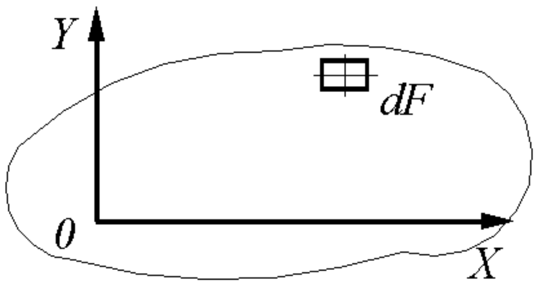
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Геометрической характеристикой при определении напряжений при растяжении или сжатии является площадь поперечного сечения.



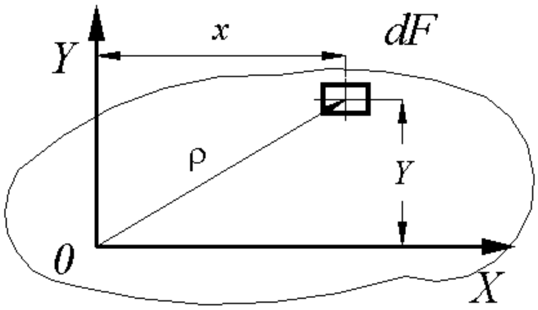


Рис. 1 Рис..2

Если взять какое–либо произвольное поперечное сечение и выделить в нем элементарную площадку dF (Рис. 1), то аналитически площадь можно представить в виде следующего интеграла:

$$F = \int_F dF \qquad (1)$$

Однако при расчетах на кручение и изгиб требуется знание ряда других геометрических характеристик, величина которых зависит от расстояний элементарной площадки до координатных осей или точки их пересечения (Рис. 2).

1. Статические моменты сечений

Статическим моментом сечения относительно какой–либо координатной оси называют интеграл, распространенный по всей его площади, произведения элементарной площадки на ее расстояние до данной оси.

$$S_x = \int_F ydF; \quad S_y = \int_F xdF. \qquad (2)$$

Статические моменты можно также определить по следующим формулам:

$$S_x = y_c F; \quad S_y = x_c F, \qquad (3)$$

где x_C и y_C – координаты центра тяжести сечения.

Следовательно, если сечение является сложным, то есть, составлено из двух или более простых фигур, координаты центра тяжести находят, пользуясь следующими выражениями:

$$x_C = \Sigma(S_Y/F); \quad y_C = \Sigma(S_X/F). \qquad (4)$$

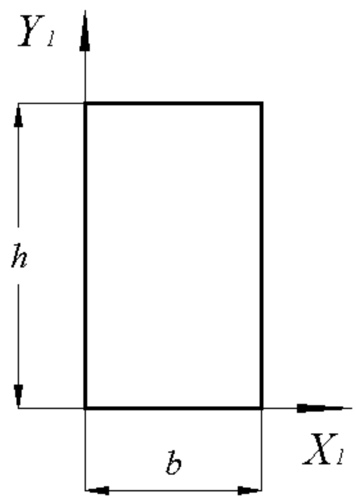


Рис. 3

Из формулы (3) следует, что *статические моменты всегда равны нулю относительно центральных осей сечения.*

Определим величины статических моментов относительно осей X_1 и Y_1 (Рис. 3):

$S_{X1} = y_c F = (h/2)bh = (bh^2)/2$; $S_{Y1} = x_c F = (b/2)bh = (hb^2)/2$.

Статические моменты сечений могут быть как положительными, так и отрицательными. Размерность статических моментов– *мм³, см³, м³* и т.д.

2. Моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения относительно какой–либо координатной оси называют интеграл, распространенный по всей его площади, произведения элементарной площадки на квадрат ее расстояния до данной оси.

$$I_x = \int_F y^2 dF; \; I_y = \int_F x^2 dF. \qquad (5)$$

Осевые моменты инерции сечения имеют только положительные значения. Их размерность— *мм⁴, см⁴, м⁴* и т.д.

Центробежным моментом инерции сечения относительно координатных осей называют интеграл, распространенный по всей его площади, произведения элементарной площадки на ее расстояния до осей.

$$I_{XY} = \int_F xy dF. \qquad (6)$$

Центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным, а его размерность— *мм⁴, см⁴, м⁴* и т.д.

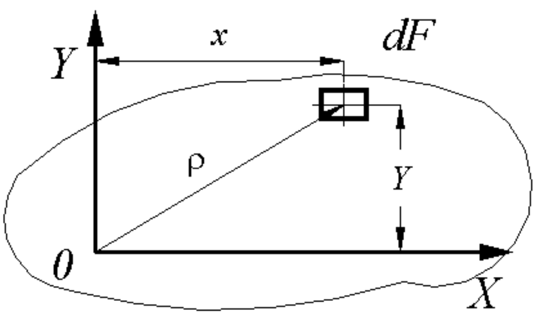


Рис. 4

Полярным моментом инерции сечения относительно точки пересечения координатных осей (полюса) называют интеграл, распространенный по всей его площади, произведения элементарной площадки на квадрат ее расстояния до данной точки.

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \qquad (7)$$

Из рисунка видно (Рис. 2.4), что $\rho_2 = x_2 + y_2$. Тогда формула (2.7) может быть записана в следующем виде:

$$I_{xy} = \int_F (x^2+y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF.$$

Сравнивая полученное выражение с формулами (5) можем записать:

$$I_p = I_X + I_Y. \qquad (8)$$

То есть, полярный момент инерции, взятый относительно точки пересечения координатных осей, равен сумме осевых моментов инерции.

Полярный момент инерции имеет только положительные значения. Его размерность– *мм⁴, см⁴, м⁴* и т.д.

3. Моменты инерции простых сечений

П р я м о у г о л ь н и к. Определим значения осевых моментов инерции относительно осей X_1 и Y_1.

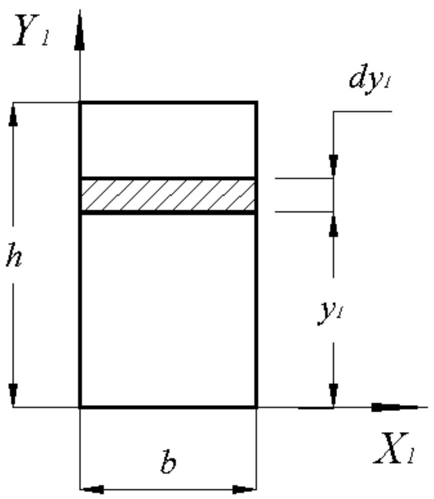


Рис. 2.5

На расстоянии y_1 от оси X_1 выделяем элементарную площадку высотой dy_1 (Рис. 2.5). Ее площадь будет равна $dF = bdy_1$. По формуле (2.5) определим величину осевого момента инерции I_X:

$$I_{X1} = \int_F y_1^2 dF = b\int_0^h y_1^2 dy_1 = b(y_1^3/3)\Big|_0^h =$$

$= (bh^3/3)$, аналогично $I_{Y1} = b^3h/3$.

$$I_{X1} = bh^3/3; \quad I_{Y1} = b^3h/3. \qquad (9)$$

Для такого же прямоугольника определим величину осевых моментов инерции относительно центральных осей. Для этого на расстоянии y от центральной оси X выделим элементарную площадку высотой dy, площадь которой dF = bdy (Рис. 2.6).

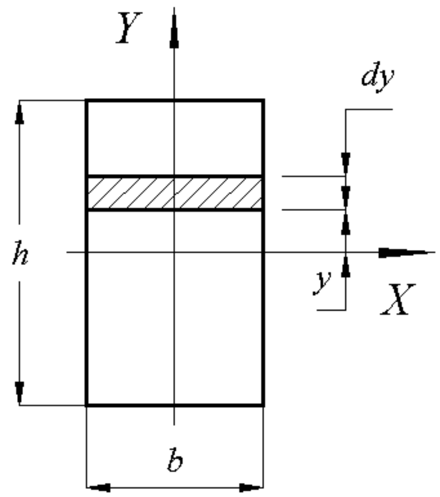


Рис. 6

$$I_X = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dF = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b(y^3/3)\Big|_{-h/2}^{h/2} =$$

$= (–bh^3/24) – [(bh^3/24)] = (bh^3/12)$,

аналогично $I_Y = (b^3h)/12$.

$$I_X = bh^3/12; \;\; I_Y = b^3h/12. \qquad (10)$$

Центробежный момент инерции прямоугольника и прочих симметричных сечений относительно центральных осей всегда будет равен нулю. Определим центробежный момент инерции относительно осей X_1 и Y_1.

На расстоянии X_1 от оси Y_1 и расстоянии Y_1 от оси X_1 выделяем элементарную площадку $dF = dx_1dy_1$ (Рис. 2.7) и записываем значение центробежного момента инерции по формуле (6):

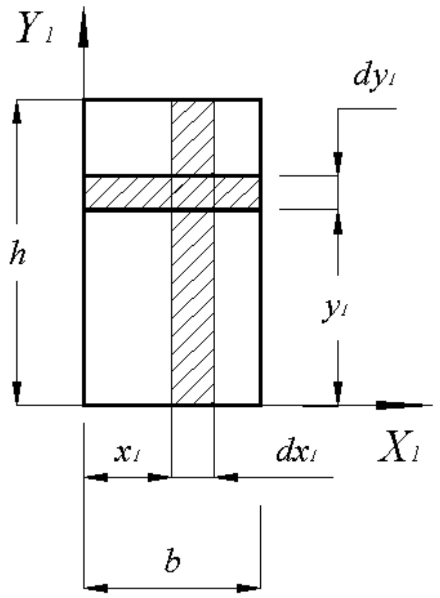


Рис. 7

$$I_{X1Y1} = \int_F x_1y_1dF = \int_0^b x_1dx_1 \int_0^h y_1dy_1 = (x_1^2/2)\Big|_0^b \; (y_1^2/2)\Big|_0^h = (b^2h^2/4).$$

$$I_{X1} = b^2h^2/4. \tag{11}$$

К р у г. Выделим на расстоянии ρ от центра круга элементарную площадку толщиной dρ (Рис. 8). Эту площадку можно представить в виде прямоугольника (Рис. 9).

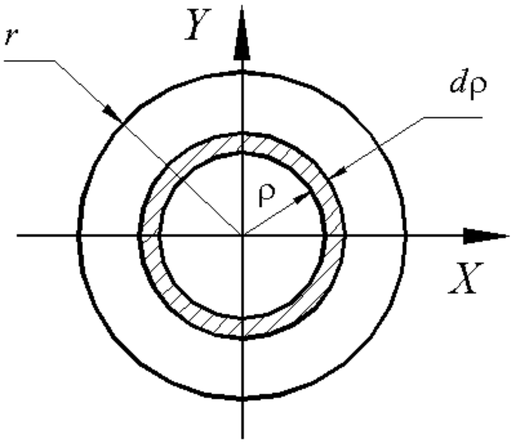


Рис. 2.8

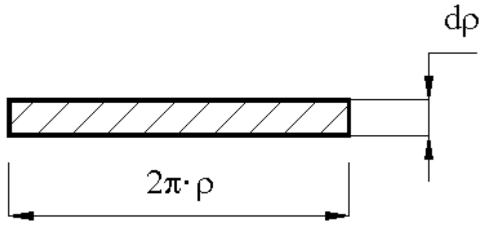


Рис. 2.9

Тогда $dF = 2\pi\rho d\rho$. Запишем значение полярного момента инерции по формуле (7):

$$I_P = \int_F \rho^2 dF = 2\pi\int_0^r \rho^3 d\rho = 2\pi(\rho^4/4)\Big|_0^r = (\pi r^4/2); \text{ так как } r = d/2.$$

$$I_P = \pi d^4/32. \tag{12}$$

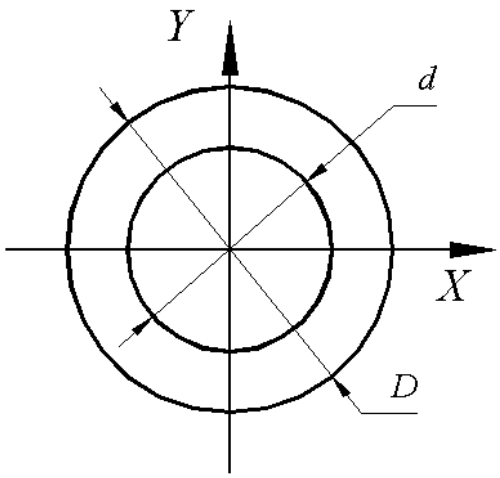


Рис. 10

Воспользовавшись формулой (8), определим значения осевых моментов инерции круга.

Так как для круга $I_X = I_Y$, то $I_p = 2I_X = 2I_Y$. Следовательно

$$I_X = I_Y = I_P/2 = \pi d^4/64. \tag{13}$$

К о л ь ц о. Очевидно, что моменты инерции кольца можно найти как разницу между моментами инерции круга с диаметром D и круга с диаметром d (Рис.10).

Тогда: $I_P = (\pi D^4/32) - (\pi d^4/32)$; вынесем за скобку $(\pi D^4/32)$: $I_P = (\pi D^4/32)(1 - d^4/D^4)$; обозначим $d/D = \alpha$, тогда

$$I_P = (\pi D^4/32)(1 - \alpha^4). \qquad (14)$$

Аналогично для осевых моментов инерции получим:

$$I_X = I_Y = (\pi D^4/64)(1 - \alpha^4). \qquad (15)$$

Т р е у г о л ь н и к. Для приведенного на рисунке (Рис. 2.11) треугольника определим значения осевых моментов инерции относительно осей, проходящих через его основание (Рис. 11) и центр тяжести (Рис.12).

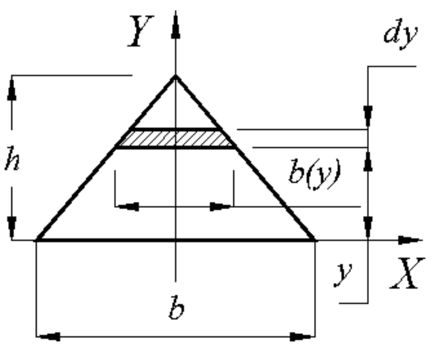


Рис. 11

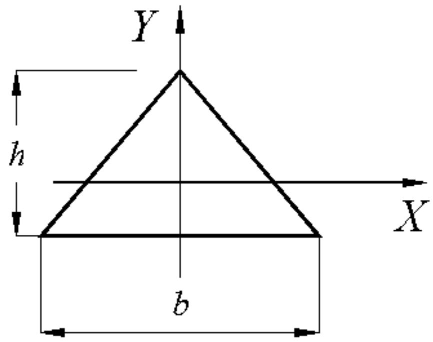


Рис. 12

Выделим на расстоянии y от оси X элементарную площадку, основание которой равно b(y), а высота– dy (Рис. 11).

Тогда $dF = b(y)dy$. В свою очередь b(y) определим из условия подобия маленького и большого треугольников.

$b(y)/b = (h - y)/h$, тогда $b(y) = [b(h - y)/h]$, следовательно:

$dF = [b(h - y)/h]dy$, а значит

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2[b(h - y)/h]dy = b\int_0^h y^2 dy - (b/h)\int_0^h y^3 dy =$$

$$= b(y^3/3)\Big|_0^h - [(b/h)(y^4/4)]\Big|_0^h = (bh^3/3) - (bh^4/4h) = (bh^3/12);$$

$$I_X = bh^3/12. \tag{16}$$

$$I_X = bh^3/36; \quad I_Y = b^3h/48. \tag{17}$$

Аналогичным путем определяются значения моментов инерции относительно центральных осей [см. формулу (17)].

4. Изменение величины осевых моментов инерции при параллельном переносе осей

В произвольно взятом поперечном сечении перенесем параллельно самим себе оси X и Y на расстояния a и b.

Из рисунка (Рис. 2.13) видно, что координаты площадки dF относительно новых осей X_1 и Y_1: $x_1 = x - b$; $y_1 = y - a$, тогда можем записать:

$$I_{X1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y-a)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2a\int_F y\,dF + a^2\int_F dF.$$

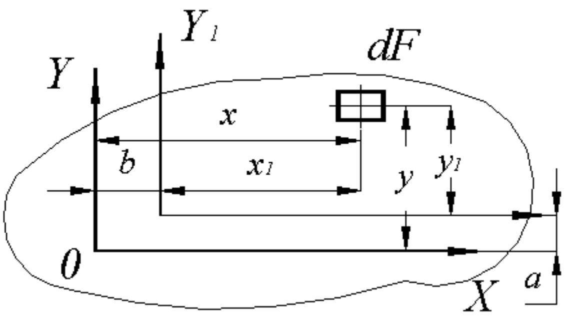


Рис. 13

Видно, что три полученных интеграла в порядке их расположения представляют собой осевой момент инерции I_X, статический момент S_X и площадь поперечного сечения F. Следовательно

$$I_{X1} = I_X + 2a\,S_X + a^2F. \tag{a}$$

Точно таким же образом для I_{Y1} будем иметь:

$$I_{Y1} = \int\limits_F x^2 dF - 2b\int\limits_F x dF + b^2\int\limits_F dF = I_Y - 2b\,S_X + b^2F. \qquad (b)$$

Так как в практических расчетах, чаще всего оси X и Y являются центральными, а относительно них статические моменты равны нулю, выражения (a) и (b) запишутся в следующем виде:

$$I_{X1} = I_X + a^2F;\;\; I_{Y1} = I_Y + b^2F. \qquad (18)$$

Определим центробежный момент инерции:

$$I_{X1Y1} = \int\limits_F x_1y_1dF = \int\limits_F (x-b)(y-a)dF = \int\limits_F xydF - b\int\limits_F ydF - a\int\limits_F xdF - ab\int\limits_F xdF.$$

Полученные четыре интеграла в порядке их расположения представляют собой центробежный момент инерции I_{XY}, статические моменты S_X и S_Y и площадь сечения F. Тогда

$$I_{X1Y1} = I_{XY} - bS_X - aS_Y + abF. \qquad (c)$$

$$I_{X1Y1} = I_{XY} + abF. \qquad (19)$$

Последнюю формулу получим, если считать оси X и Y центральными.

5. Изменение моментов инерции при повороте осей

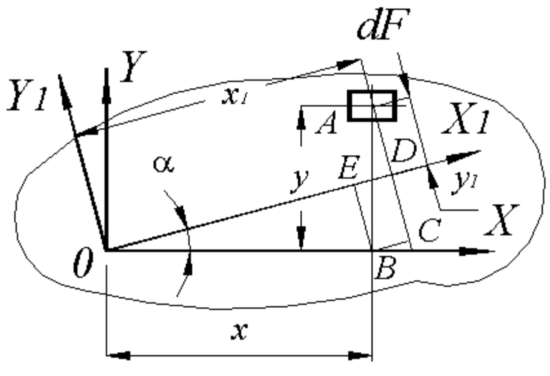


Рис. 14

Повернем оси X и Y вокруг точки O на угол α в положение X_1 и Y_1 так, как это изображено на рисунке (Рис. 14).

Обозначим новые координаты площадки dF через x_1 и y_1. Осуществим дополнительное построение. Из точки A опустим перпендикуляр на ось X в точку B. Из точки B проведем отрезок BC параллельный оси X_1 и на него в точку C также опустим перпендикуляр из точки A. И, наконец, из точки B проводим отрезок параллельный отрезку AC до пересечения в точке E с осью X_1. Обозначим точку D пересечения отрезка AC с осью X_1.

Тогда видно, что отрезок OD = OE + ED = x_1, а отрезок AD = AC – CD = y_1. Так как ED = BC, а CD = BE можем записать: x_1 = OE + BC; y_1 = AC – BE.

В свою очередь OE = (OB) $\cos\alpha = x \cos\alpha$, BC = (AB) $\sin\alpha = y \sin\alpha$, а значит

$$x_1 = x \cos\alpha + y \sin\alpha. \tag{a}$$

Видно также, что AC = (AB) $\cos\alpha = y \cos\alpha$, а BE = (OB) $\sin\alpha$ =

= $x \sin\alpha$, следовательно

$$y_1 = y \cos\alpha - x \sin\alpha. \tag{b}$$

Определим величины осевых моментов инерции относительно осей X_1 и Y_1 по формулам (5):

$$I_{X1} = \int_F y_1^2 dF \text{ и } I_{Y1} = \int_F x_1^2 dF;$$

подставим значения x_1 и y_1 из выражений (a) и (b):

$$I_{X1} = \int_F (y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int_F xy dF +$$

$+ \sin^2\alpha \int_F x^2 dF$. Если обратиться к формулам (5) и (6), то

полученное выражение можно записать в следующем виде:

$$I_{X1} = I_X \cos^2\alpha + I_Y \sin^2\alpha - I_{XY} \sin 2\alpha. \tag{20}$$

$$I_{Y1} = \int_F (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F x^2 dF + 2\sin\alpha \cos\alpha \int_F xy dF +$$

$+ \sin^2\alpha \int_F y^2 dF$. Обратимся еще раз к формулам (5) и (6)

и получим:

$$I_{Y1} = I_X \sin^2\alpha + I_Y \cos^2\alpha + I_{XY} \sin2\alpha. \qquad (21)$$

Складывая, левые и правые части формул (20) и (21), получим $I_{X1} + I_{Y1} = I_X (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + I_Y (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$; так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$I_{X1} + I_{Y1} = I_X + I_Y. \qquad (22)$$

То есть поворот осей вокруг точки О на любой угол не изменит суммы осевых моментов инерции, взятых относительно первоначального положения координатных осей.

Подставим в формулу (6) значения координат из выражений (a) и (b).

$$I_{X1Y1} = \int_F (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(y \cos\alpha - x \sin\alpha) dF = \cos^2\alpha \int_F xy dF -$$

$$- \sin\alpha \cos\alpha \int_F x^2 dF + \sin\alpha \cos\alpha \int_F y^2 dF - \sin^2\alpha \int_F xy dF =$$

$$= I_{XY} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (I_X - I_Y) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Так как $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos2\alpha$, а $\sin\alpha \cos\alpha = \sin2\alpha / 2$, получим:

$$I_{X1Y1} = [(I_X - I_Y) / 2] \sin2\alpha + I_{XY} \cos2\alpha. \qquad (23)$$

В итоге получили величину центробежного момента инерции относительно осей X_1 и Y_1.

6. Главные оси и главные моменты инерции

Анализируя формулы (20) и (21) можно заметить, что моменты инерции относительно повернутых осей являются функцией угла α и при определенных его значениях будут приобретать экстремальные значения. *Осu, относительно которых* *осевые моменты инерции приобретают экстремальные значения, называют главными осями инерции. Осевые моменты инерции, взятые относительно этих осей, называют главными моментами инерции.*

Исследуем на экстремум функцию I_{X1}. Для этого возьмем производную и приравняем ее нулю.

$$dI_{X1}/d\alpha = 0 = -I_X\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + I_Y\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - I_{XY}\cdot 2\cos 2\alpha, \text{ или}$$

$$-(I_X - I_Y)\sin 2\alpha - 2I_{XY}\cdot\cos 2\alpha = 0. \qquad (c)$$

Если обратиться к формуле (23) и умножить ее левую и правую части на 2, можно получить следующее выражение:

$$2I_{X1Y1} = (I_X - I_Y)\sin 2\alpha + 2I_{XY}\cdot\cos 2\alpha. \qquad (d)$$

Сравнивая правые части выражений (c) и (d), можно заметить, что они одинаковы за исключением знака. Тогда запишем:

$-2I_{X1Y1} = 0$ или $I_{X1Y1} = 0$.

Из чего можно заключить, что центробежный момент инерции относительно главных осей всегда равен нулю. Следует также заметить, что если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных осей инерции.

Разделим левую и правую части выражения (c) на $\cos 2\alpha$:

$-(I_X - I_Y)\mathrm{tg}2\alpha - 2I_{XY} = 0$, тогда

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = -(2I_{XY})/(I_X - I_Y). \qquad (24)$$

По формуле (24) определяют положение главных осей инерции. Если найденный угол α подставить в формулы (20) и (21) всегда можно определить величину главных моментов инерции. Однако для этого чаще применяют формулу (25).

$$I_{max}\ (I_{min}) = 0.5\ [(I_X + I_Y)\quad \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2}. \qquad (25)$$