Цель и задачи теории автоматического управления. Понятие о статическом анализе свойств элементов и САУ. Статические характеристики элементов и САУ. Оценка статических свойств САУ. Понятие о динамическом режиме работы САУ. Способы описания работы САУ. Типовые внешние воздействия. Динамические характеристики.

Что такое теория автоматического управления?

Понятие ТАУ аккумулирует входящие в ее название термины:

- ***теория*** *– совокупность знаний, позволяющих при определенных условиях получать достоверный результат*
- ***управление*** *– воздействие, оказываемое на объект, для достижения определенной цели;*
- ***автоматическое управление*** *– управление без вмешательства человека с помощью технических средств.*

Поэтому

***ТАУ** – совокупность знаний, позволяющих создавать и вводить в действие автоматические системы управления технологическими процессами с заданными характеристиками.*

Что является объектом, предметом и целью изучения ТАУ?

- ***Объект изучения ТАУ*** *– автоматическая система управления (АСУ).*
- ***Предмет изучения ТАУ*** *– процессы, протекающие в АСУ.*
- ***Цель изучения ТАУ*** *– учет приобретенных знаний в практической деятельности при проектировании, производстве, монтаже, наладке и эксплуатации АСУ.*

- ТАУ вместе с теорией функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов, исполнительных механизмов) образует более широкую отрасль науки – *автоматику*. Автоматика, в свою очередь, является одним из разделов *технической кибернетики*. Техническая кибернетика изучает сложные автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП) и предприятиями (АСУП), построенными с использованием управляющих электронных вычислительных машин.

Формирование ТАУ в самостоятельную научную и учебную дисциплину произошло в период с 1940 по 1950 годы. В это время были изданы первые монографии и учебники, в которых автоматические устройства различной физической природы рассматривались едиными методами.

При взаимодействии частей АСУ между собой, а также и при процессе функционирования самого объекта управления осуществляется преобразование энергии одного вида в энергию другого вида. Это обусловлено различной физической природой элементов, входящих в состав АСУ. Так одна и та же система может включать в себя, например, механические, электрические и гидравлические элементы.

- Но процессы преобразования и перераспределения энергии в АСУ, в отличие от многих других физических систем, ***строго ориентированы***, т. е. энергия и воздействия передаются только в определенном направлении.

- Направленность передачи воздействий в АСУ обеспечивается благодаря наличию у одного или нескольких конструктивных элементов системы так называемого *детектирующего свойства.* Это свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент не оказывает обратного действия на предыдущий элемент, а его выходная величина не влияет на свою входную.

- Только вследствие наличия элементов *направленного* действия в АСУ создается замкнутый контур передачи воздействий, при помощи которого и осуществляется целенаправленный процесс управления. Без таких элементов АСУ были бы неработоспособны или малоэффективны.

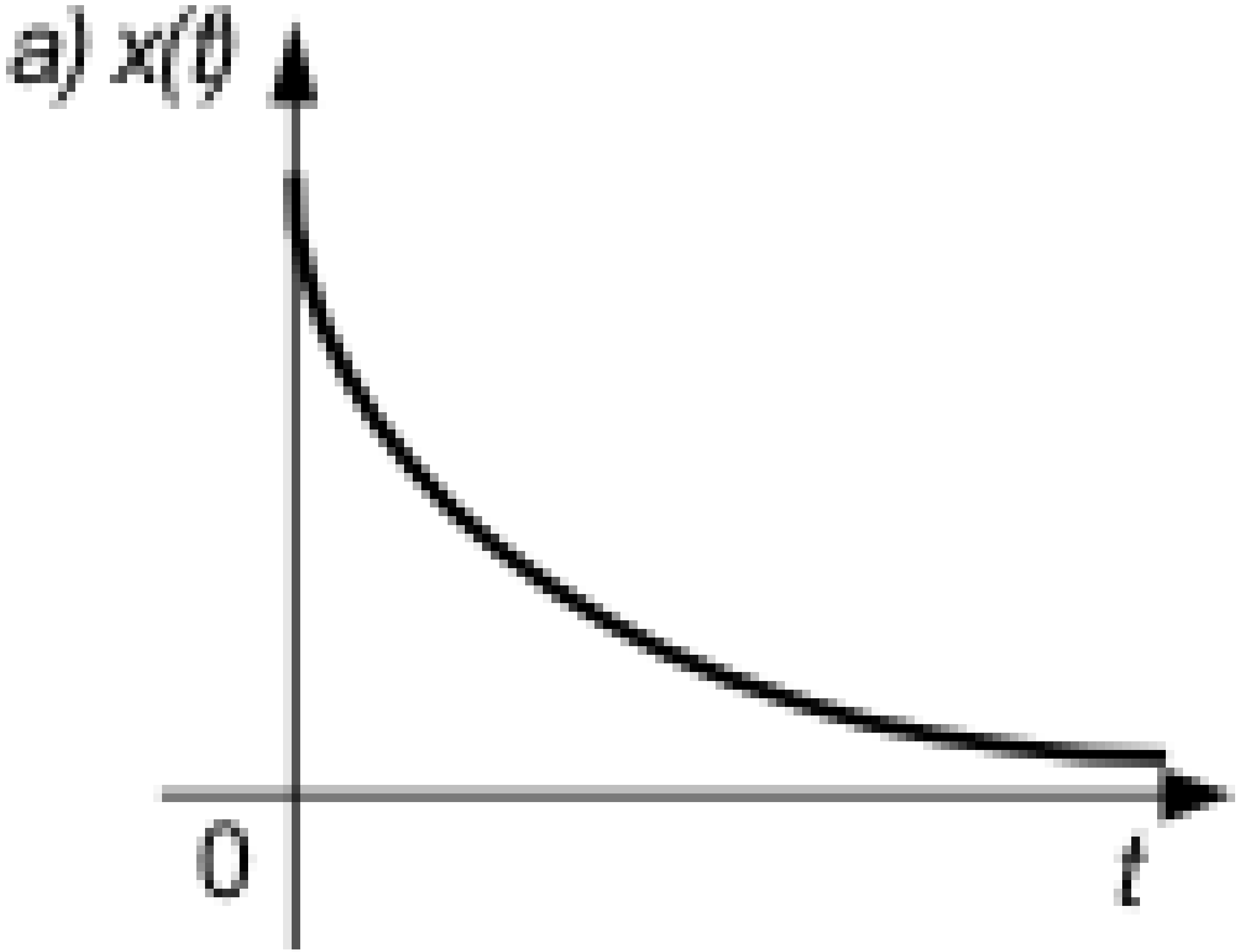
Характеристики воздействий и сигналов в АСУ

- Большое разнообразие конструкций и условий работы АСУ определяет многообразие воздействий и сигналов. Анализ конкретных АСУ существенно упрощается, если пользоваться разработанной *типизацией* воздействий и сигналов.

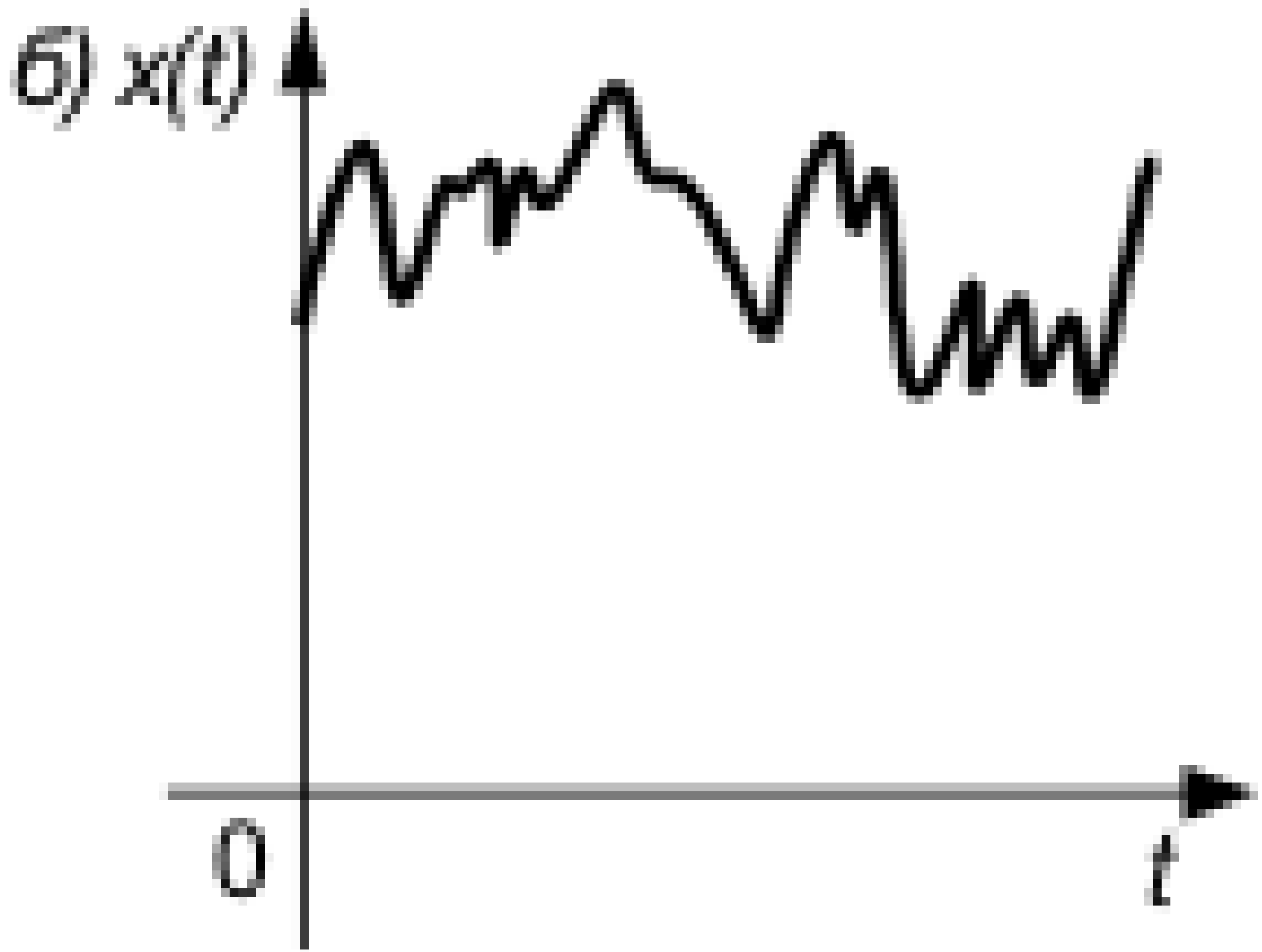
Рассмотрим основные типы сигналов и воздействий.

- **В зависимости от характера изменения во времени различают сигналы:**
- *регулярный (детерминированный);*
- *нерегулярный.*

- ***Регулярный (детерминированный) сигнал*** – *сигнал, который изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени.*


a) x(t)
0
t

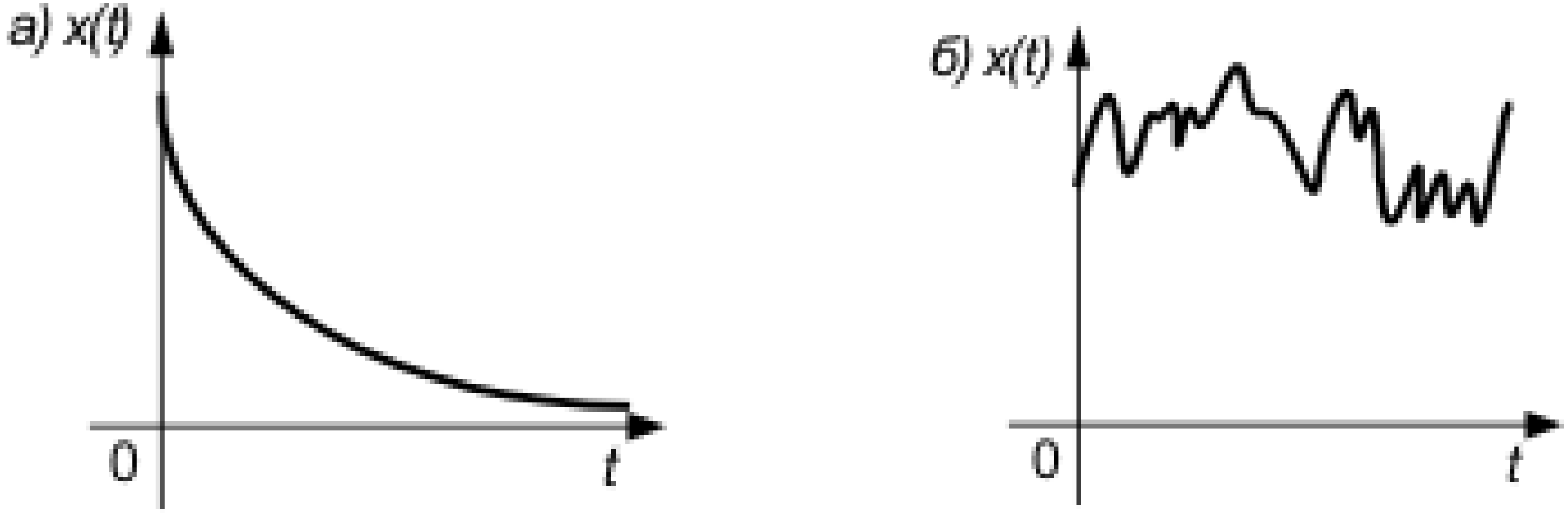
Нерегулярный сигнал – *сигнал, который изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен конкретной математической функцией.*


б) x(t)
0
t

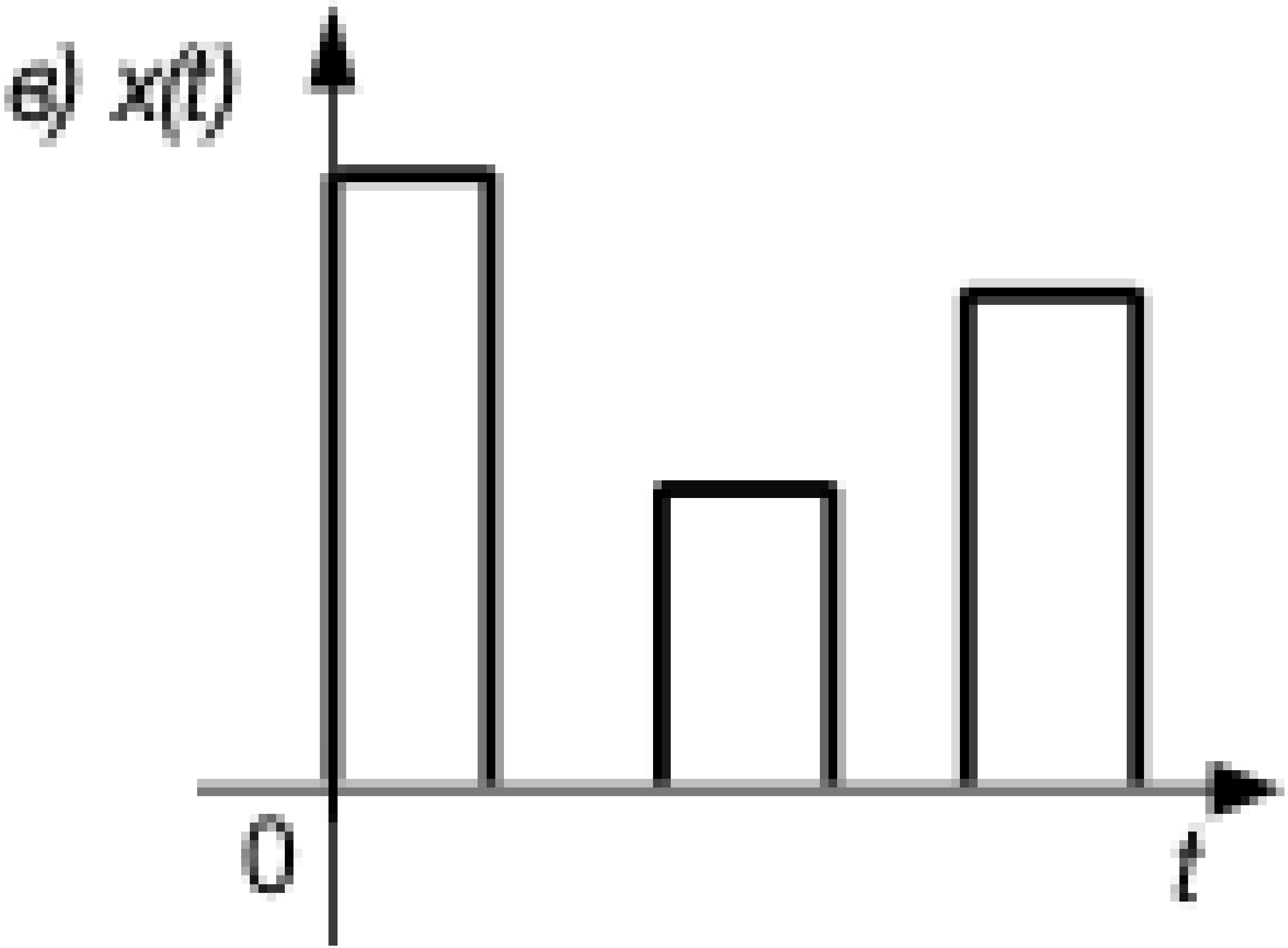
В зависимости от определенности во времени различают сигналы:

- *непрерывный (аналоговый);*
- *дискретный.*

Непрерывный (аналоговый) сигнал *– сигнал, который определен в любой момент времени.*


а) x(t)
0
t
б) x(t)
0
t

Дискретный сигнал *– сигнал, который определен лишь в некоторые моменты времени.*



e) x(t)
0
t

- При исследовании АСУ и их элементов используют ряд *стандартных сигналов*, называемых ***типовыми воздействиями***. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при исследовании АСУ. Использование типовых воздействий позволяет унифицировать анализ различных систем и облегчает сравнение их передаточных свойств.

Наибольшее применение в ТАУ находят следующие типовые воздействия:

- *ступенчатое;*
- *импульсное;*
- *гармоническое;*
- *линейное.*

Ступенчатое воздействие – *воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным*

Ступенчатому воздействию соответствует функция

$$x(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0; \\ a_0 \quad при \quad t \geq 0, \end{cases}$$

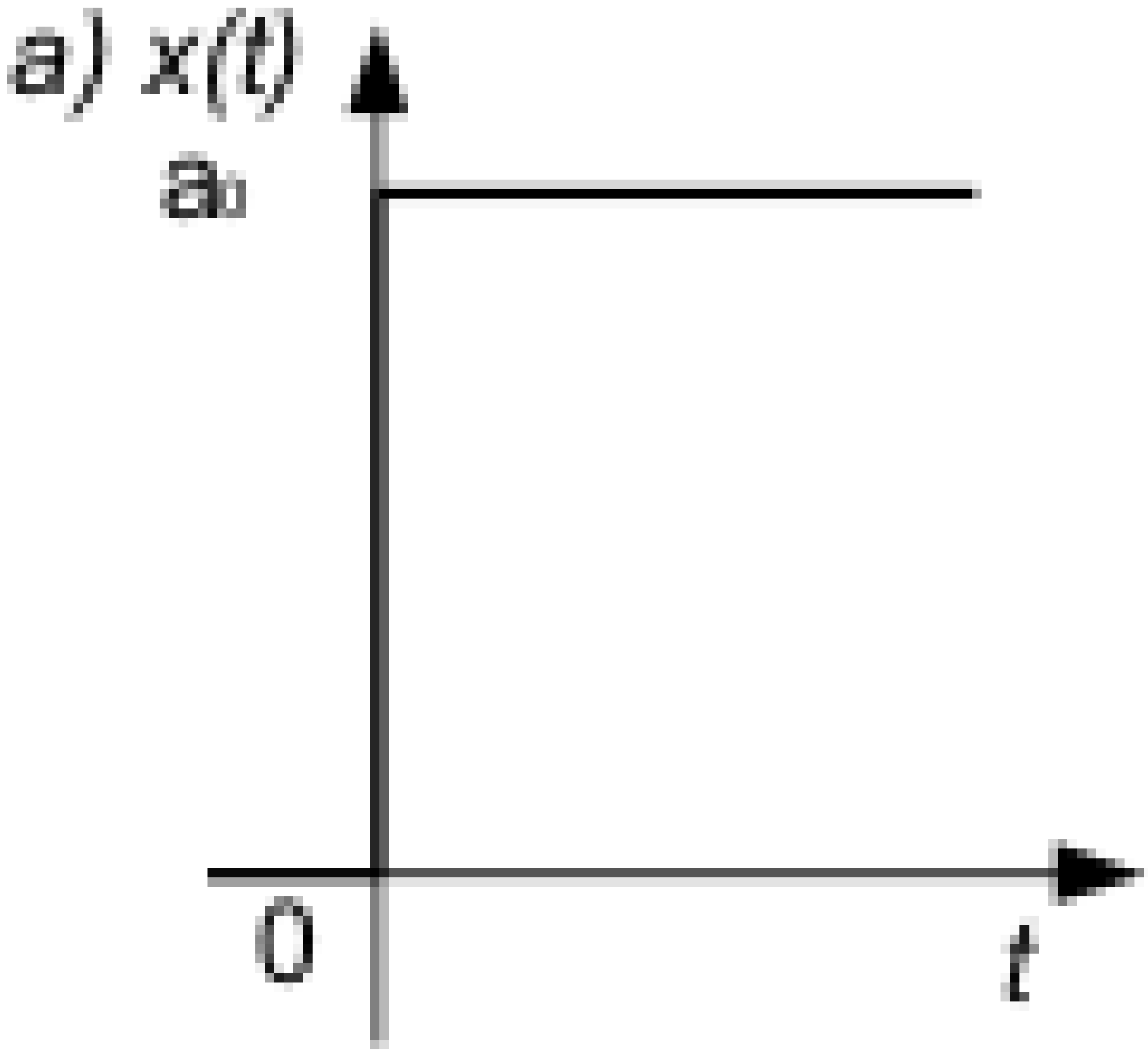
При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие, у которого величина a_0 = 1. Его называют ***единичным ступенчатым воздействием*** и обозначают **1**(t).

$$1(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0; \\ 1 \quad при \quad t \geq 0, \end{cases}$$

Если единичный скачок происходит при $t \neq 0$ с задержкой на τ *c* то функция записывается следующим образом:

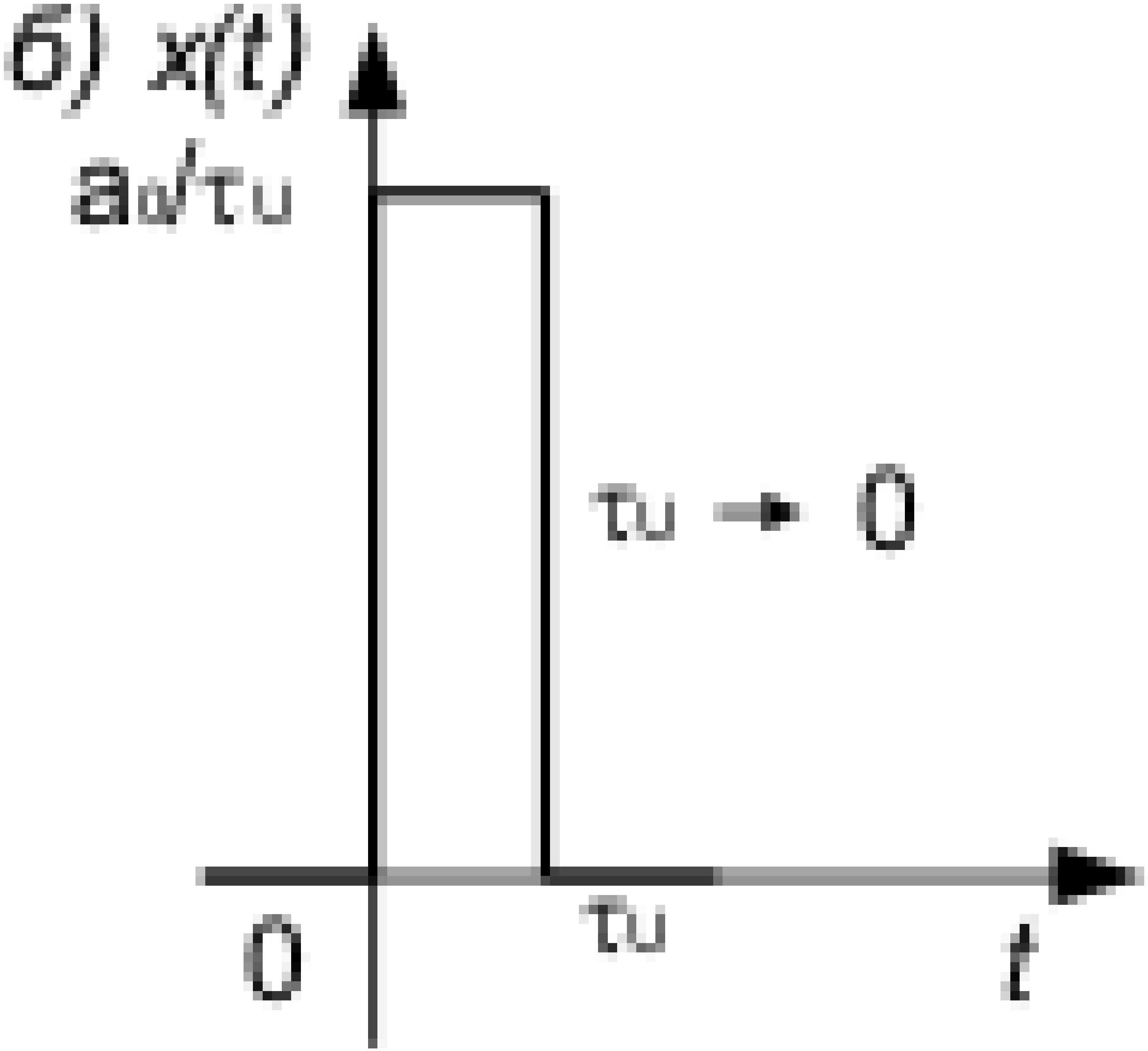
$$1(t-\tau)=\begin{cases}0 & при \quad t<\tau; \\ 1 & при \quad t \geq \tau.\end{cases}$$

- Ступенчатое воздействие чаще всего используют при исследованиях систем стабилизации параметров, так как эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям систем стабилизации.


a) x(t)
a0
0
t

- Уравнение переходного процесса при воздействии типа единичного скачка, показанное в графической форме, называется *временной* или *разгонной* характеристикой звена.

- ***Импульсное воздействие*** – *одиночный импульс прямоугольной формы, имеющий достаточно большую высоту и малую длительность (по сравнению с инерционностью испытываемой системы) с площадью* a_0


б) x(t)
a₀/τu
τu → 0
0
τu
t

При математическом анализе АСУ используют ***единичное импульсное воздействие***, описываемое так называемой ***дельта-функцией***

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t \neq 0; \\ \infty \quad \text{при} \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- Последние два выражения позволяют рассматривать дельта-функцию, как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта-функцию можно определить также как производную единичного ступенчатого воздействия:

Единичная импульсная функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции.

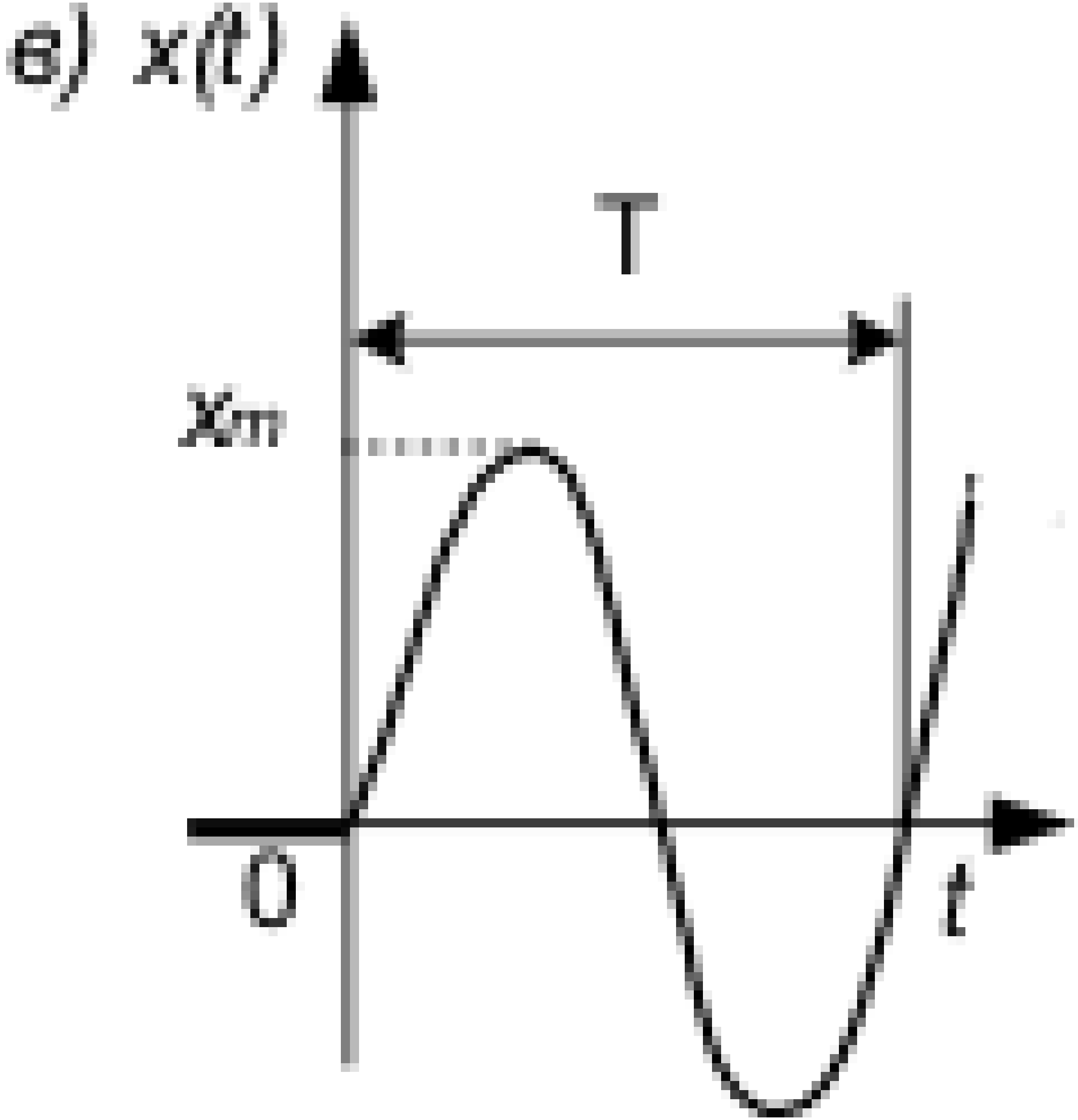
$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

Неединичное импульсное ступенчатое воздействие с площадью a_0 обозначается $x(t) = a_0 \delta(t)$.

Гармоническое воздействие – *сигнал синусоидальной формы, описываемый функцией*

$$x(t) = x_m \sin\omega t, (-\infty < t < \infty),$$

где x_m – амплитуда сигнала; $\omega = 2\pi / T$ – круговая частота; T – период сигнала.

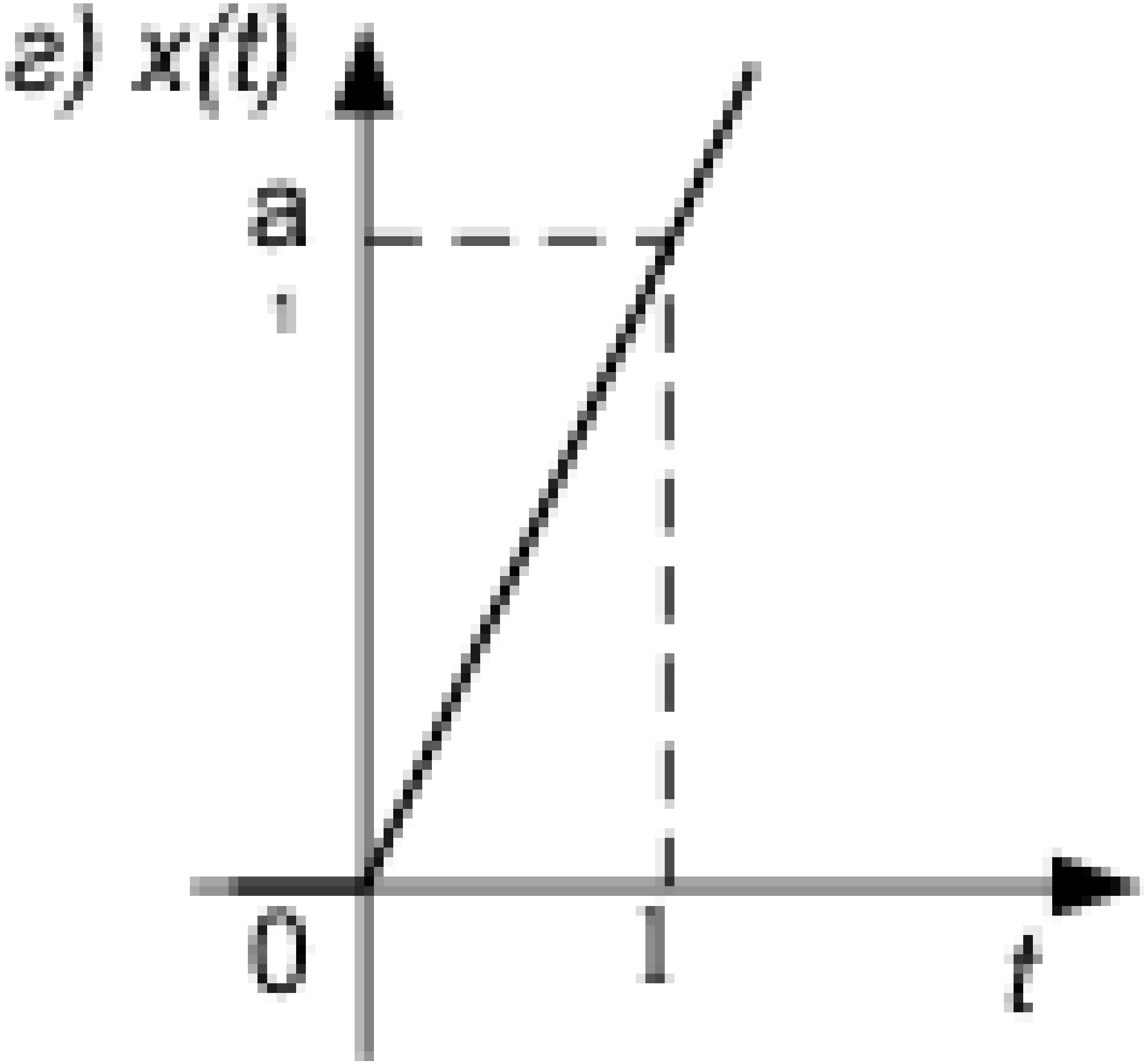

в) x(t)
T
xm
0
t

- Гармонический сигнал, начинающий действовать в момент времени $t = 0$, описывают при помощи единичной ступенчатой функции:
- $x(t) = \mathbf{1}(t)\, x_m \sin\omega t, (0 \le t < \infty)$.

Линейное воздействие – *воздействие, описываемое функцией*

$$x(t) = \mathbf{1}(t)\, a_1\, t\,, (0 \le t < \infty).$$

Коэффициент a_1 характеризует скорость нарастания воздействия $x(t)$.


e) x(t)
a
0
1
t

По характеру изменения выходной величины во времени различают следующие режимы элемента АСУ:

статический;

динамический.

Статический режим *–*
состояние элемента АСУ, при которой выходная величина не изменяется во времени, т. е.
$y(t) = const$.

Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывают алгебраическими уравнениями.

Динамический режим – *состояние элемента АСУ, при котором входная величина непрерывно изменяется во времени, т. е.* $y(t) = var.$

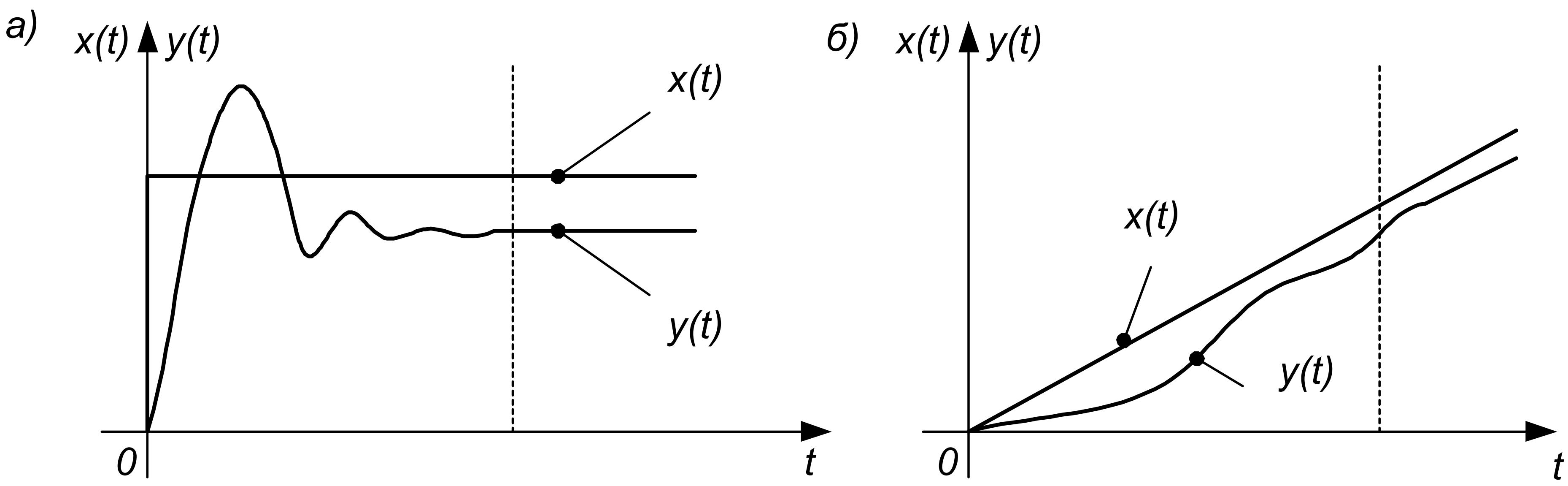
- Динамический режим имеет место, когда в элементе после приложения входного воздействия происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы описываются в общем случае дифференциальными уравнениями.

Динамические режимы в свою очередь разделяются на: ***неустановившийся (переходный); установившийся (квазиустановившийся)***.

- ***Неустановившийся (переходный) режим*** – *режим, существующий от момента начала изменения входного воздействия до момента, когда выходная величина начинает изменяться по закону этого воздействия.*

- ***Установившийся режим*** – *режим, наступающий после того, когда выходная величина начинает изменяться по такому же закону, что и входное воздействие, т. е. наступающий после окончания переходного процесса.*

изменения выходной величины *y(t)* при двух типовых входных воздействиях *x(t)* . Граница между *переходным* и *установившимся* режимами показана вертикальной пунктирной линией.

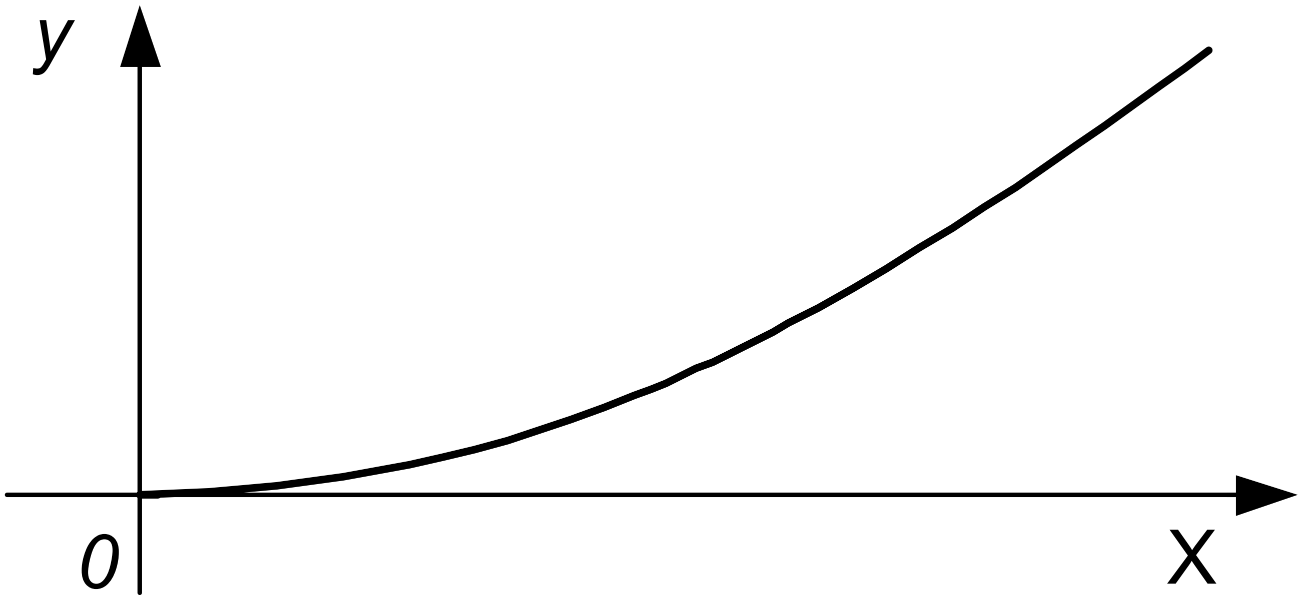


Переходные и установившиеся режимы
при типовых воздействиях

Статические характеристики элементов

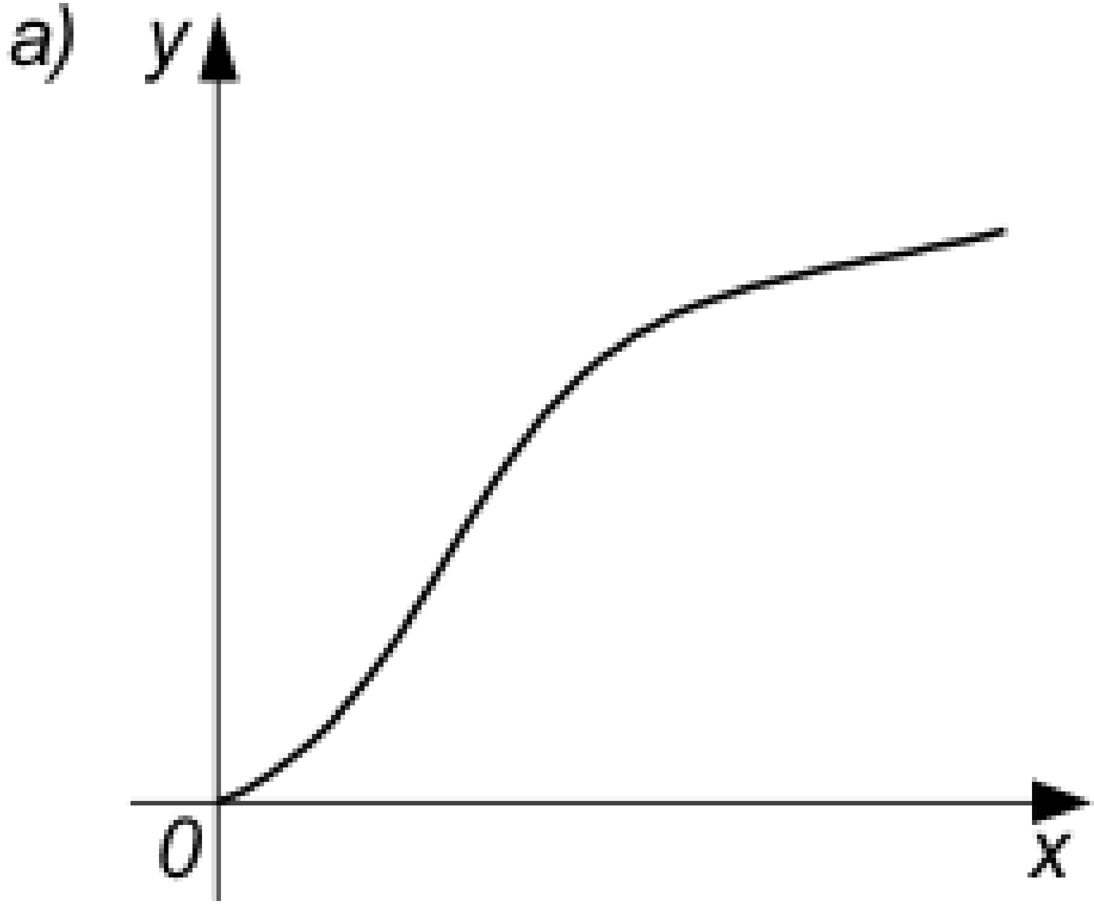
- Передаточные свойства элементов и АСУ в статическом режиме описывают с помощью статических характеристик.
- ***Статическая характеристика элемента*** *– зависимость выходной величины* ***y*** *элемента от входной* ***x***
- $y = f(x) = y(x)$
- *в установившемся статическом режиме.*

Статическая характеристика конкретного элемента может быть задана в аналитическом виде (например, $y = kx^2$) или в виде графика

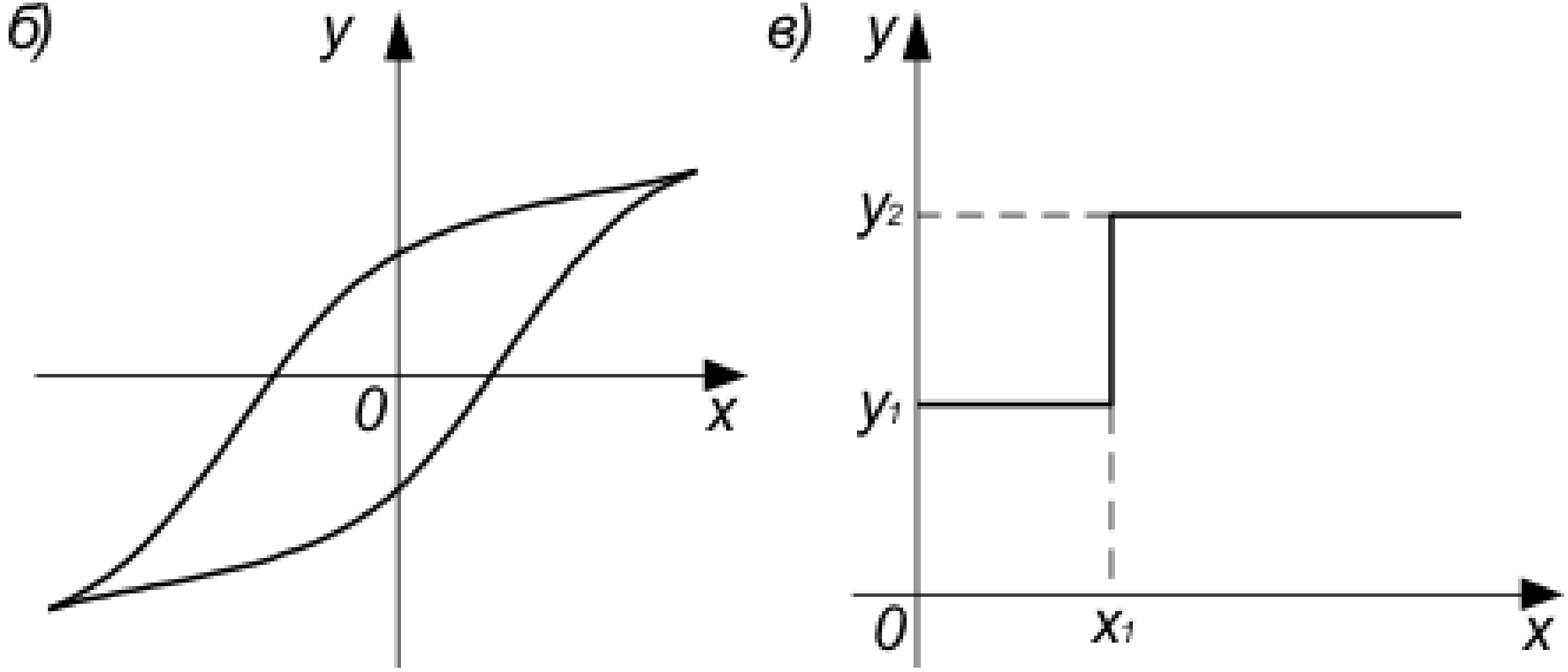


Статическая характеристика элемента

Как правило, связь между входной и выходной величинами – однозначная. Элемент с такой связью называют ***статическим (позиционным)*** (рис., *а*)**.** Элемент с неоднозначной связью – ***астатическим*** (рис., *б,в*)**.**



Виды статических характеристик



Виды статических характеристик

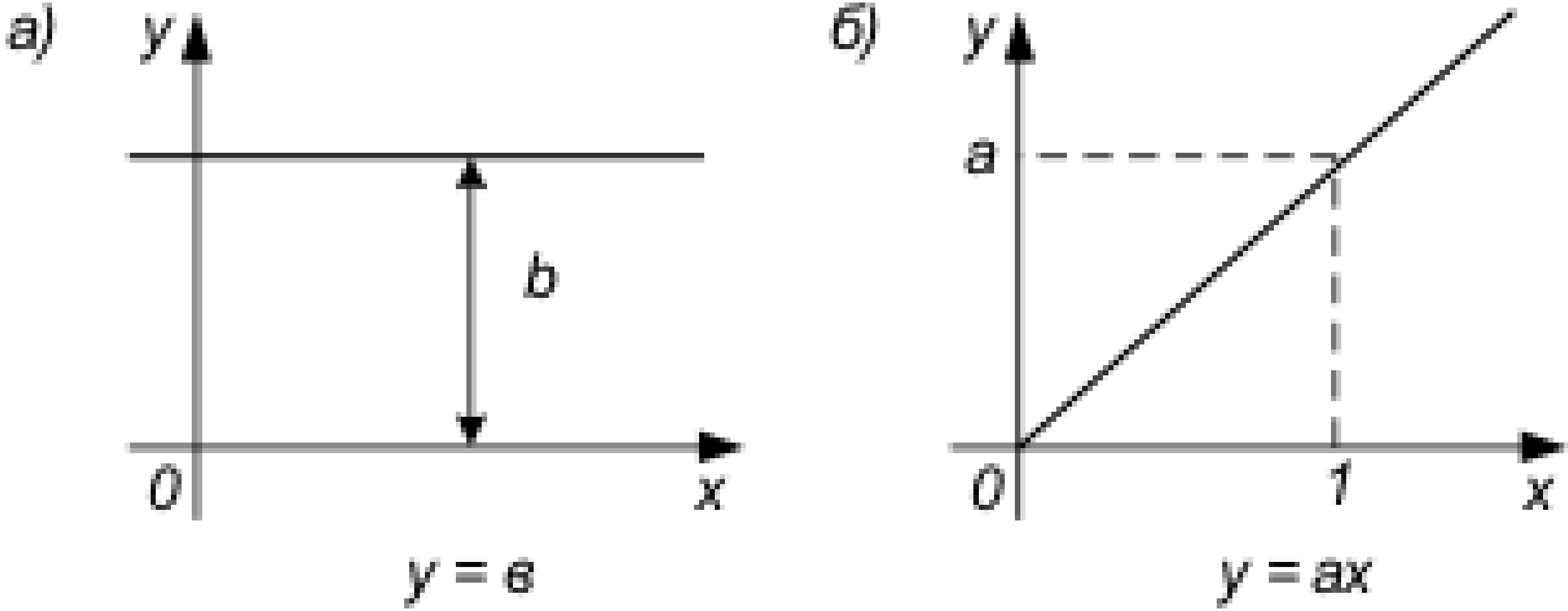
По виду статических характеристик элементы разделяют на:

линейные;

нелинейные.

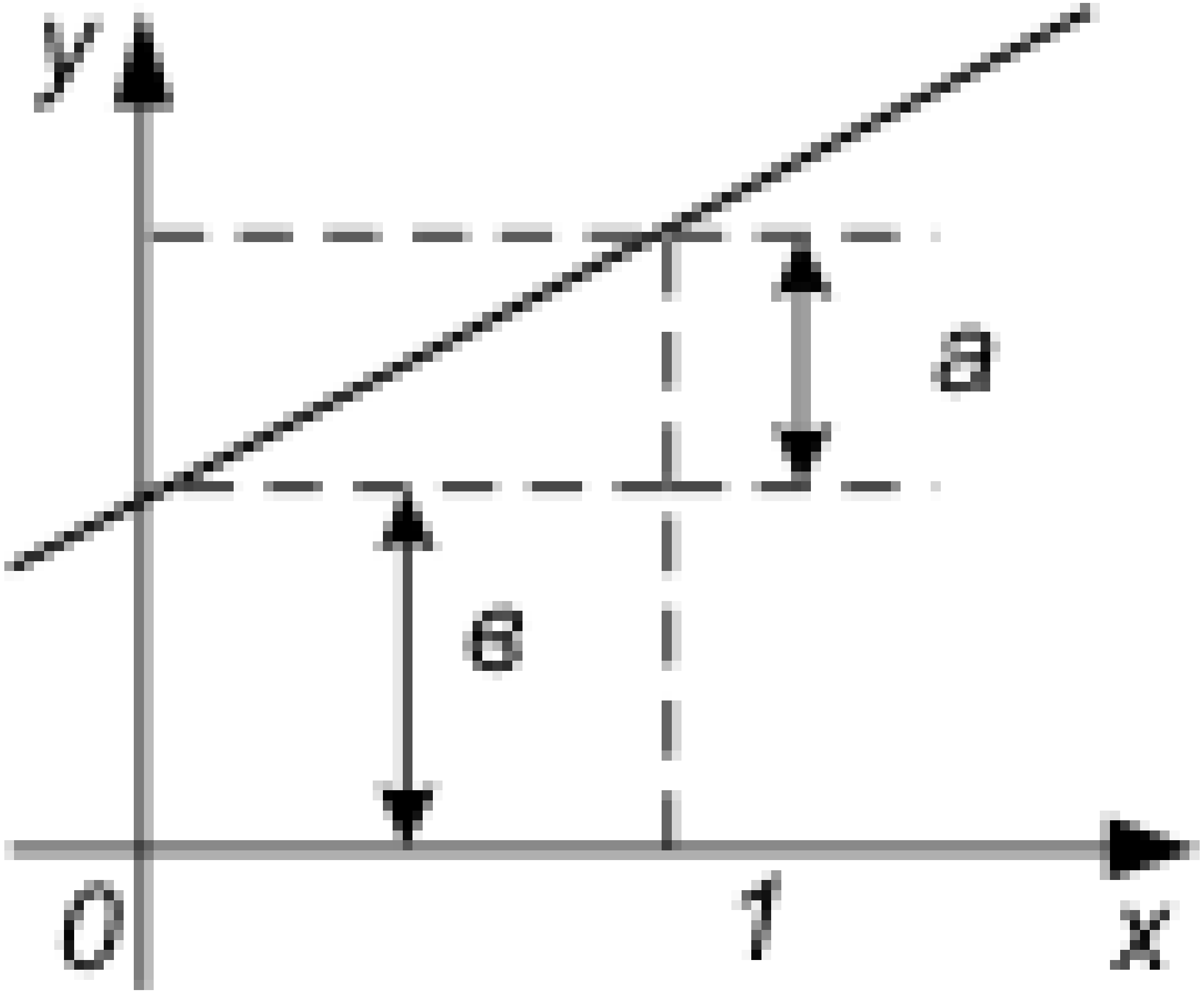
Линейный элемент *– элемент, имеющий статическую характеристику в виде линейной функции:*

$$y = b + ax.$$



Виды линейной функции

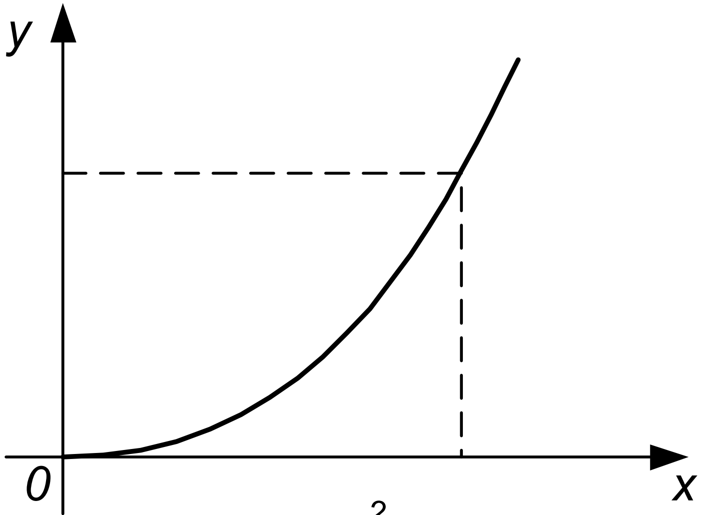
в)



$$y = в + ax$$

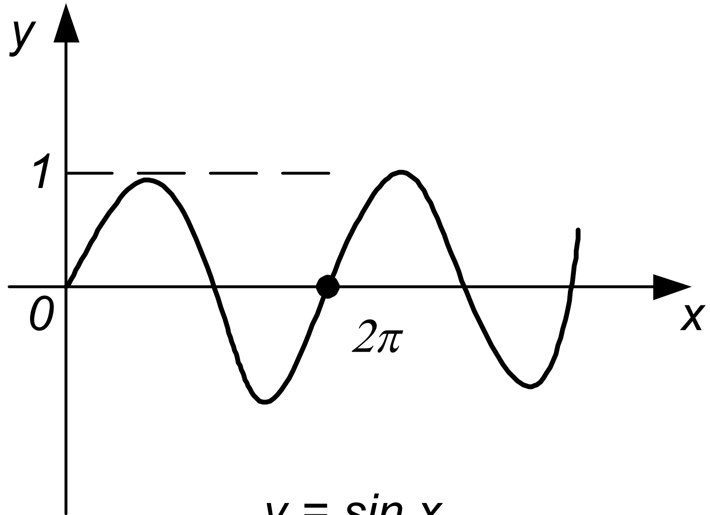
Виды линейной функции

Нелинейный элемент – *элемент, имеющий нелинейную статическую характеристику.* Нелинейная статическая характеристика аналитически обычно выражается в виде степенных функций, степенных полиномов, дробных рациональных функций и более сложных функций а)



$y = x^2$

б)



$y = \sin x$

Нелинейные элементы в свою очередь подразделяют на:

элементы с ***существенно нелинейной статической характеристикой****;*

элементы с ***несущественно нелинейной статической характеристикой****;*

- ***Несущественно нелинейная статическая характеристика*** – *характеристика, описываемая непрерывной дифференцируемой функцией.*
- *Линеаризация нелинейной характеристики правомерна, если в процессе работы элемента его входная величина меняется в небольшом диапазоне вокруг некоторого значения* $x = x_0$.

Существенно нелинейная статическая характеристика *– характеристика, описываемая функцией, имеющей изломы или разрывы.*

Динамические характеристики элементов АСУ

Передаточные свойства элементов АСУ в динамическом режиме описывают с помощью *динамических характеристик.*

Различают следующие формы динамических характеристик:

- *обыкновенное дифференциальное уравнение;*
- *временные характеристики;*
- *передаточная функция;*
- *частотные характеристики.*

- ***Обыкновенное дифференциальное уравнение*** является наиболее общей и полной формой описания передаточных свойств элементов АСУ.
- Для элемента имеющего один входной сигнал $x(t)$ и один выходной $y(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение в общем случае имеет вид
- $\Phi[\, y(t), y'(t), \dots y(n)(t); x(t), \dots x(m)(t), t \,] = 0,$
- где t – независимая переменная (обычно время).
- Для реальных систем $m \leq n$.

Это уравнение динамики (движения) элемента. Движения в широком смысле слова, когда под движением понимается любое изменение сигналов.

- Дифференциальное уравнение может быть:
- *линейное;*
- *нелинейное.*

Линейное дифференциальное уравнение *– уравнение, в котором функция Ф линейна по отношению ко всем ее аргументам, т. е. к $y(t), y'(t), \ldots y(n)(t); x(t), \ldots x(m)(t), t$.*

Нелинейное дифференциальное уравнение *– уравнение, в котором функция Ф содержит произведения, частные, степени и т. д. переменных y(t), x(t) и их производных.*

Временные характеристики

- Дифференциальное уравнение не дает наглядного представления о динамических свойствах элемента, но такое представление дает функция $y(t)$, т. е. решение этого уравнения.

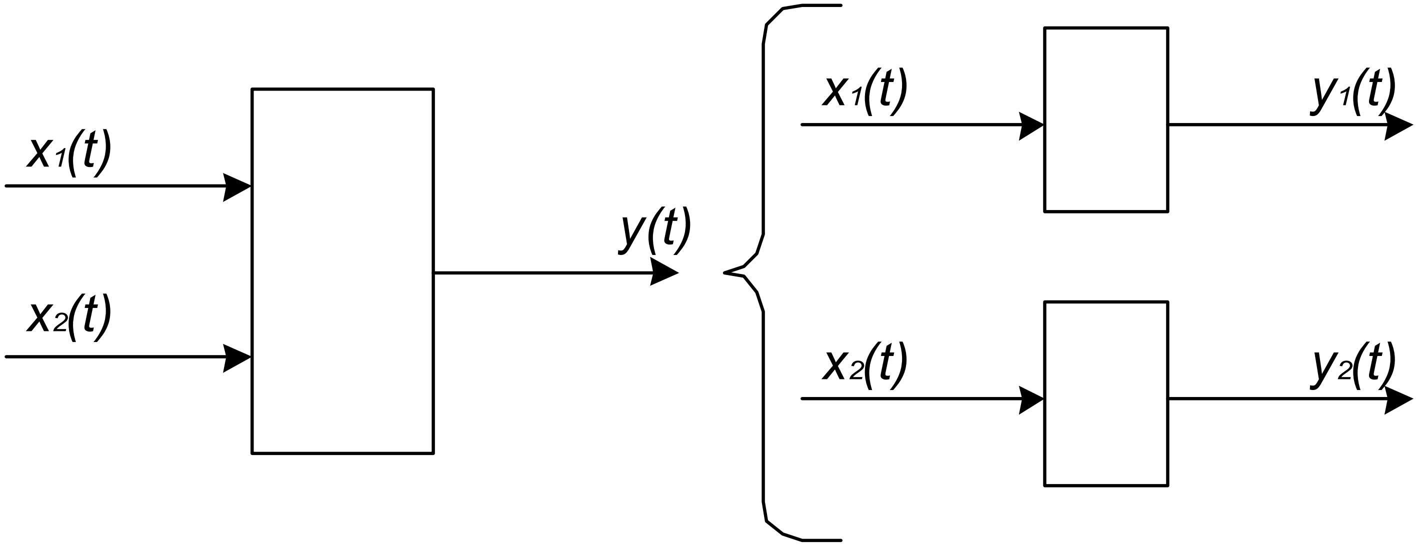
- стремятся перейти от нелинейных к линейным уравнениям вида

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x(t).$$

- Для всех реальных элементов выполняется условие $m \le n$.
- Коэффициенты $a_0, a_1 \ldots a_n$ и $b_0, b_1 \ldots b_m$ в уравнении называются ***параметрами.*** Иногда параметры изменяются во времени, тогда элемент называют ***нестационарным*** или ***с переменными параметрами***.

- Важнейшим практическим достоинством *линейного* уравнения является возможность применения *принципа наложения*, согласно которому изменение выходной величины $y(t)$, возникающее при действии на элемент нескольких входных сигналов $x_i(t)$, равно сумме изменений выходных величин $y_i(t)$, вызываемых каждым сигналом $x_i(t)$ в отдельности



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Временные характеристики

- Дифференциальное уравнение не дает наглядного представления о динамических свойствах элемента, но такое представление дает функция *y(t)*,   т. е. решение этого уравнения.

Решено характеризовать эти свойства элемента только *одним* решением дифференциального уравнения, полученным при *нулевых* начальных условиях и одном из *типовых* воздействий: единичном ступенчатом, дельта-функции, гармоническом, линейном.

Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его *переходная функция h(t).*

- ***Переходная функция h(t) элемента*** – *изменение во времени выходной величины y(t) элемента при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях.*
  Переходная функция может быть задана:
  в виде графика;
  в аналитическом виде.

Переходная функция, как и любое решение неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения , имеет две составляющие:

- *вынужденную $h_в(t)$ (равна установившемуся значению выходной величины);*
- *свободную $h_c(t)$ (решение однородного уравнения).*

Вынужденную составляющую можно получить решая уравнение при *нулевых* производных и $x(t) = 1$

$$h_в(t) = y(\infty) = \frac{b_m}{a_n}.$$

Свободную составляющую получаем решая уравнение при *нулевой* правой части

$$h_C(t) = \sum_{k-1}^{n} C_k e^{p_k t},$$

- где p_k – *k-й корень характеристического уравнения* (в общем случае комплексное число); C_k - *k-я постоянная интегрирования* (зависит от начальных условий).

Характеристическое уравнение *– алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части линейного дифференциального уравнения*

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Передаточная функция

- Наиболее распространенным методом описания и анализа АСУ является операционный метод (метод операционного исчисления), в основе которого лежит прямое интегральное преобразование Лапласа для непрерывных функций

$$F(p) = Z\left\{f(t)\right\} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

- Это преобразование устанавливает соответствие между функцией действительной переменной *t* и функцией комплексной переменной $p = \alpha + j\beta$. Функцию *f(t)*, входящую в интеграл Лапласа, называют ***оригиналом,*** а результат интегрирования – функцию *F(p)* – ***изображением*** функции *f(t)* по Лапласу.

- Преобразование выполнимо лишь для функций, которые равны *нулю* при $t < 0$. Формально это условие в ТАУ обеспечивается умножением функции $f(t)$ на единичную ступенчатую функцию $\mathbf{1}(t)$ или выбором начала отсчета времени с момента, до которого $f(t) = 0$.

- Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа при *нулевых* начальных условиях являются:

- $Z\{\ f'(t)\ \} = pF(p);$

$$Z\left\{\int f(t)dt\right\} = F(p)/p.$$

- Операционный метод получил широкое распространение, так как с его помощью определяют так называемую *передаточную функцию*, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применяя прямое преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x(t).$$

получим алгебраическое уравнение

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p)$$

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$$ -

собственный оператор;

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$$ -

входной оператор.

Передаточная функция – *отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях*

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Значение переменной *p,* при которой передаточная функция *W(p)* обращается в бесконечность, называется ***полюсом передаточной функции***. Очевидно, что полюсами являются корни собственного оператора *D(p).*

Значение переменной *p,* при которой передаточная функция *W(p)* обращается в нуль, называется ***нулем передаточной функции***. Очевидно, что нулями являются корни входного оператора *K(p).*

Если коэффициент $a0 \neq 0$, то передаточная функция не имеет нулевого полюса ($p = 0$), характеризуемый ей элемент называют ***астатическим*** и передаточная функция этого элемента при $p = 0$ ($t = \infty$) равна *передаточному коэффициенту*

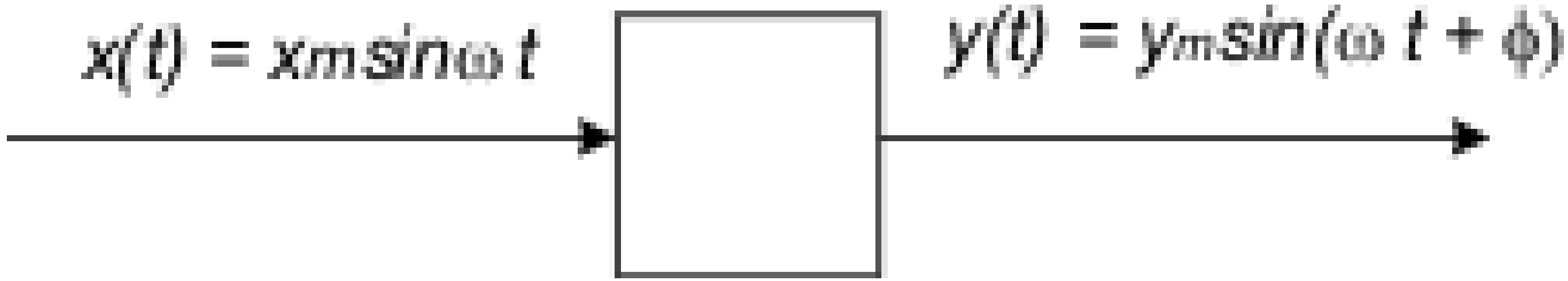
$$k = W(0) = \frac{b_m}{a_n}.$$

Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и АСУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием.

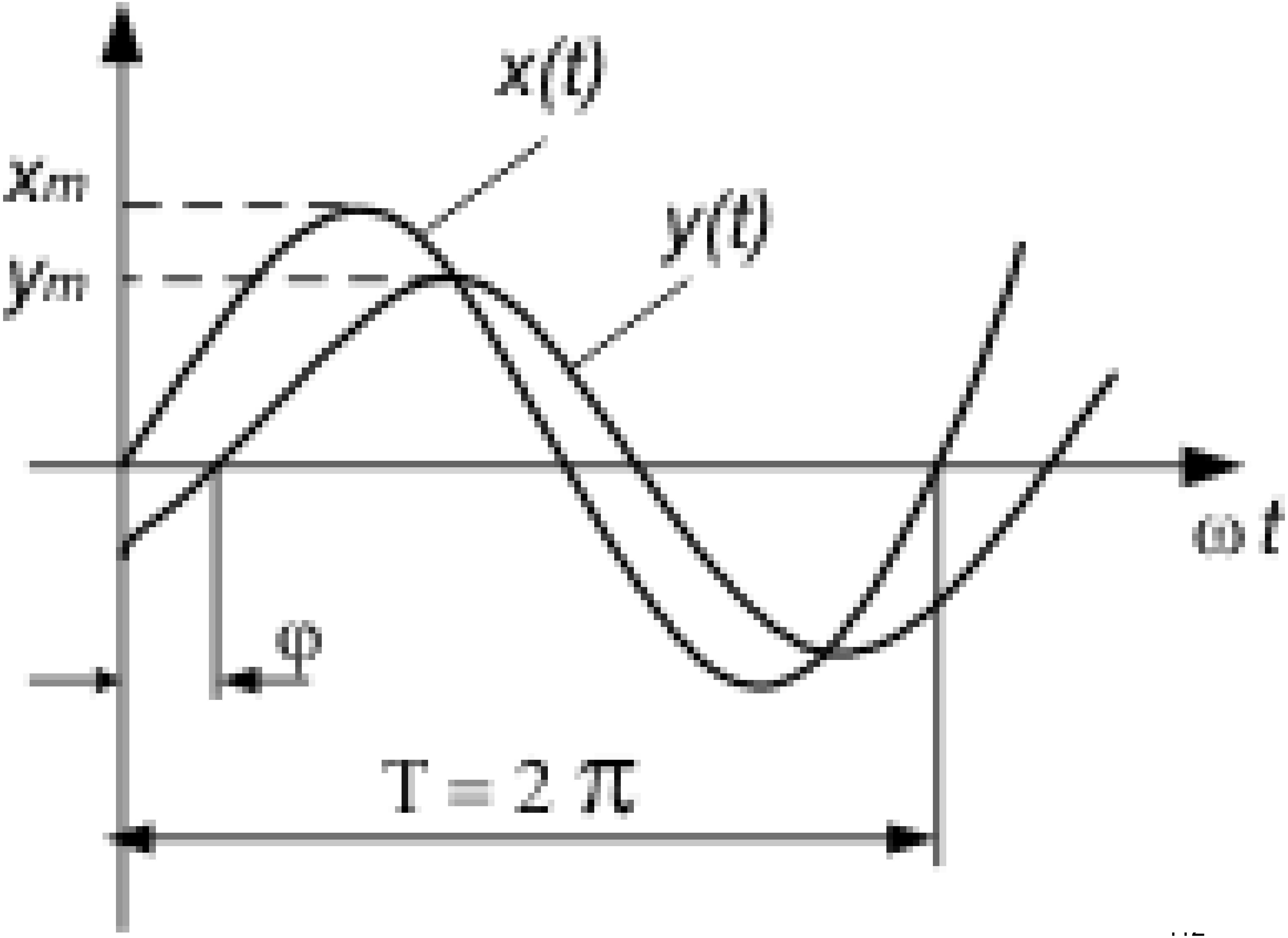
Рассмотрим *сущность* и *разновидности* частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента в момент времени $t = 0$ подано гармоническое воздействие с частотой ω

$$x(t) = x_m \sin\omega t$$


$x(t) = x_m \sin \omega t$
$y(t) = y_m \sin(\omega t + \phi)$

По завершении переходного процесса установится режим вынужденных колебаний и выходная величина *y(t)* будет изменяться по тому же закону, что и входная *x(t),* но в общем случае с другой амплитудой *ym* и с фазовым сдвигом φ по оси времени относительно входного сигнала:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi) .$$


x(t)
y(t)
xm
ym
ω t
φ
T = 2 π

Проведя аналогичный опыт, но при другой частоте ω, можно увидеть, что амплитуда y_m и фазовый сдвиг φ изменились, т. е. они зависят от частоты. Можно убедиться также, что для другого элемента зависимости параметров y_m и φ от частоты ω иные. Поэтому такие зависимости могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

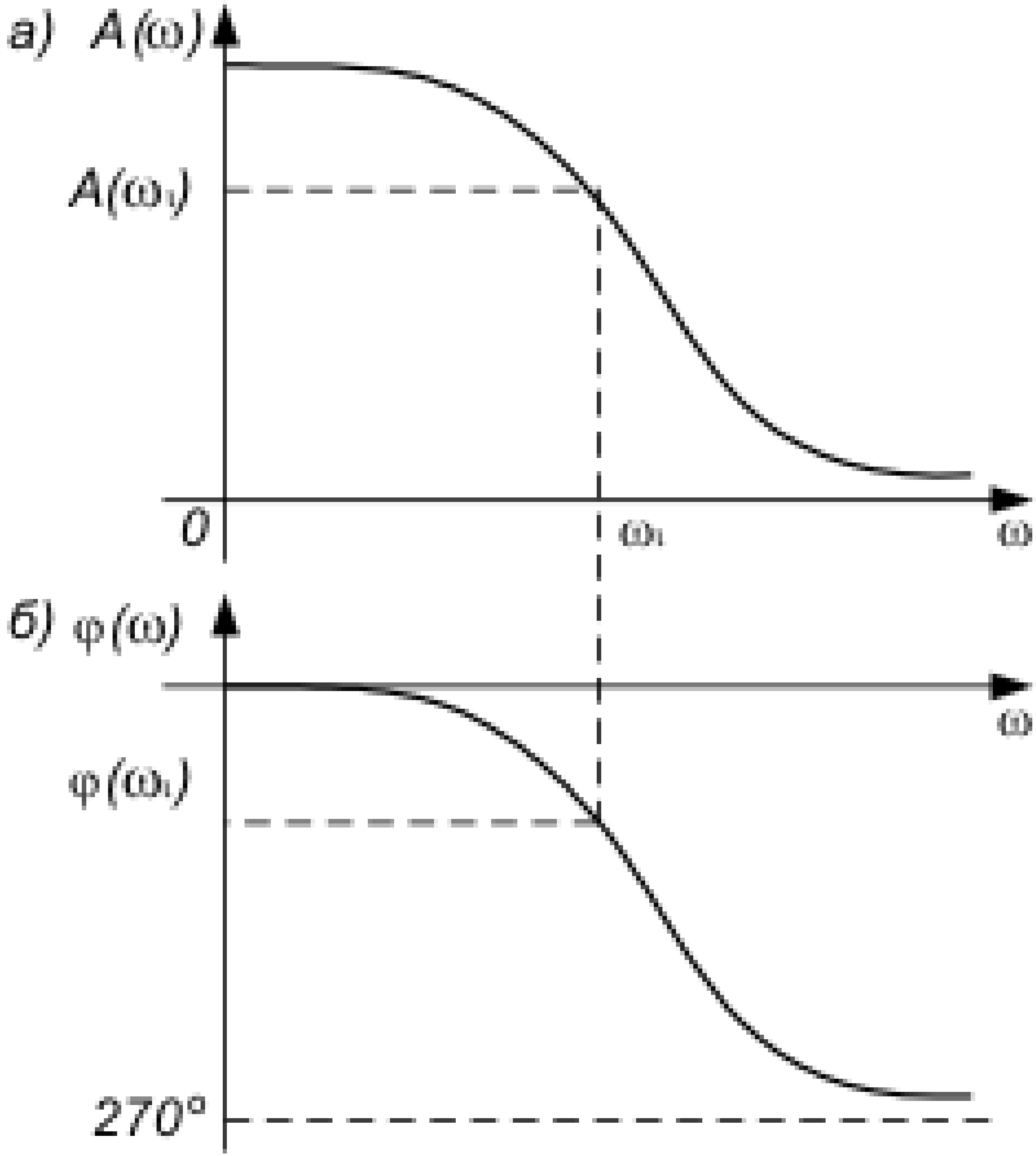
наиболее часто используют следующие частотные характеристики:

- *амплитудная частотная характеристика (АЧХ);*
- *фазовая частотная характеристика (ФЧХ);*
- *амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).*

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) – *зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты*

$$A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}.$$

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Пример АЧХ приведен на рис.


а)
A(ω)
A(ω1)
0
ω1
ω
б)
φ(ω)
ω
φ(ω1)
270°

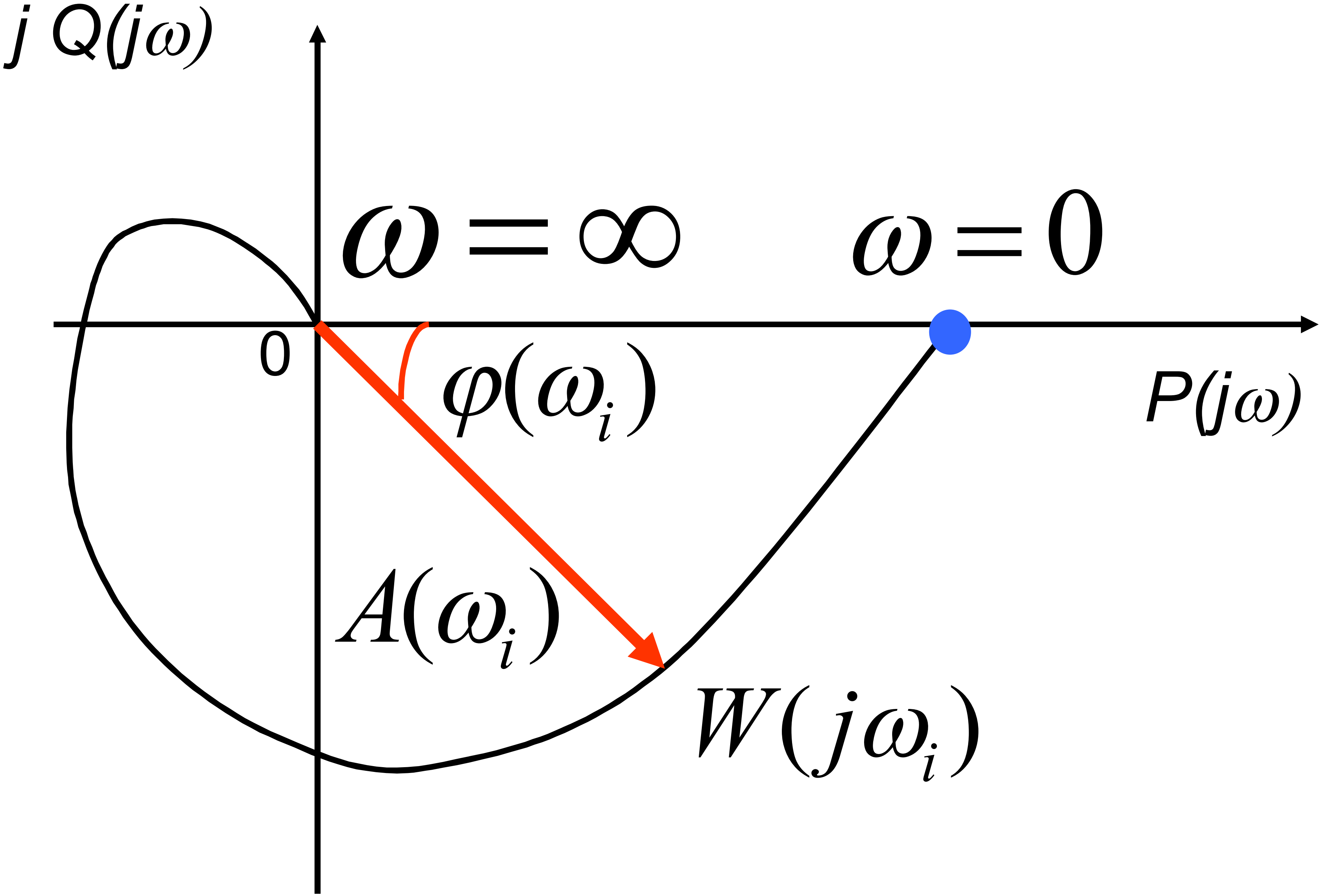
Фазовая частотная характеристика ФЧХ – *зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты.*

ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах.

Амплитудную и фазовую характеристики можно объединить в одну общую – ***амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ).*** АФЧХ представляет собой функцию комплексного переменного $j\omega$:

- $W(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$ *(показательная форма)*,
- где $A(\omega)$ – модуль функции; $\varphi(\omega)$ – аргумент функции.

Каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол поворота $\varphi (\omega_i)$ рис. Отрицательные значения $\varphi (\omega)$, соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.



$j\,Q(j\omega)$
$\omega = \infty$
$\omega = 0$
0
$\varphi(\omega_i)$
$P(j\omega)$
$A(\omega_i)$
$W(j\omega_i)$

- При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно изменяется длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, и есть АФЧХ. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

- Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно ***действительной*** и ***мнимой частотными характеристиками*** и обозначают $P(\omega)$, $Q(\omega)$. Это позволяет записать АФЧХ в *алгебраической* форме:
- $W(j\omega) = P(\omega) + j\,Q(\omega)$

- АФЧХ, как и любую комплексную величину, можно также представить в тригонометрической форме
- $W(j\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) +$

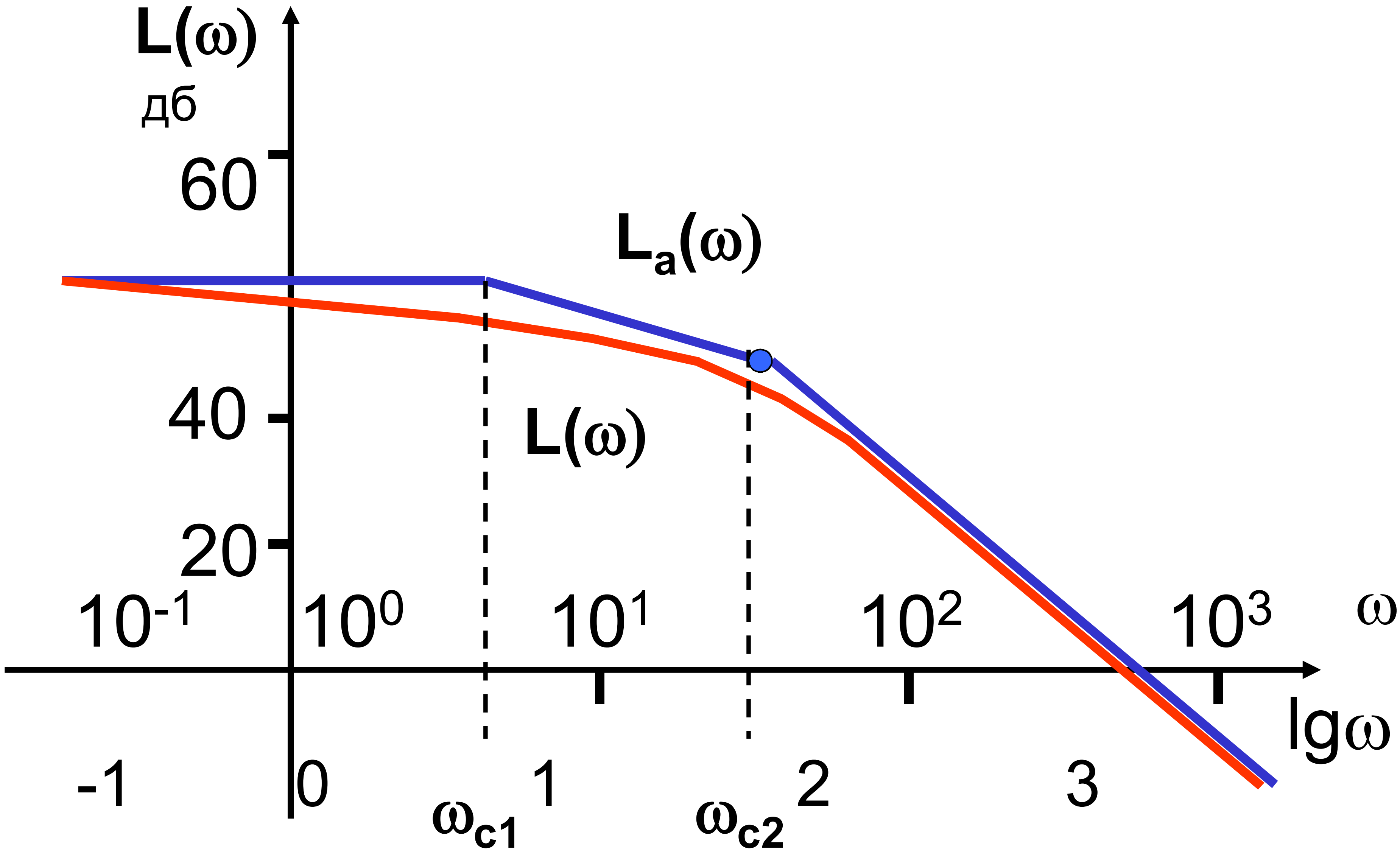
$+ j A(\omega)\sin\varphi(\omega).$

- Аналитическое выражение для АФЧХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки $p = j\omega$:
- $W(j\omega) = W(p)\big|_{p = j\omega}$.

- При практических расчетах АСУ (без применения электронных вычислительных машин) удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют ***логарифмическими***.

- За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду.
- ***Декада*** *– интервал частот, заключенный между произвольным значением частоты* ωi *и его десятикратным значением* $10\omega i$ *.*
- Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

- Обычно в расчетах используют ***логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ)***
- $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$,
  (2.41)
- ординаты которой измеряют в логарифмических единицах – *беллах* (Б) или *децибеллах* (дБ).
- ***Белл*** *– единица измерения мощностей двух сигналов.*


L(ω)
дб
60
40
20
$L_a(\omega)$
L(ω)
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
ω
lgω
-1
0
1
2
3
ω_{c1}
ω_{c2}

На рис. показаны ЛАЧХ $L(\omega)$) и соответствующая ей приближенная (асимптотическая) характеристика $L_a(\omega)$ в виде прямолинейных отрезков. Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют ***сопрягающими*** и обозначают ω_c.

THE END