РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Определение нормальных напряжений при изгибе

Выше указывалось, что изгибающий момент вызывает в сечениях балки нормальные напряжения. Поэтому при их определении необходимо рассмотреть такой случай нагружения, при котором в сечениях балки будут действовать только одни изгибающие моменты, а поперечные силы отсутствовать (Рис. 1).

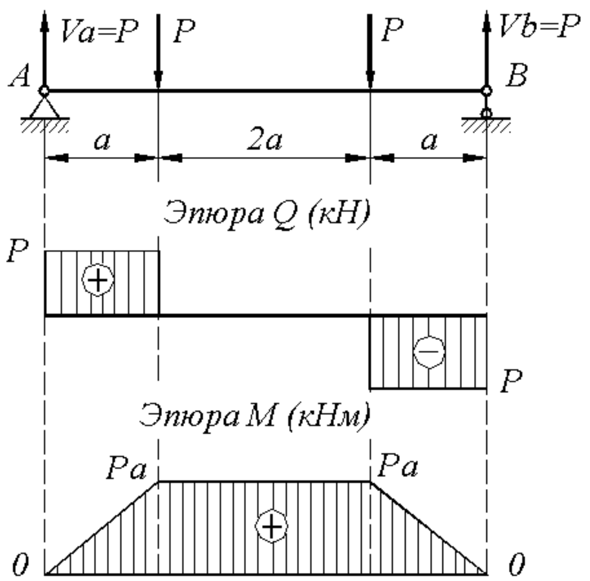

Рис. 1

Видно, что на среднем участке, изображенной на рисунке балки, действуют только изгибающие моменты. Подобный случай называют *чистым изгибом*.

Результаты опытов, проведенных при чистом изгибе, показывают, что отрезки ab и cd соответственно изменяют свою длину: отрезок ab укорачивается, а cd– удлиняется. Из чего можно заключить, что верхние волокна подвергаются *сжатию*, а нижние– *растяжению* (Рис. 2).

Из рисунка видно, что изменяются и поперечные размеры балки. Ширина балки вверху *увеличивается*, что соответствует продольному сжатию, а внизу, в растянутой зоне, *уменьшается*.

Так как деформация продольных волокон по высоте балки меняется непрерывно, то на каком–то уровне мы встретим слой волокон, не изменяющих своей длины. Его называют *нейтральным слоем*, который представляет собой поверхность, разделяющую сжатую зону от растянутой. На рисунке он обозначен дугой ÈOO.

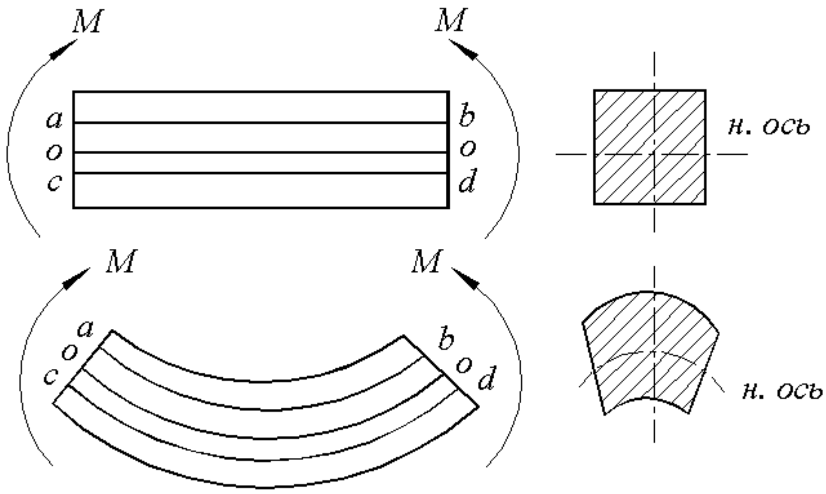

Рис. 2

Нейтральный слой перпендикулярен к плоскости симметрии балки, в которой расположены внешние силы, и пересекает плоскость каждого поперечного сечения по линии, также перпендикулярной к плоскости действия внешних сил. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью* сечения. Таким образом, совокупность всех нейтральных осей представляет собой *нейтральный слой*.

При выводе формулы нормальных напряжений делают следующие допущения:

1. При чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации;

2. Продольные волокна друг на друга не давят и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие;

3. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине сечения, а это значит, что нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются по его ширине одинаковыми.

Кроме этого введем следующие ограничения:

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии и все

внешние силы располагаются в ней;

2. Материал балки подчиняется закону Гука;

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает без коробления и скручивания.

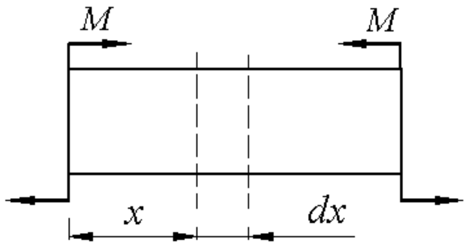

Рис. 3

Рассмотрим средний участок балки, работающий в условиях чистого изгиба (Рис. 3). Проведем поперечное сечение на расстоянии x от левого конца участка.

Отбросим правую часть участка и рассмотрим условия равновесия оставшейся левой части (Рис. 4).

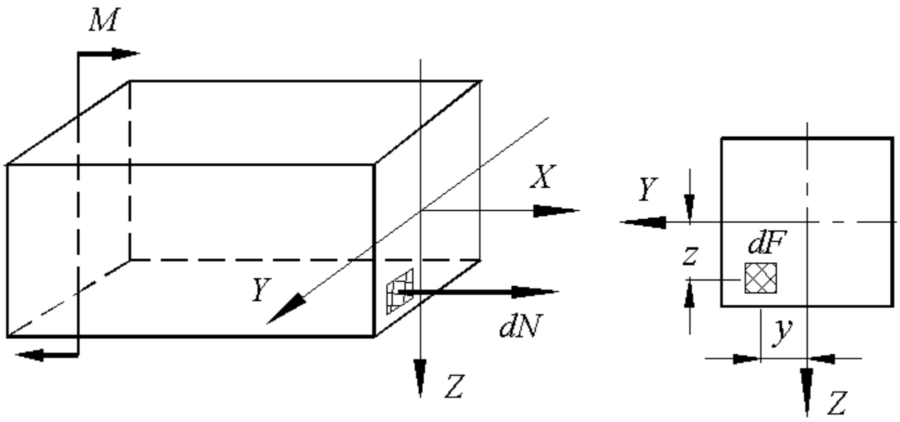

Рис. 4

Покажем оси сечения. Ось Y *(нейтральную ось)* проведем произвольно, так как ее положение нами пока не определено. Ось симметрии обозначим через Z. Ось X проведем перпендикулярно в точку пересечения осей Y и Z. Очевидно, что в каждой точке поперечного сечения действуют нормальные напряжения s. Покажем элементарную площадку dF с координатами y и z и обозначим действующую на нее элементарную силу dN, которую можно определить, пользуясь формулой (1.1): $dN = \sigma dF$.

Левая часть балки находится в равновесии под действием внешних сил и нормальных усилий dN, заменяющих отброшенную часть балки. Для пространственной системы сил можно записать 6 уравнений статики. Запишем вначале уравнения сумм проекций сил на координатные оси:

1. $\Sigma X = 0 = \int_F dN = \int_F \sigma dF; \int_F \sigma dF = 0$, (суммирование усилий dN по всей площади заменено интегрированием);

2. $\Sigma Y = 0 = 0$;

3. $\Sigma Z = 0 = 0$ (последние два уравнения превращаются в тождество). Записываем уравнения моментов относительно осей X, Y и Z:

1. $\Sigma M_X = 0 = 0$ (уравнение превращается в тождество, так как пара сил M момента относительно осей X и Z не дает, а усилия dN параллельны оси X);

2. $\Sigma M_Y = 0 = M - \int_F z dN; \int_F \sigma z dF = M$;

3. $\Sigma M_Z = 0 = \int_F dN y; \int_F \sigma dF y = 0$.

Таким образом, из шести уравнений статики для дальнейших рассуждений можем использовать только три:

1. $\int_F \sigma dF = 0$; 2. $\int_F \sigma y dF = 0$; 3. $\int_F \sigma z dF = M$.

Однако, этих уравнений недостаточно для определения величины нормальных напряжений, так как σ изменяется в зависимости от расстояния z элементарной площадки dF до *нейтральной оси* по неизвестному пока нам закону. В свою очередь расстояние z тоже неизвестно, так как неизвестно положение нейтральной оси Y.

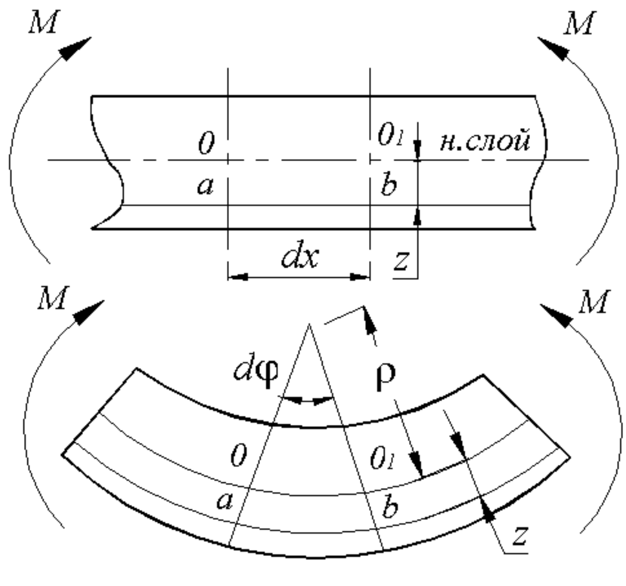

Рис. 5

Рассмотрим деформации балки, а точнее элемента длиной dx. Вид этого элемента до и после деформации изображен на рисунке (Рис. 5). Для ясности чертежа деформации показаны значительно большими, чем они есть на самом деле.

Оба сечения в соответствии с нашим допущением должны остаться плоскими и они повернутся вокруг нейтрального слоя OO_1 на угол dj . Отрезок OO_1, принадлежащий нейтральному слою, сохранит после деформации свою первоначальную длину dx. Найдем удлинение DL волокна ab, отстоящего от нейтрального слоя на расстояние z. Обозначим его первоначальную длину через L = dx или после деформации L = Èoo_1 = dx = r dj . Длину волокна ab после деформации обозначим через L_1 = (r + z)dj . Для определения удлинения DL воспользуемся формулой (3): DL = L_1 – L = (r + z)×dj –

– r dj = zdj . Относительное удлинение e найдем по формуле :

$$e = DL/L = (zdj\ )/(r\,dj\ ) = z/r\,.$$

Подставим полученное относительное удлинение в формулу закона Гука s = eE:

$$s = Ez/r\,.$$

Эта формула показывает, что нормальные напряжения при изгибе прямо пропорциональны расстоянию z до точки сечения, в которой они определяются.

Это связано с тем, что модуль Юнга E и ρ являются в данном случае величинами постоянными. Значит нормальные напряжения по высоте сечения распределены по линейному закону.

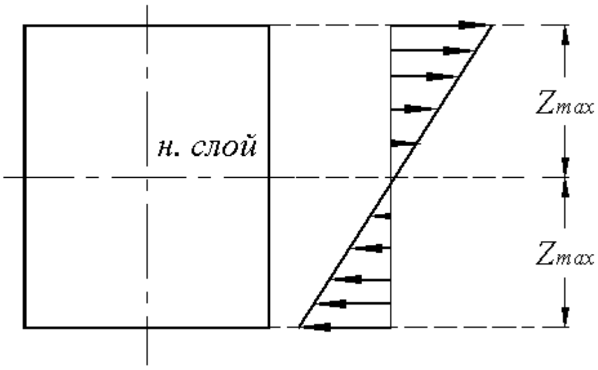

Рис. 6

Видно (Рис. 6), что на поверхности балки нормальные напряжения достигают максимальной величины, а у нейтральной оси они равны нулю.

Формула $\sigma = Ez/\rho$ устанавливает только характер распределения нормальных напряжений по высоте сечения, но ей нельзя воспользоваться для их вычисления, так как нам неизвестны ρ и z, поскольку не известно местонахождение нейтрального слоя.

Подставим в уравнения равновесия (a, b и c) значение напряжения из формулы $\sigma = Ez/\rho$.

Уравнение a:

$(E/\rho)\int_F z\,dF = 0$, так как $(E/\rho) \neq 0$, то можем записать $\int_F z\,dF = 0$.

Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси Y, который всегда равен нулю относительно центральных осей, Следовательно, *нейтральная ось* всегда проходит через *центр тяжести сечения.* Так как центр тяжести лежит также и на оси симметрии Z, то точка пересечения этих осей является центром тяжести поперечного сечения балки. Тогда ось X является осью сечения.

Уравнение b:

$(E/\rho)\int_F zy\,dF = 0$; так как $(E/\rho) \neq 0$, то можем записать $\int_F zy\,dF = 0$.

Этот интеграл представляет собой центробежный момент инерции поперечного сечения. Его равенство нулю свидетельствует о том, что оси Z и Y являются главными осями сечения.

Уравнение с: $(E/\rho)\int_F z^2 dF = M$.

Интеграл $\int_F z^2 dF = I_Y$ является осевым моментом инерции

относительно нейтральной оси Y.

Тогда уравнение статики (с) можно записать в следующем виде:

$$EI/\rho = M.$$

П р и м е ч а н и е. *В дальнейшем нижний индекс у осевого момента инерции сечения I будем проставлять в зависимости от обозначения* нейтральной оси.

Перепишем иначе полученное выражение:

$$E/\rho = M/I.$$

Подставляя найденное значение E/ρ в формулу $\sigma = Ez/\rho$, находим:

$$\sigma = Mz/I,$$

где M– изгибающий момент, возникающий в данном поперечном сечении балки, нм;

I– осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси, $м^4$.

Формула (6.3) служит для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения балки, отстоящей от нейтральной оси на расстояние z.

Таким образом, *нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения балки прямо пропорциональны величине изгибающего момента, действующего в нем и расстоянию точки от нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.*