Прочитайте вступление к учебной лекции.

Если читали ранее – можно пропустить этот блок информации.

Учебная лекция в ДО – это учебный материал для конспектирования

Инструкция для работы с учебным материалом (для конспектирования):

1. Первый раз прочитайте всю лекцию, ничего не записывая.
2. Ответьте мысленно на вопрос, что главное в лекции, из скольких основных частей лекция состоит (*на сколько частей ее можно мысленно разбить*), придумайте название для каждой части – это будет план конспекта.
3. Откройте тетрадь для лекций и запишите в тетради тему, дату лекции и план конспекта.
4. Второй раз начинайте читать лекцию и приступайте к конспектированию: в соответствии с планом – в каждой части плана пишите определения величин, формулы законов, формулировки законов, делайте рисунки к разбираемым примерам или другому. Чем больше будет ваших записей, поясняющих о чем идет речь, тем лучше вы поймете и запомните учебный материал.

Внимание! Важно обращать внимание на то, что вы описываете – явление, закон, величину или другое понятие (например, модель объекта).

Руководствуйтесь правилами:

A) если описываете явление – запишите особенности рассматриваемого явления (*в чем заключается явление, каковы условия его возникновения, какие законы и величины используются для исследования явления*)

B) если описываете величину – запишите определение величины (*укажите физическая скалярная или векторная величина, формулу/ы для определения величины, единицу величины, поясните, что характеризует и, если векторная величина, то она как направлена*),

C) если описываете понятие (не величину) – запишите одно предложение, которое раскрывает смысл понятия (*для примера см. система отсчета, материальная точка, система материальных точек и др.*),

D) если описываете закон – название, *формулу, формулировку, физический смысл* запишите закона. **Помните, что при записи формулы надо расшифровать названия величин, входящих в данную формулу.**

ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения в общем виде. Момент инерции. Основной закон динамики вращательного движения в частном виде.

Если сравнить вращательное движение с поступательным движением, то можно обнаружить при исследовании вращения тел вместо силы необходимо использовать момент силы, вместо импульса – момент импульса, а аналогом массы для вращающихся тел становится момент инерции. А что происходит с основным законом динамики? Основной закон динамики для вращающихся тел по физическому смыслу аналогичен закону динамики для поступательно движущихся тел (второму закону Ньютона), отличие его в том, что не сила играет ключевую роль для изменения механического состояния вращающегося тела, а момент силы! Можно сказать, что в законе динамики вращательного движения отражается «эффект рычага»: чем больше рычаг, тем легче изменить механического состояние вращающегося тела. Основной закон динами вращательного движения – это базовый закон, который применяют для исследования действия сил на вращающееся тело. Этот закон находит применение в таких специальных дисциплинах, как теоретическая механика, электродвигатели и др. Однако, в школьном курсе физики его не изучают. Это означает, что ему надо уделить в два раза больше внимания, выучить и не забывать. ε

Момент силы относительно неподвижной оси - физическая векторная величина, которая характеризует способность силы создавать вращательное движение МТ, ТТ или СМТ относительно рассматриваемой точки. Для МТ момент силы численно равен векторному произведению радиус-вектора, соединяющего неподвижную точку, относительно которой исследуется движение, и точку приложения силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Обратите внимание, квадратные скобки в этой формуле означают, что мы имеем дело с векторным произведением. В математике и физике есть два произведения векторов: скалярное и векторное. Самостоятельно посмотрите в справочнике информацию о них и запишите в математическую шпаргалку.

Единица измерения момента силы $\left[\boldsymbol{M}\right] = 1\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{м}$, читается «ньютонометр».

Момент силы всегда определяется относительно выбранной точки! Поэтому его полное название – «момент силы относительно неподвижной точки».

Нарисуйте диск (вид сверху) и нарисуйте силу, которая «пытается» его раскрутить, при этом сила будет приложена к одной точке на ободе, а направление ее будет под углом к касательной линии, проведенной в этой одной точке по касательной к диску.

Если опустить перпендикуляр от острия вектора силы на касательную линию, то можно заметить, что вращение диска вызывает не сама сила, а проекция ее на касательное направление! Поэтому в определении момента силы можно указывать, что за момент силы можно принять величину, численно *определяемую* с помощью проекции вектора силы на касательное направление. Еще раз уточним: момент силы создает не сама сила, а ее проекция на касательное направление!

Момент силы относительно неподвижной точки - физическая векторная величина, численно равная проекции вектора силы на касательную линию в точке касания вектора силы и радиус-вектора, проведенного из неподвижной точки, относительно которой рассматривается момент силы, и точку приложения силы

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha,$$

$$M = r \cdot F_\tau.$$

Здесь F_τ - проекция вектора момента силы на касательную линию, численно равную $F_\tau = F \cdot \sin\alpha$. Почему функция синуса, а не косинуса? Потому, что угол α – это угол между вектором силы **F** и радиус вектором **r**, проведенным из неподвижной точки в точку приложения силы. А угол, который определяет проекцию вектора силы на касательную линию равен (90 – α). Если сложно разобраться – просто запомните этот факт.

Обратите внимание еще на одну важную особенность: во втором определении момента силы, отсутствуют вектора. Его удобно использовать в практическом расчете момента силы. Однако, момент силы – величина векторная, поэтому надо обсудить, как этот вектор направлен.

Предположим, что мы рассматриваем вращение тонкого диска вокруг неподвижной оси, когда плоскость вращения не изменяет своей ориентации в пространстве. Определим направление вектора момента силы относительно неподвижной точки, совпадающей с осью вращения. Чтобы изобразить вектор момента силы необходимо выполнить три правила:

1) начинаем рисовать вектор момента силы из точки, которую приняли за неподвижную;
2) рисуем его перпендикулярно (по нормали) к плоскости вращения;
3) проводим вектор момента силы в таком направлении, чтобы с его острия вращение под действием данной силы наблюдалось против часовой стрелки (это направление будем считать положительным).

Внимание! Если на тело действует несколько сил, то результирующий момент силы определяется как векторная сумма всех моментов сил, действующих на тело:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$$

Нарисуйте рычаг, опирающийся в центре на неподвижную опору, и изобразите действие двух сил на него (на правом и левом концах рычага). Задание определите направление двух моментов сил относительно неподвижной точки. Подсказка: если сила «пытается» вращать тело против часовой стрелки, то острие вектора момента силы направлено «к нам», если сила пытается вращать тело по часовой стрелке, то острие вектора момента силы направлено «от нас».

Выведем основной закон динамики вращательного движения. Используем для этого основной закон динамики поступательногодвижения – второй закон Ньютона. Для перехода к вращетельному движению надо учесть «эффект рычага», а это можно сделать, если умножить правую и левую части второго закона Ньютона на радиус-вектор **r**.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ – второй закон Ньютона,

$\left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} \right] = \left[\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \right]$ – умножение второго закона Ньютона на **r**,

$$\frac{d\left[\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} \right]}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}}$$

Обратите внимание: справа получили момент силы относительно неподвижной точки. А слева внесли радиус-вектор **r** под знак дифференцила (это правильная математическая операция). Полученное под знаком дифференциала выражение получило название момент импульса.

Момент импульса - физическая векторная величина, которая характеризует механическое состояние *вращающегося тела* или *материальной точки, движущейся по окружности конечного радиуса или бесконечного радиуса. (по прямой линии)*. Момент импульса будет иметь разные формулы для определения в этих разных случаях. Рассмотрим сначала момент импульса для МТ, движущейся по окружности любого радиуса, отметим особенности получаемых уравнений, запишем уравнение моментов и только потом найдем момент импульса вращающегося ТТ.

Если рассматриваем движение материальной точки, то момент импульса ее численно равен векторному произведению радиус-вектор **r**, соединяющего неподвижную точку, относительно которой рассматривается движение, с материальной точкой (МТ), и вектора импульса МТ:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \left[\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} \right],$$

Модуль момента импульса МТ равен

$L = rp\,sin\alpha$, где α – это угол между радиус-вектором **r** и вектором импульса **p**.

Единица момента импульса определяется по формуле-опрелению (посмотрите, что в нее входит, радиус-вектор **r** – измеряется в «метрах», и импульс **p** – измеряется в «килограмм, умноженный на метр и деленный на секунду»):

$$\left[\boldsymbol{L} \right] = 1 \frac{кг \cdot м^2}{с}$$

Задание для лекционной тетради: найдите в интернете и изобразите в тетради направление вектора момента импульса.

Используя понятие момента импульса, запишем основной закон динамики вращательного движения:

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$ – основной закон динамики вращательного движения в общем виде (уравнение моментов).

Интересен тот факт, что закон является универсальным, то есть он используется в случаях, когда на тело действует любая сила (закон «не обращает внимания» на природу силы). И тот факт, что в таком виде закон подходит как для материальной точки, так и для твердого тела. За его универсальность основной закон динамики вращательного движения в таком виде получил название – уравнение моментов.

Математическая формулировка уравнения моментов: скорость изменения момента импульса вращающегося тела или МТ, движущейся по окружности, равна вектору момента сил, действующих на тело или МТ соответственно.

Физический смысл уравнения моментов: механическое состояние вращающегося тела изменяется только, если момент сил, действующих на МТ или ТТ отличен от 0. Можно переформулировать физический смысл: изменить механическое состояние вращающегося тела может только взаимодействие его с другими телами, при этом момент силы взаимодействия должен быть отличен от нуля.

Используем определение момента импульса для того, чтобы найти еще одно математическое определение (уравнение) для МТ, движущейся по окружности конечного радиуса:

$L = rp\sin\alpha$ – определение момента импульса (модуль момента импульса) для МТ, движущейся по окружности конечного и бесконечного радиуса, для всех случаев движения МТ.

Заменим радиус- вектор **r** на радиус окружности R, а импульс **p** на произведение массы МТ на ее скорость $\vec{p} = m\vec{V}$ (см. определение импульса в более ранних лекциях), тогда получим

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{mV}$ – определением момента импульса МТ, движущейся по окружности конечного радиуса R.

Получим еще одн математическое определение (уравнение) для МТ, движущейся по окружности конечного радиуса. Для него используем связь между линейными и угловыми характеристиками, нам потребуется из уравнений связи только одно – уравнение связи между линейной скоростью и угловой скоростью:

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega R}$

Заменим линейную скорость на ее выражение в определении момента импульса МТ, движущейся по окружности конечного радиуса R:

$\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$ – определением момента импульса МТ, движущейся по окружности конечного радиуса R.·

Обратите внимание: в полученном уравнении появились вектора, то есть мы записали векторную форму определения момента импульса МТ, движущейся по окружности конечного радиуса R. Почему? Потому, что в полученном уравнении вектор момента импульса совпадает с вектором угловой скорости также, как в поступательном движении вектор импульса МТ совпадет с вектором скорости.

$\vec{p} = m\vec{V}$ – определение импульса МТ.

Если есть аналогия между этими двумя определениями, то стоит сравнить два последних уравнения и задать себе вопрос: что же получается, произведение mR^2, которое стоит перед угловой скоростью $\vec{\omega}$ в определении момента импульса МТ, движущейся по окружности конечного радиуса R, является аналогом массы $\boldsymbol{m}$ при вращении тел? Масса $\boldsymbol{m}$ стоит перед скоростью $\vec{V}$ в определении импульса МТ. Да, так и есть! И эта величина имеет название – момент инерции.

Момент инерции - физическая скалярная величина, которая характеризует инертность вращающегося тела или инертность МТ, движущейся по окружности, величина, численно равная:

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{mR}^2$ – для МТ (материальной точки, вращающейся по окружности)

$\boldsymbol{J} = \sum \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_i^2$ – для СМТ (для системы материальных точек одновременно вращающихся по окружности).

$\boldsymbol{J} = \sum \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_i^2$ – для ТТ (для вращающегося твердого тела).

Момент инерции определяется, как и момент силы и момент импульса, всегда относительно неподвижной точки.

Сделаем первый вывод: момент инерции одной материальной точки определяется с помощью уравнения:

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{mR}^2$,

а для СМТ момент инерции должен определяться по формуле:

$\boldsymbol{J} = \sum \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_i^2$,

то есть необходимо суммировать произведение массы каждой материальной точки на квадрат расстояния от нее до неподвижной точки.

Момент инерции *J* – величина аддитивная.

А что делать, если речь идет о ТТ (твердом теле), как брать интеграл? К счастью, интеграл уже был взят для случаев определения момента инерции симметричных тел. Результаты – формулы для определения момента инерции симметричных тел:

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{mR}^2$ - обруч,

$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mR}^2$ - диск,

$\boldsymbol{J} = \frac{2}{5}\boldsymbol{mR}^2$ - шар,

$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mR}^2$ - цилиндр и т.д.

Задание для лекционной тетради: изобразите в тетради эти тела, а также стержень, вращающийся вокруг своего центра, и стержень, вращающийся относительно края. Подпишите рядом с ними

математические выражения для момента инерции этих дел. Можно использовать для этого википедию https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82_%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%86%D0%B8%D0%B8

Если тело вращается вокруг оси, не совпадающей с осью симметрии, то для определения момента инерции используют теорему Штейнера

$$J = J_0 + md^2,$$

где J_0 - момент инерции тела относительно оси симметрии.

!Момент инерции - величина *аддитивная,* так же как и масса. То есть если тело состоит из частей, то общий момент импульса системы равен сумме моментом импульсов тел, составляющих данную систему.

Используем понятие момента инерции для того, чтобы получить 2-ю форма основного закона динамики вращательного движения – основной закон динамики в частном виде. Для этого еще раз запишем определение момента импульса:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

И заменим момент импульса в уравнении моментов

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

На произведение момента инерции и угловой скорости

$$\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}.$$

Если момент инерции величина постоянная, не изменяется с течением времени $J = const$, то его можно вынести за знак дифференциала:

$$J\frac{d(\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

Какую величину мы получили? Производная от вектора угловой скорости по времени – это угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Тогда:

$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$ или, если поменять правую и левую часть равенства местами,

$\boxed{\vec{M} = J\vec{\varepsilon}}$ – **основной закон динамики вращательного движения в частном виде.**

Формулировка основного закона динамики вращательного движения: угловое ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально моменту действующих на тело сил и обратно пропорционально моменту инерции тела.

Физический смысл основного закона динамики вращательного движения: момент силы, отличной от 0, всегда вызывает угловое ускорение тела. Можно перефразировать физический смысл: угловое ускорение может появиться только тогда, когда существует момент силы, действующей на тело, и он не равен нулю.

Внимание! Меняем последовательность решения задач:
сначала решим задачу №7, затем решим задачу №6. Это делаем потому, что не изучали пока энергетические характеристики *вращательного* движения. Если бы были «живые» лекции, то их мы бы обсудили сразу, а в письменной форме лекция не дает такой возможности.

Задание для РГР: приступите к решению задачи №7, при этом используйте второй закон Ньютона для описания сил, действующих на два груза, движущихся поступательно на нити, и используйте основной закон динамики вращательного движения для частного случая, для описания вращения цилиндра, на который навешены два груза. Мысленно разделите все движения всех трех тел и описывайте движение каждого тела отдельно! Должны получиться три уравнения.

Еще раз уточним:

для грузов записываем второй закон Ньютона, находим ускорение тел;

для вращающегося тела записываем основной закон динамики в частном виде и находим угловое ускорение цилиндра, заменяя момент инерции его на одну из формул для его определения (см.выше).

Подсказка, чтобы найти угловое ускорение вращающегося тела или ускорение грузов, необходимо использовать связь между линейными и *угловыми характеристиками, а именно связь между тангенциальным ускорением и угловым ускорением.*

После того, как будут найдены оба ускорения, можно, используя уравнения кинематики, найти скорости, расстояния или другое, что требуется найти по описанию задачи.