2 \sin 45 \ ) = (3 \ 60)/(2 \ 0{,}707) = 127{,}3$ Кн.

2. Пользуясь условием прочности по предельным состояниям, определяем площадь поперечного сечения F.

Так как $\sigma_{max} = N_{DC} / F \le [\sigma]$; то $F = N_{DC} / [\sigma] = 127{,}3 \ / 140 \ 10^3 = 0{,}9 \ 10^{-3}$ м$^2$ = 9 см$^2$.

3. Определяем диаметр стержня:

$$F = (\pi d_{DC}^{\ 2}) \ / 4; \ d_{DC} = \sqrt{4F/\pi} = 3{,}38 \text{ см}.$$

**Пример 6.** Стяжка (Рис. 10) диаметром 25 мм усилием Р, вызывающим в нем напряжение 100 МПа. Каким должен быть диаметр $d_ш$, чтобы давление, передаваемое на стену, не превышало 1,4 МПа.

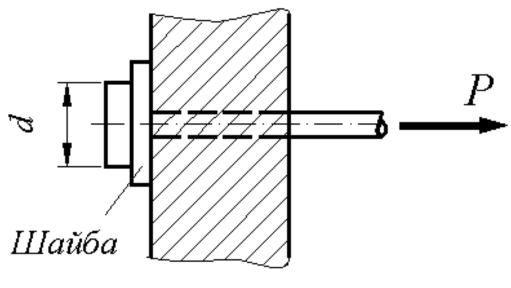


Рис.10

Р е ш е н и е. 1. Определяем усилие Р, возникающее в стяжке.

$$\sigma_{cm} = P/F_{cm}, \text{ тогда } P = \sigma_{cm} F_{cm} =$$

$$= 100 \ [(2{,}5^2\pi) \ / 4] = 490{,}6 \ 10^{-4} \text{ МПа}.$$

2. Так как усилие Р одновременно будет воздействовать и на шайбу, можем записать:

$(F_ш - F_{ст})\ 1,4 = 490,6\ \ 10^{-4}$ МПа, или $[(\pi d_ш^2)/4] - [(\pi d_{сп}^2/4)] = 490,6\ \ 10^{-4}$ МПа.

3.Определяем диаметр шайбы. Делим обе части, полученного выше выражения на $1,4\ \ 10^{-4}$

$$[(\pi d_ш^2)/4] - [(\pi d_{сп}^2/4)] = 350,4\ см^2;\ [(\pi d_ш^2)/4] - [(\pi 2,5^2/4)] = 350,4\ см^2,\ или$$

$$d_ш^2 - 6,25 = 446,37,\ тогда\ d_ш^2 = 452,62,\ следовательно\ d_ш = 21,3\ см.$$

**Пример 7**. Определим диаметр каждого из двух болтов, соединяющий обе части разъемной головки шатуна (Рис. 11). Усилие в шатуне Р = 128 кН, допускаемое напряжение для материала болта [σ] = 60 МПа.

Р е ш е н и е. 1.Пользуясь условием прочности при растяжении и сжатии, определим площадь поперечного сечения болта: $\sigma_{max} = P/2F \le [\sigma]$.

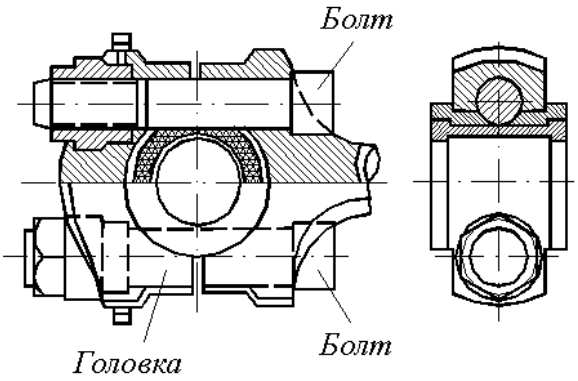


Рис. 11

Так как разъемную головку соединяют два болта, то усилие, действующее на один болт равно Р/2.

$$F = P_{болта}/2[\sigma] = 128/(2\ \ 60\ \ 10^3) =$$

$$= 1,067\ \ 10^{-3}\ м^2 = 1\ 0,67\ см^2.$$

2.Определяем диаметр болта:

$$F = \pi d^2/4;\ d = \sqrt{4F/3,14} =$$

$$= \sqrt{(4\ \ 10,67)/3,14} = 3,7\ см.$$

Определяем напряжение по формуле (1.9): $\sigma = \gamma L = 20\ \ 8 = 160$ кПа.

**Пример 8**. Определить реакции связей в изображенном на рисунке (Рис.12) стержне, если усилие P = 10 кН, площадь поперечного сечения верхней части $F_В$ = 10 см$^2$, площадь поперечного сечения нижней части стержня $F_Н$ = 20 см$^3$, модуль Юнга E = 2 10$^5$ МПа, L = 1 м.

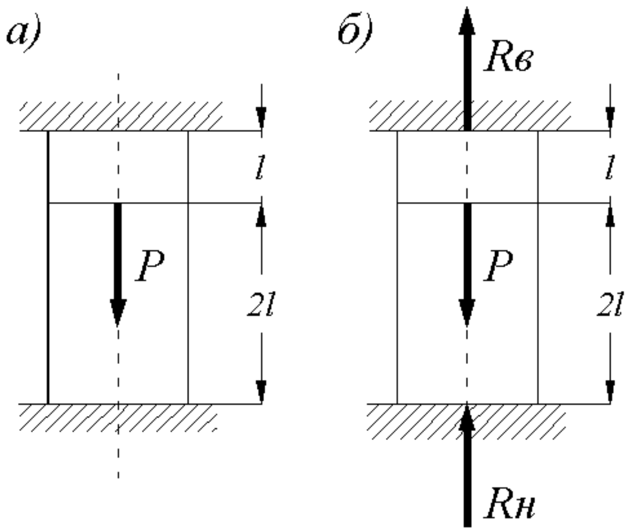


Рис. 12

Р е ш е н и е. 1. Видно, что будут возникать две реакции, для определения которых можно составить только одно уравнение равновесия $\Sigma Y = 0$, то есть степень статической неопределимости

$$n = 2–1 = 1.$$

2. Составляем уравнение равновесия статики.

$$\Sigma Y = 0= R_В + R_Н – P, \text{ тогда}$$

$$R_В = P – R_В. \qquad (a)$$

3. Составляем уравнение совместности деформаций. Очевидно, что суммарная деформация стержня, которая складывается из суммы деформации верхней и нижней частей стержня, будет равна 0, то есть

$$\Delta L = \Delta L_В + \Delta L_Н = 0. \qquad (b)$$

4. Выражаем деформации через закон Гука. Так как нормальные усилия в верхней и нижней частях стержня $N_В = R_В$, а $N_Н = R_В – P$, то

$$\Delta L_В = (R_В L)/(EF_В);\ \Delta L_Н = [2(R_В – P)\ L]/(EF_В),$$

подставляя в уравнение (b), получим:

$(R_В\ 1)/(2\ 10^8 \cdot 10\ 10^4)+[(R_В–10)\ 2]/(2\ 10^8\ 20\ 10^4)=0$ или $2R_В + 2R_В – 20 = 0$, тогда:

$$4R_В = 20 \text{ кН};\ R_В = 5 \text{ кН}.$$

Подставляем в уравнение (a): $R_Н = 10 – 5 = 5$ кН.

**Пример 9.** Определить усилия в стержнях (Рис.1.26,а), поддерживающих жесткую балку, если P = 20 кН, a = l м, b = 2 м, c = 2 м, $\alpha=60°$, $\beta = 45°$, Оба стержня стальные и имеют одинаковую площадь поперечного сечения.

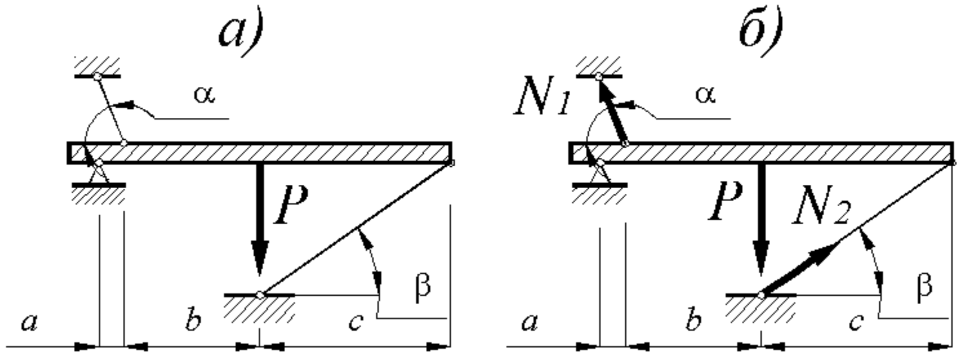


Рис. 12

Р е ш е н и е. 1. Определяем степень статической неопределимости. Имеем два неизвестных усилия и две неизвестные опорные реакции (Рис.12,б). Для заданной системы сил можно составить три уравнения равновесия.

$$n = 4 – 3 = 1.$$

2. Записываем уравнение равновесия статики.

$$\Sigma M_A = N_1 a \sin\alpha - P(a + b) + N_2(a + b + c) \sin\beta = 0, \text{ или}$$

$0,87N_1 - 20\ 3 + 5\ 0,707N_2 = 0.$

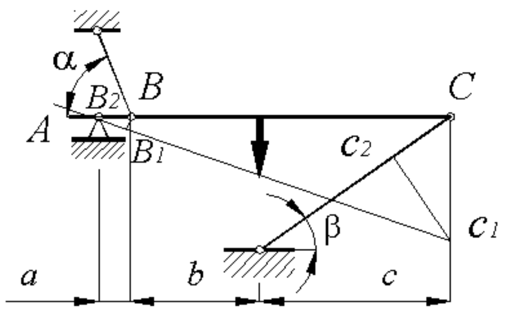


Рис. 13

При упрощении получим:

$0,87N_1 + 3,54N_2 - 60 = 0.$ (a)

3. Составляем уравнение совместности деформаций.

Из схемы деформаций (Рис. 13) видно, что $BB_1/CC_1 = a/(a + b + c)$. Обозначим $BB_1=\Delta_1$, $CC_1=\Delta_2$. Видно также, что $BB_2=\Delta L_1$, а $CC_2=\Delta L_2$. Следовательно: $\Delta_1 = \Delta L_1/\sin\alpha$, $\Delta_2 = \Delta L_2 /\sin\beta$, тогда получим следующее выражение $(\Delta L_1 \sin\beta)/(\Delta L_2 \sin\alpha) = 1/5$ и уравнение совместности деформации будет иметь следующий вид:

$$\Delta L_2 \sin\alpha = 5\Delta L_1 \sin\beta. \qquad (b)$$

Определим длину стержней: $L_1 = a /\cos\alpha$, $L_2 = c /\cos\beta$.

Выражаем деформации в уравнении (b) через закон Гука:

$$(N_2\, c \sin\alpha)/(EF \cos\beta) = 5(N_1 a \sin\beta)/(EF \cos\alpha),$$

или $0{,}87N_2 = 2{,}49N_1$ или $N_2 = 2{,}86N_1$.

Подставляем полученное значение $N_2$ в уравнение равновесия (а): $0{,}87N_1 + 10{,}12N_1 - 60 = 0$, отсюда $N_1 = 5{,}45$ кН, тогда $N_2 = 15{,}58$ кН.

**Пример 10.** Средний стержень конструкции (Рис. 14,а) сделан короче, чем следует на величину $\delta$ = 0,5 мм. Все стержни являются стальными и имеют одинаковую площадь поперечного сечения $F = 10$ см$^2$. Длина среднего стержня $L = 1$ м, а угол $\alpha = 30°$. Требуется определить усилия в стержнях.

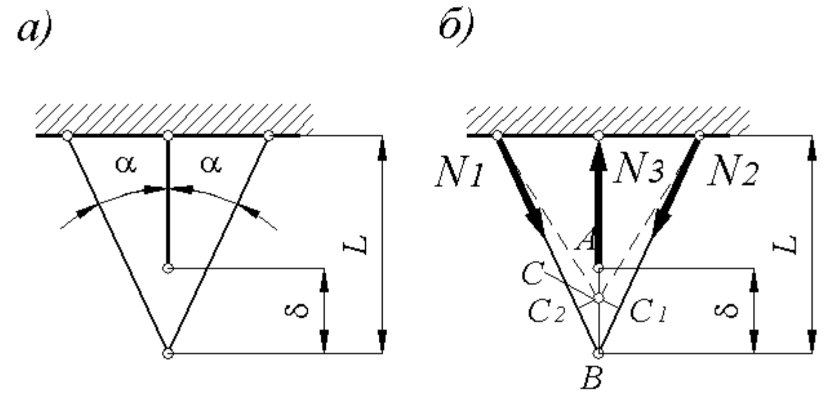


Рис. 14

Р е ш е н и е. Чтобы соединить конец среднего стержня А с концами В крайних стержней в точке С, необходимо средний стержень растянуть на длину $\Delta L_3 = AC$, а крайние сжать на длину $\Delta L_1 = \Delta L_2 = BC_1 = BC_2$.

1. Определяем степень статической неопределимости. Имеем три неизвестных усилия, а уравнении равновесия можем составить только два.

$$n = 3 - 2 = 1.$$

2. Составляем уравнения равновесия статики:

$$\Sigma X = 0 = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha;\ N_1 = N_2; \qquad (a)$$

$$\Sigma Y = 0 = N_3 - 2N_1 \cos\alpha. \qquad (b)$$

3. Составляем уравнение совместности деформаций. Из чертежа (Рис.1.28,б) видно, что $AB = AC + BC$.

Так как $AB = \delta$, $AC = \Delta L_3$, $BC = BC_2/\cos\alpha = \Delta L_1/\cos\alpha$, получим уравнение совместности деформаций: $\delta = \Delta L_3 + (\Delta L_1/\cos\alpha)$.

4. Выразим деформации по закону Гука. Так как $L_1 = L_2 = 1/\cos\alpha$, то $0{,}0005 = (N_3\ 1)/(2\ 10^8\ 10\ 10^{-4}) + (N_1\ 1)/(2\ 10^8\ 10\ 10^{-4}\ \cos^2\alpha)$, или $75 = 0{,}75N_3 + N_1$, тогда

$$N_1 = 75 - 0{,}75N_3. \qquad (c)$$

5. Решаем совместно уравнения (b) и (c).

$$N_3 - 2(75 - 0{,}75N_3)\cos\alpha = 2{,}3N_3 - 130{,}5 = 0,\ \text{то есть}\ N_3 = 56{,}7\ \text{кН}.$$

Подставляем значение $N_3$ в уравнение (с):

$$N_1 = 32{,}4 \text{ кН}.$$

**Пример 11.** Дан стержень, защемленный неподвижно концами при температуре $t_1$ (Рис.15). Найти напряжения, которые возникнут в нем, при изменении температуры до $t_2$. Длина стержня L, площадь поперечного сечения F, модуль упругости E.

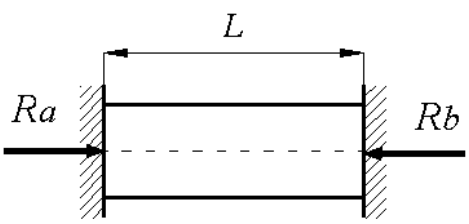


Рис. 15

Р е ш е н и е. 1. Определяем степень статической неопределимости. Имеем две реакции и можем составить только одно уравнение равновесия $\Sigma X=0$.

$$n = 2-1 = 1.$$

2. Составляем уравнение равновесия статики: $\Sigma X = - R_a + R_b = 0$;

$$Ra = Rb = R. \qquad \text{(a)}$$

3. Составляем уравнение совместности деформаций. Очевидно, что температурное расширение стержня будет равно его сжатию от действия реакций R:

$$\Delta L_t = \Delta L_R. \qquad \text{(b)}$$

4. Температурное расширение $\Delta L_t = \alpha(t_2 - t_1)L$,

где $\alpha$ – коэффициент линейного расширения.

Деформацию от действия сил R найдем с помощью закона Гука

$$\Delta L_R = (RL)/(EF).$$

Подставляем значения деформации в уравнение (b):

$$\alpha(t_2 - t_1)L = (RL)/(EF).$$

Так как $R/F = \sigma$, то после приведения к общему знаменателю получим

$$\sigma = \alpha E\,(t_2 - t_1). \qquad (29)$$

В данном случае $\sigma$ представляет собой температурное напряжение.