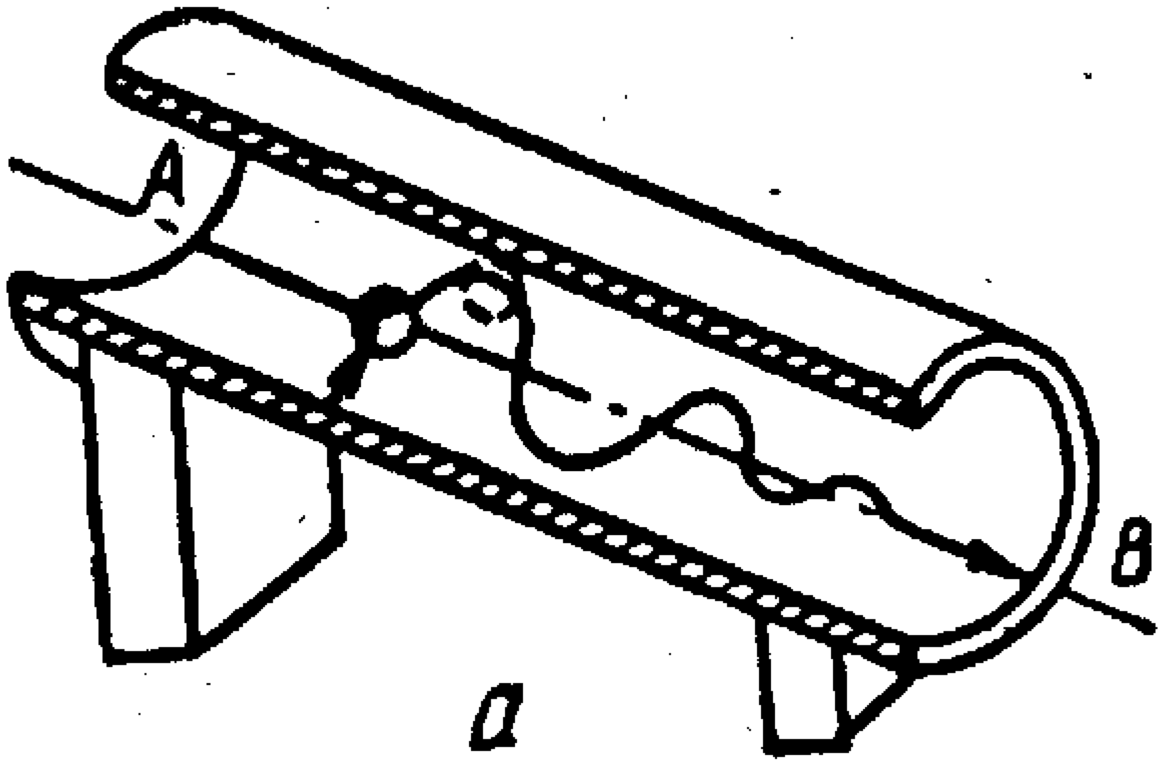
Устойчивость САУ. Условия устойчивости линейных САУ. Алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица. Частотные критерии устойчивости Найквиста и Михайлова. Логарифмический критерий устойчивости. Анализ влияния параметров элементов САУ на ее устойчивость. Области устойчивости.

Система автоматического регулирования называется устойчивой, если она за счет своих внутренних сил возвращается в состояние установившегося равновесия после устранения непланируемого воздействия (возмущения).

Система называется неустойчивой, если при сколь угодно малых отклонениях от установившегося состояния она не возвращается к состоянию установившегося равновесия, а непрерывно удаляется от него или совершает около него недопустимо большие колебания. Неустойчивые системы неработоспособны.

В большинстве практических задач система, устойчивая при малых отклонениях, оказывается устойчивой также и при больших отклонениях. Однако встречаются случаи, когда система устойчива «в малом», но неустойчива «в большом»

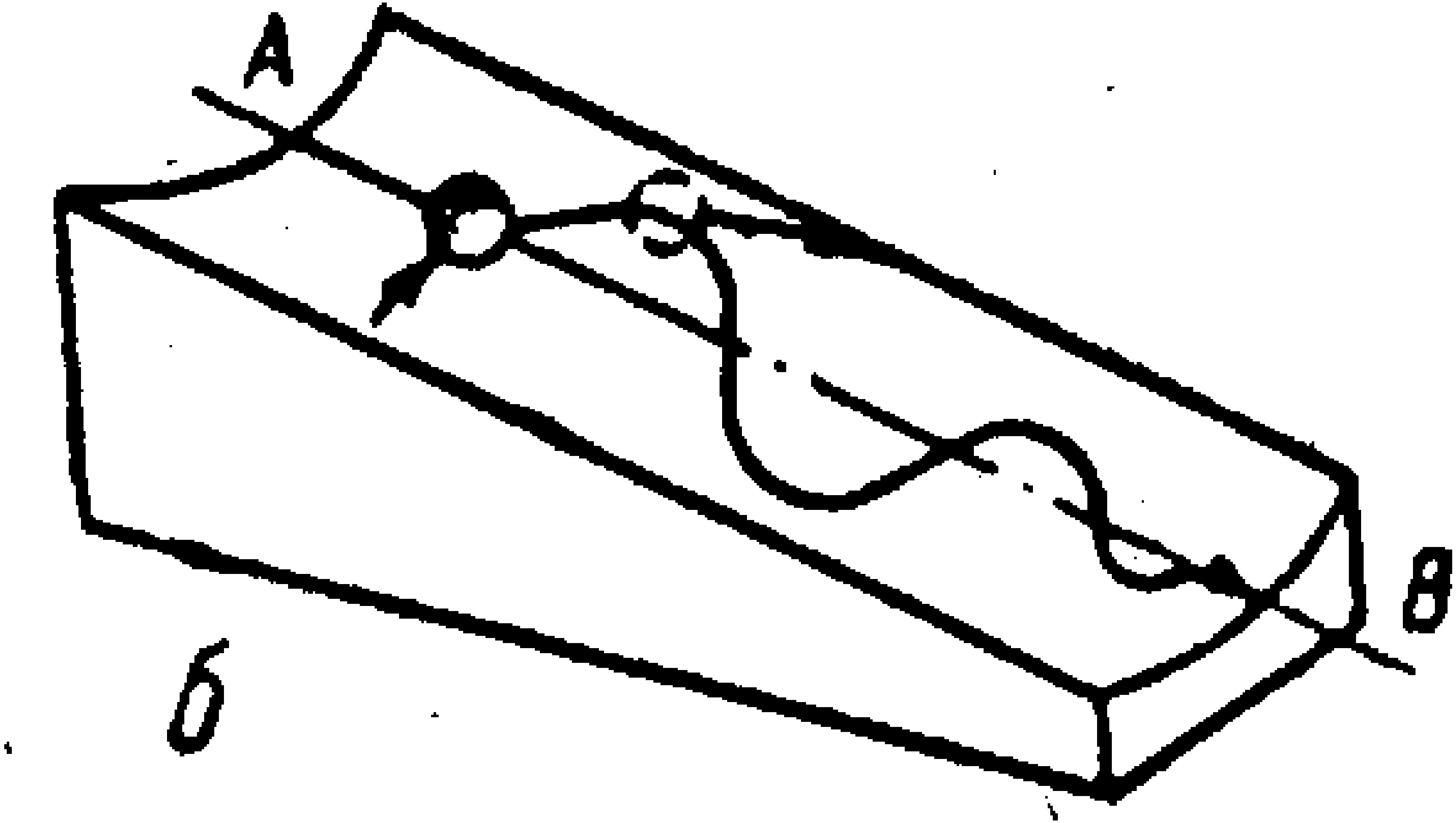
Понятия устойчивости «в малом» и «в большом» характеризуют величину отклонения, то есть малое или большое отклонение системы от положения равновесия. Примером устойчивости как «в малом», так и «в большом» может служить движение шарика внутри трубы



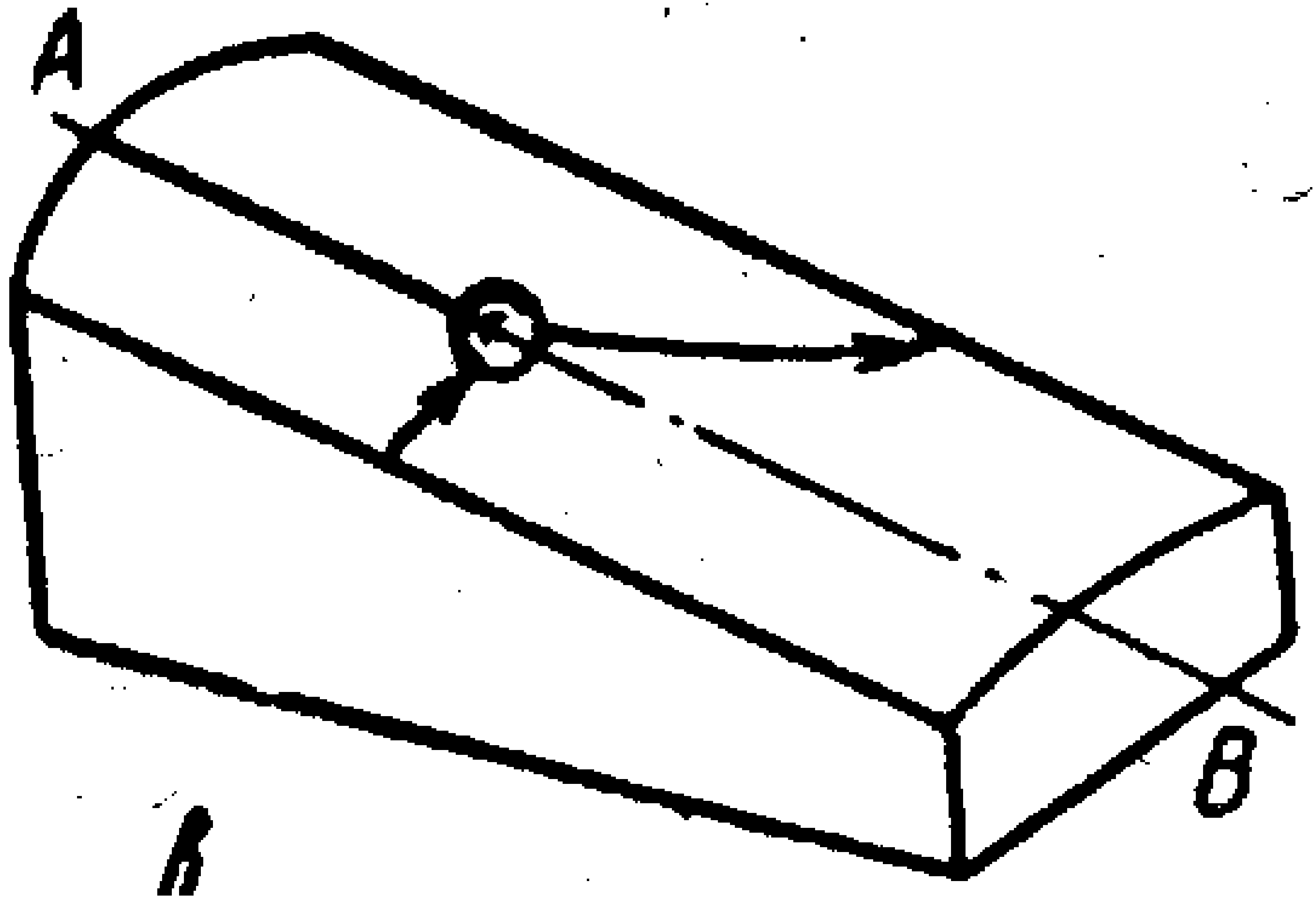
a

При любом отклонении шарика от установившегося направления движения он после нескольких колебаний возвращается на первоначальную прямую *АВ.* Если шарик совершает движение по желобу, то при малых отклонениях шарика, не выходящих за края желоба, его движение будет устойчивым, а при больших отклонениях— неустойчивым

Если шарик совершает движение по желобу, то при малых отклонениях шарика, не выходящих за края желоба, его движение будет устойчивым, а при больших отклонениях— неустойчивым


А
Б
В

Движение шарика по выпуклой цилиндрической поверхности всегда будет неустойчивым, поскольку шарик от малейшего бокового усилия будет удаляться от первоначального направления движения


A
B

При движении по плоскости после снятия боковых усилий шарик будет сохранять новое прямолинейное движение. Такое состояние движения шарика называется нейтральным, а САР, обладающая аналогичными свойствами, называется нейтральной системой.

Для математического определения условий устойчивости системы предложен ряд упрощений при решении линейных дифференциальных уравнений, которые применительно к системам автоматического регулирования называются *критериями*

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Система любого порядка будет устойчива, если все коэффициенты характеристического уравнения системы положительны. Пусть имеется уравнение

$$G(p)y = V(p)X.$$

Характеристическое уравнение равно собственному оператору системы:

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n = 0$$

Решение такого уравнения относительно управляемой величины может быть представлено в виде суммы

$$y = y_с + y_в,$$

где y_c— в общем случае интеграл однородного дифференциального уравнения, не зависящий от вход ной величины $x;$

y_B— частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения, зависящий от входной величины x.

Другими словами, y_c характеризует свободное движение системы, то есть движение системы, выведенной из состояния равновесия и предоставленной самой себе, а $y_{\text{в}}$ — вынужденное движение системы, возникшее под действием возмущения.

Устойчивость системы зависит от характера свободного движения системы. Система устойчива, если после некоторого времени свободное движение в системе затухает, то есть

$$\lim_{t \to \infty} y_c(t) = 0.$$

Величина и характер свободного движения системы определяются уравнением

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t},$$

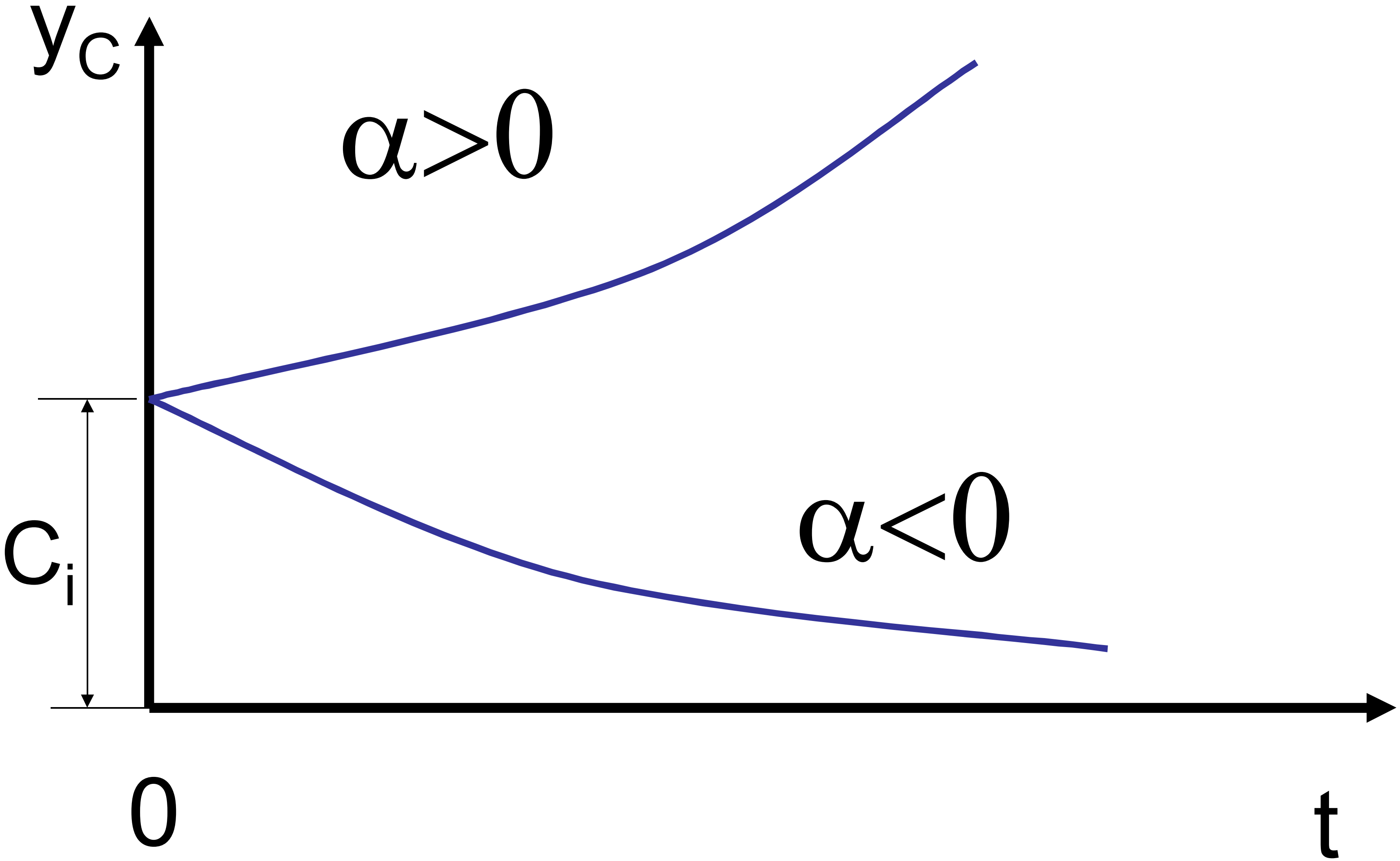
где λ_i ,- — корни характеристического уравнения *G(p)* = O

C_i — постоянные коэффициенты.

Характер свободного движения зависит от вида (вещественный, комплексный, мнимый) и знака корня:

1) $\lambda_l = \pm a_i$, тогда

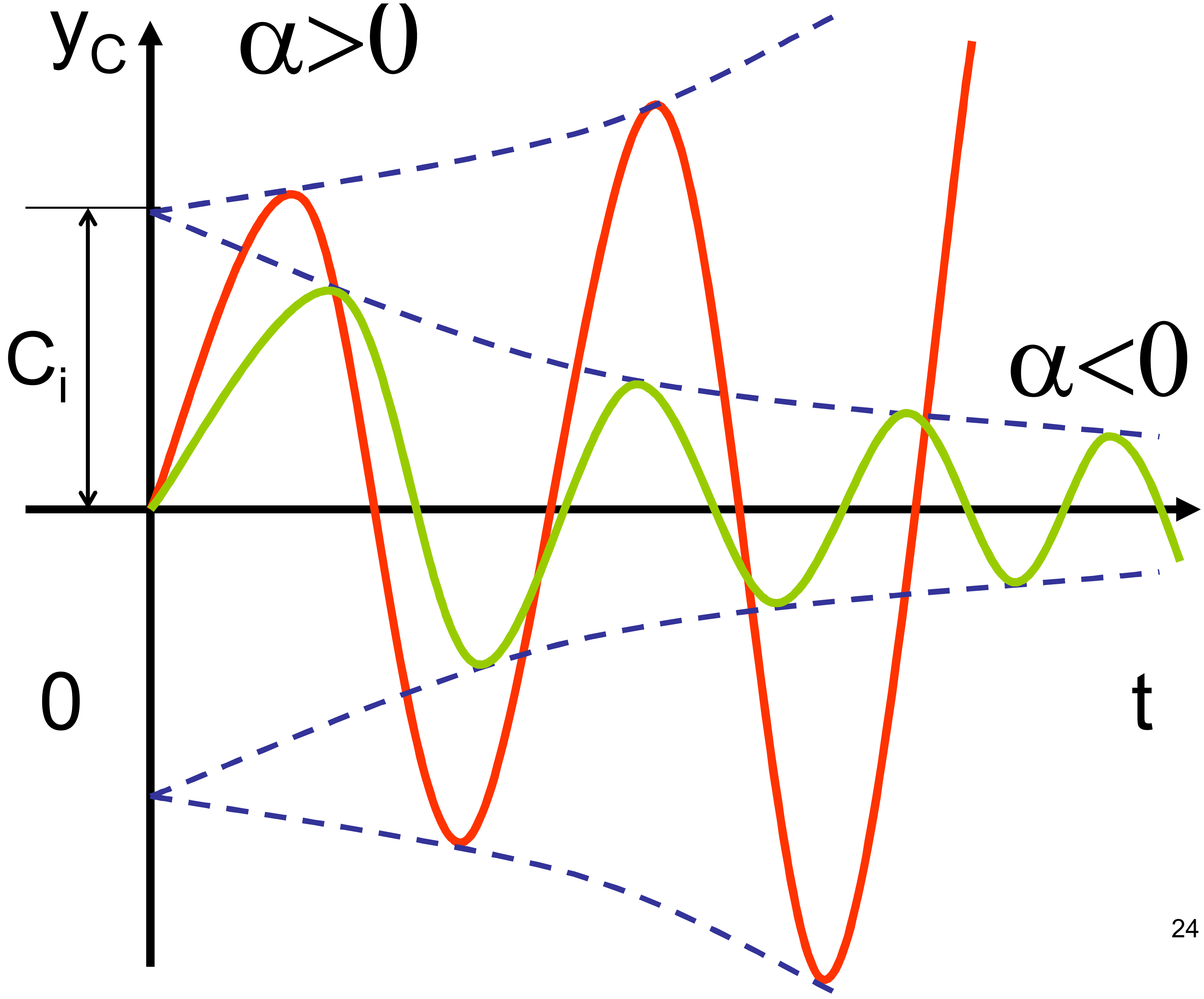
$$y_c = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\pm \alpha_i t},$$


y_C
$\alpha>0$
$\alpha<0$
C_i
0
t

2) $\lambda_I = \pm(\alpha_i \pm j\omega_I)$,

тогда

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\pm\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_c);,$$


y_C
$\alpha>0$
C_i
$\alpha<0$
0
t

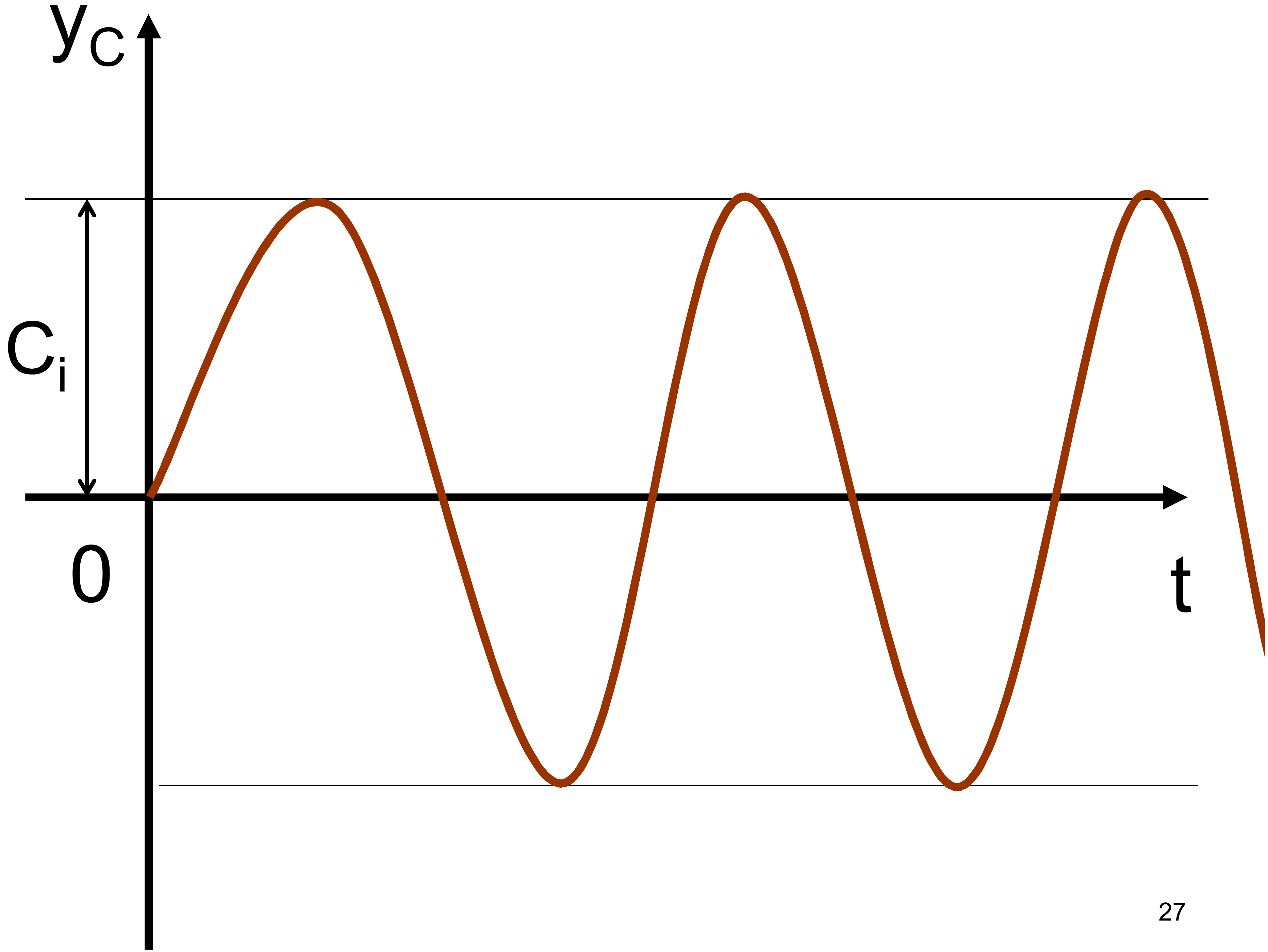
Система устойчива, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части (a<0). Этот случай представлен на рисунке. Система неустойчива, если корни характеристического уравнения имеют положительные действительные части (a>0).

Если линейная система в числе своих корней имеет пару чисто мнимых, то в системе возникают незатухающие колебания, а сама система находится на границе устойчивости.

3). $$\lambda_i = \pm j\omega_i,$$

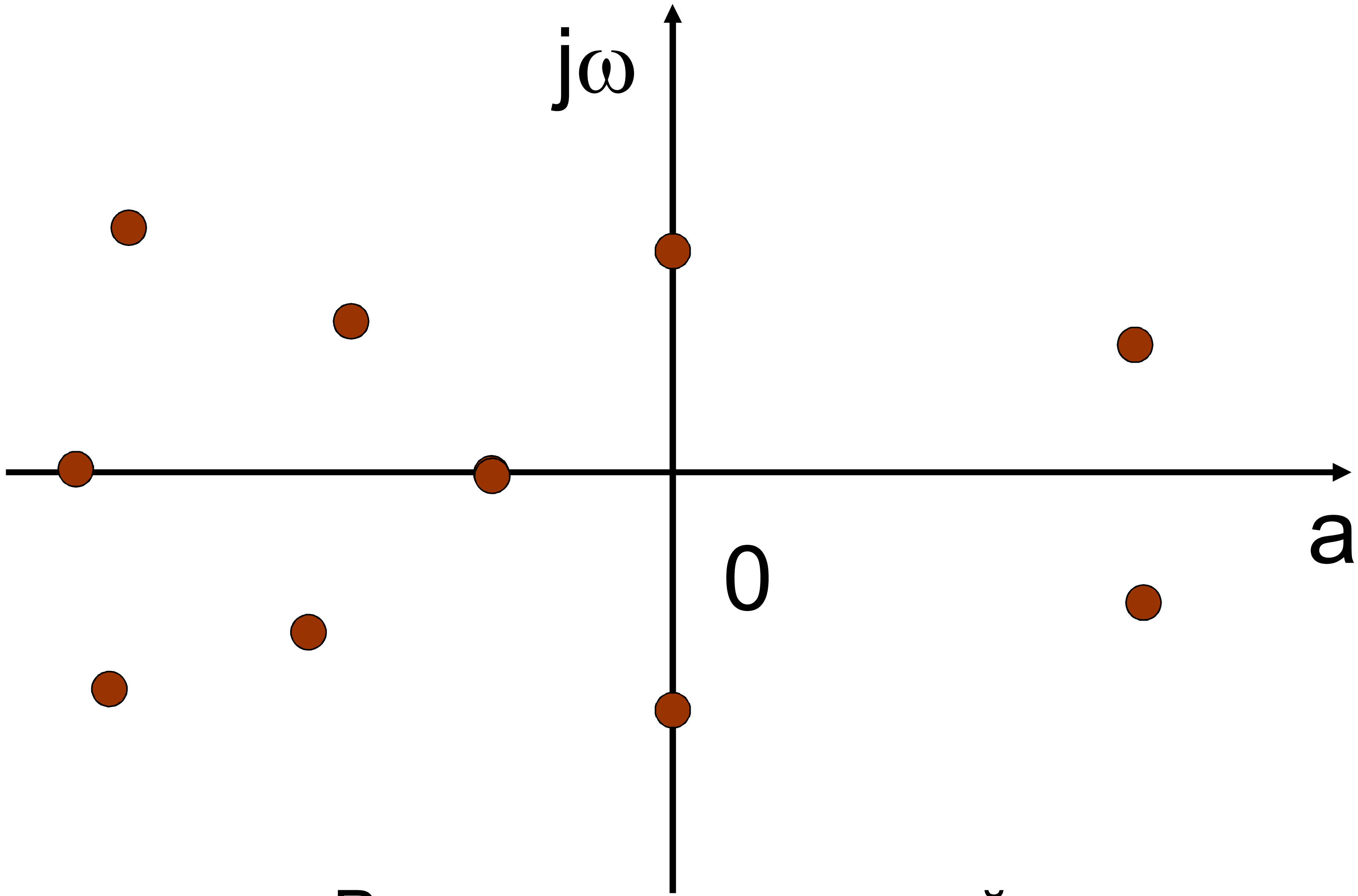
тогда

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} C_i \sin \omega_i t.$$

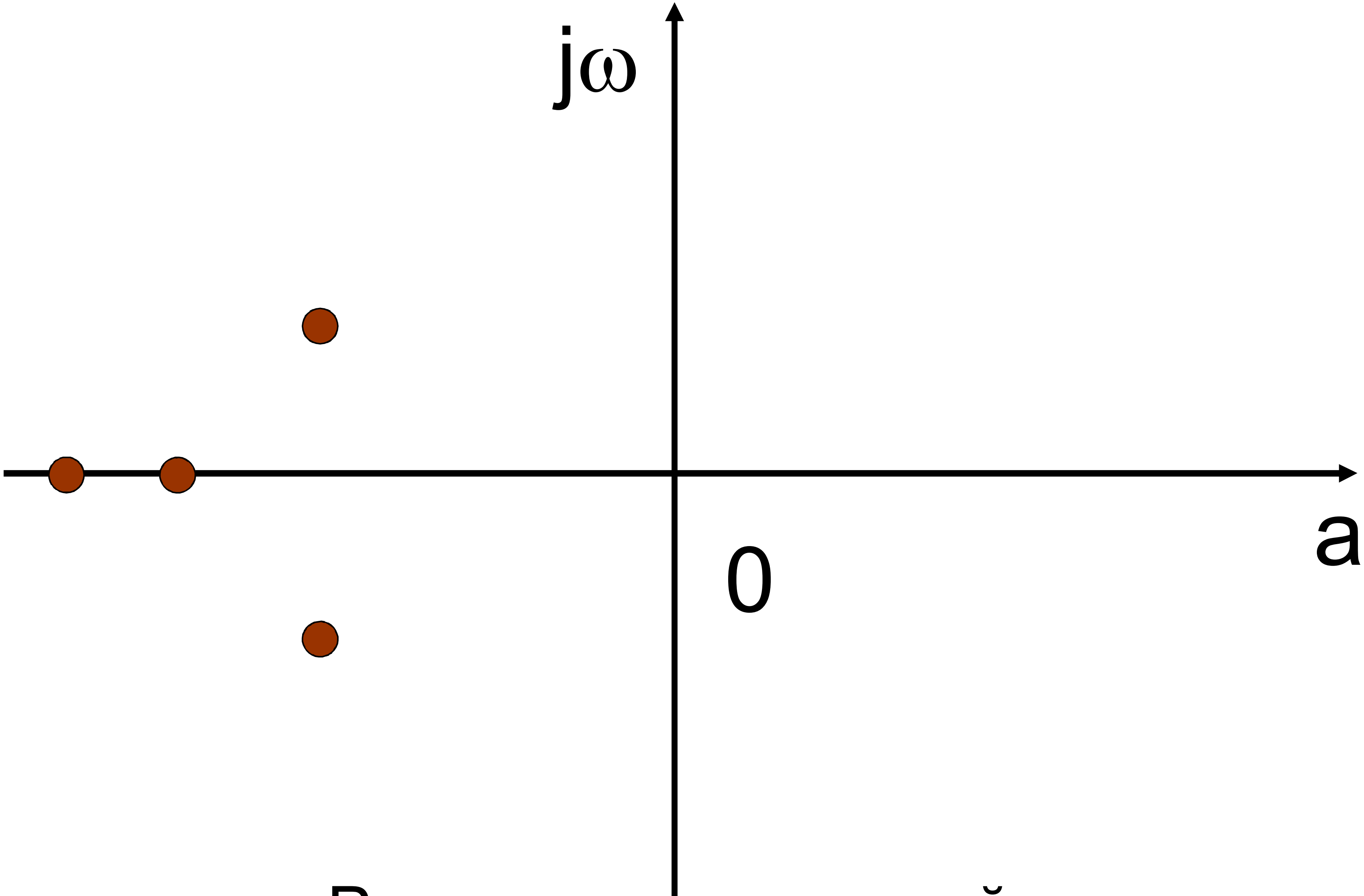


y_C
C_i
0
t

Корни характеристического уравнения часто представляют графически в виде точек на комплексной плоскости, которая в этом случае называется плоскостью корней.



Расположение корней характеристического уравнения неустойчивой САР



Расположение корней характеристического уравнения устойчивой САР

Комплексные корни являются попарно сопряженными и располагаются симметрично относительно веществен-ной оси.

Поскольку все корни с отрицательной действительной частью находятся на плоскости комплексного переменного • слева от мнимой оси, то условие устойчивости линейной системы можно сформулировать так: *линейная система будет устойчива тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического уравнения на плоскости корней располагаются слева от мнимой оси.*

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследовать систему автоматического регулирования путем решения уравнений динамики можно только в простейших случаях, когда дифференциальные уравнения не выше второго порядка. Поэтому для решений уравнений более высоких степеней были предложены определенные способы (критерии устойчивости) нахождения зависимости между коэффициентами уравнения и знаком вещественной части его корней.

Критерии устойчивости позволяют, не решая дифференциальных уравнений системы, определить необходимые в то же время достаточные условия ее устойчивости.

Критерий Рауса представляет собой последовательность математических операций, осуществляемых при решении задачи, и является весьма простым методом анализа характеристического уравнения системы

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n = 0,$$

Уравнение записывается так, что значение $a_0 > 0$. Затем составляется таблица из коэффициентов исходного характеристического уравнения. Для этого выписывается строка четных коэффициентов, а затем под ней — строка нечетных коэффициентов характеристического уравнения. Остальные коэффициенты в нижестоящих строках выражаются через коэффициенты вышестоящих строк.

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
b_0 & b_2 & b_4 & \cdots \\
b_1 & b_3 & b_5 & \cdots \\
c_0 & c_2 & c_4 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{vmatrix}
$$

$$b_0 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_1};$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1};$$

$$b_1 = \frac{a_3 b_0 - a_1 b_2}{b_0} \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Чаще всего эти коэффициенты записывают следующим образом:

$$b_0 = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 = a_2 - \lambda_1 a_3;$$

$$b_2 = a_4 - \lambda_1 a_5 \quad и \quad т.д.$$

$$b_1 = a_3 - \frac{a_1}{b_0} b_2 = a_3 - \lambda_2 b_2;$$

$$b_3 = a_5 - \lambda_2 b_4;$$

$$b_5 = a_7 - \lambda_2 b_6 \quad и \quad т.д.$$

Условие устойчивости Рауса формулируется так: *система устойчива, если все элементы первого столбца таблицы Рауса имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком коэффициента* a_0. То есть, если $a_0>0$, то $a_1>0$; $b_0>0$; $b_1>0$; $c_0 > 0$ и т. д.

Если коэффициент первого столбца n-ной строки равен нулю, то это значит, что среди корней характеристического уравнения имеются два чисто мнимых корня. В этом случае система находится на границе устойчивости.

Критерий Гурвица, подобно критерию Рауса, основан на определенной табличной записи коэффициентов характеристического уравнения

$$G(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}\,p + a_n = 0$$

и формулирует условие устойчивости в зависимости от знаков определителей.

Определитель Гурвица записывается следующим образом. Все коэффициенты от a_1 до a_n располагаются в порядке возрастания по главной диагонали. Вверх от главной диагонали в столбцах записываются коэффициенты характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а вниз — с убывающими индексами. На месте коэффициентов, индексы которых больше, чем n, и меньше, чем нуль, проставляются нули.

$$\Delta n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ 0 & . & . & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Критерий Гурвица гласит: *система устойчива тогда и только тогда, когда все диагональные миноры больше нуля, то есть совпадают со знаком первого коэффициента a_0:*

$$\Delta_0 = a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots \quad \Delta_n > 0.$$

Пользуясь методами матричной алгебры, нетрудно доказать, что критерии Рауса и Гурвица практически являются одним и тем же критерием. Однако метод Рауса несколько проще и требует меньших затрат времени на построение и решение неравенств.

Критерий Михайлова

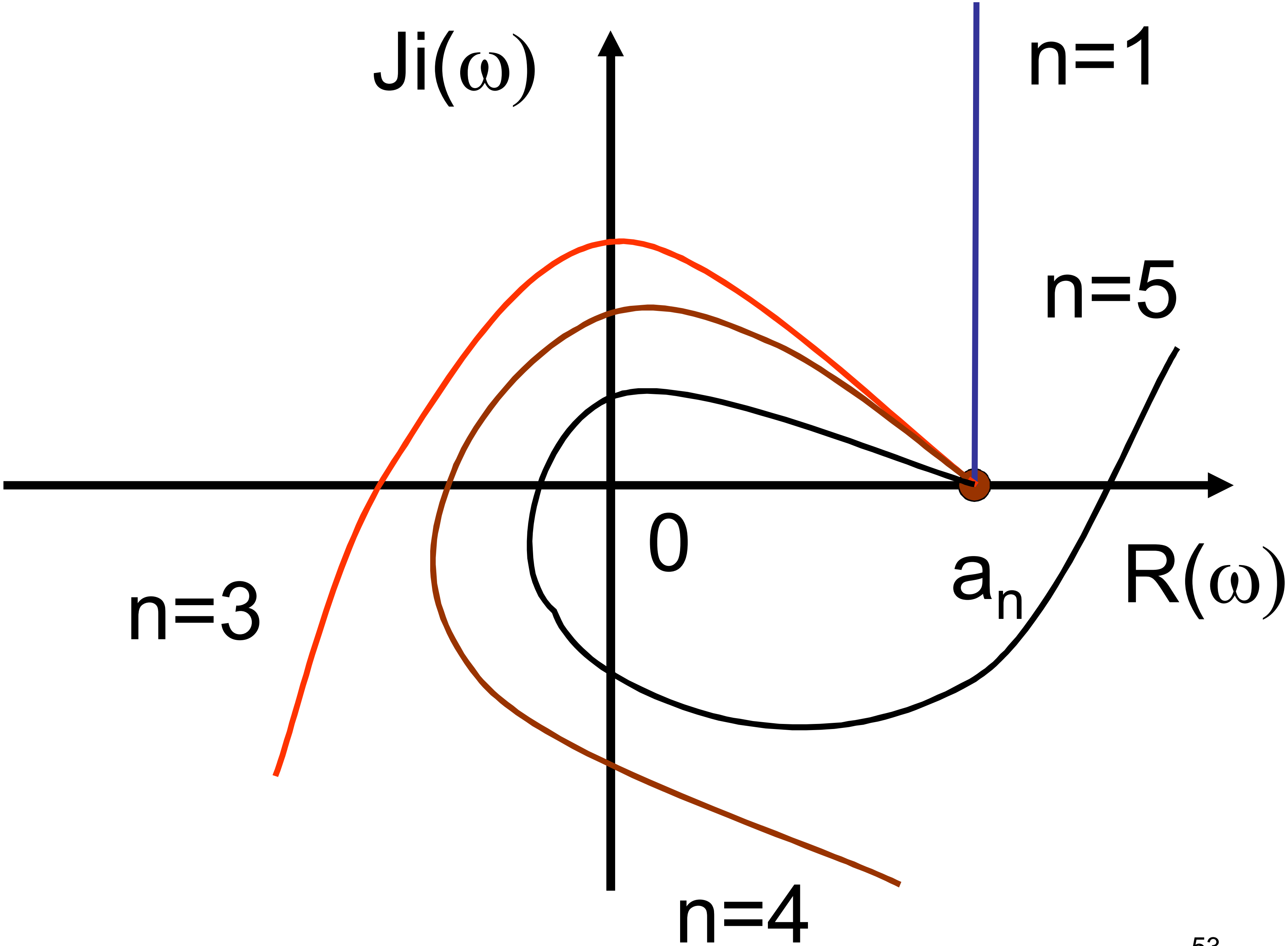
Характеристическое уравнение любой степени можно представить в виде комплексного полинома $G(p) = 0$. После подстановки $G(j\omega)$ и отделения вещественной *части уравнения от мнимой полином можно привести к виду:*

$$G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega),$$

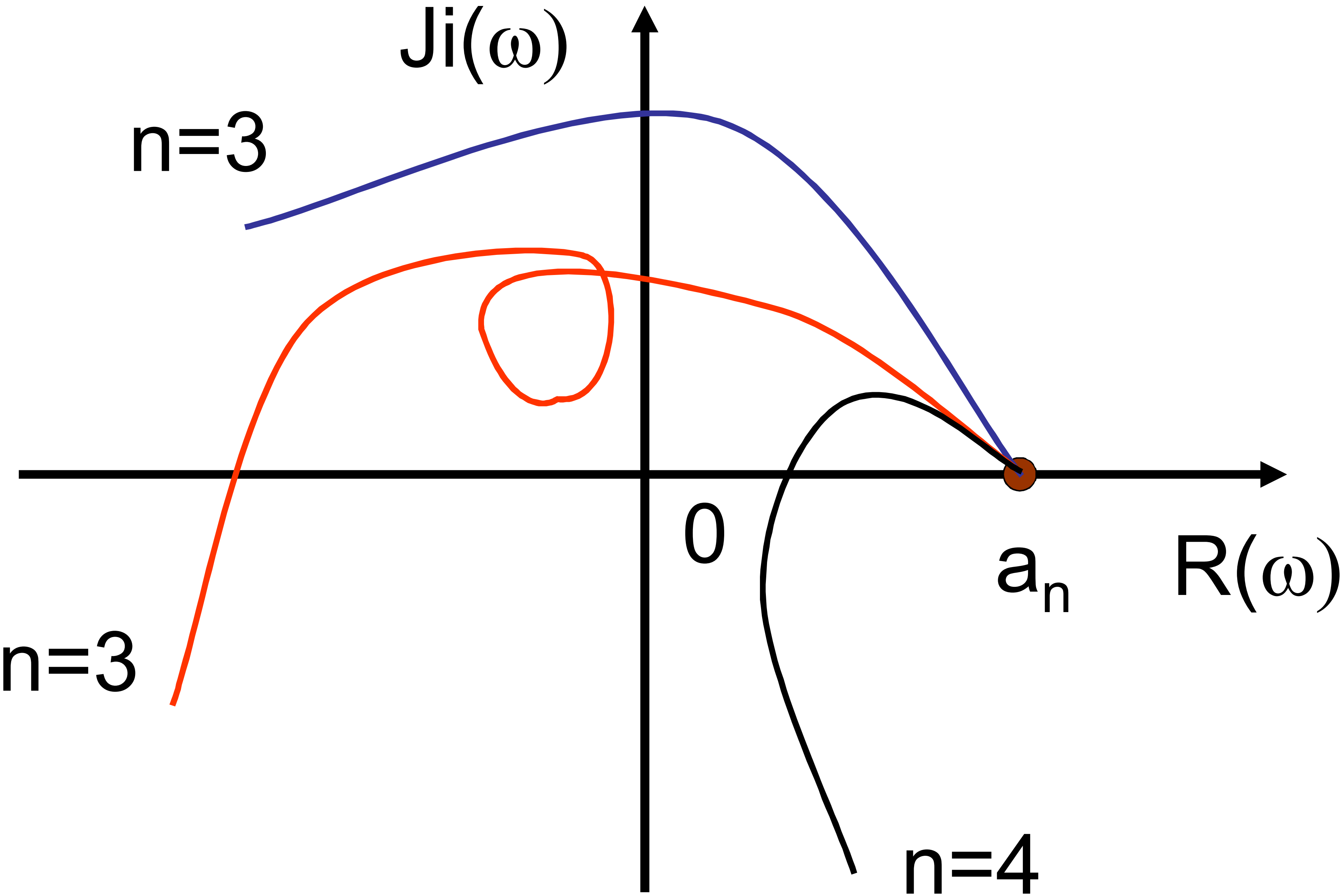
где $G(j\omega)$ — *вектор, амплитуда и фаза которого являются функциями* ω.

А.В. Михайлов доказал, что *для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении угловой частоты* (*ω от 0 до ∞ годограф, описываемый концом вектора G(j(d), начинался на вещественной положительной полуоси и, вращаясь только против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль, проходил последовательно число квадрантов, равное степени n характеристического уравнения, повернувшись на угол $n\pi/2$*

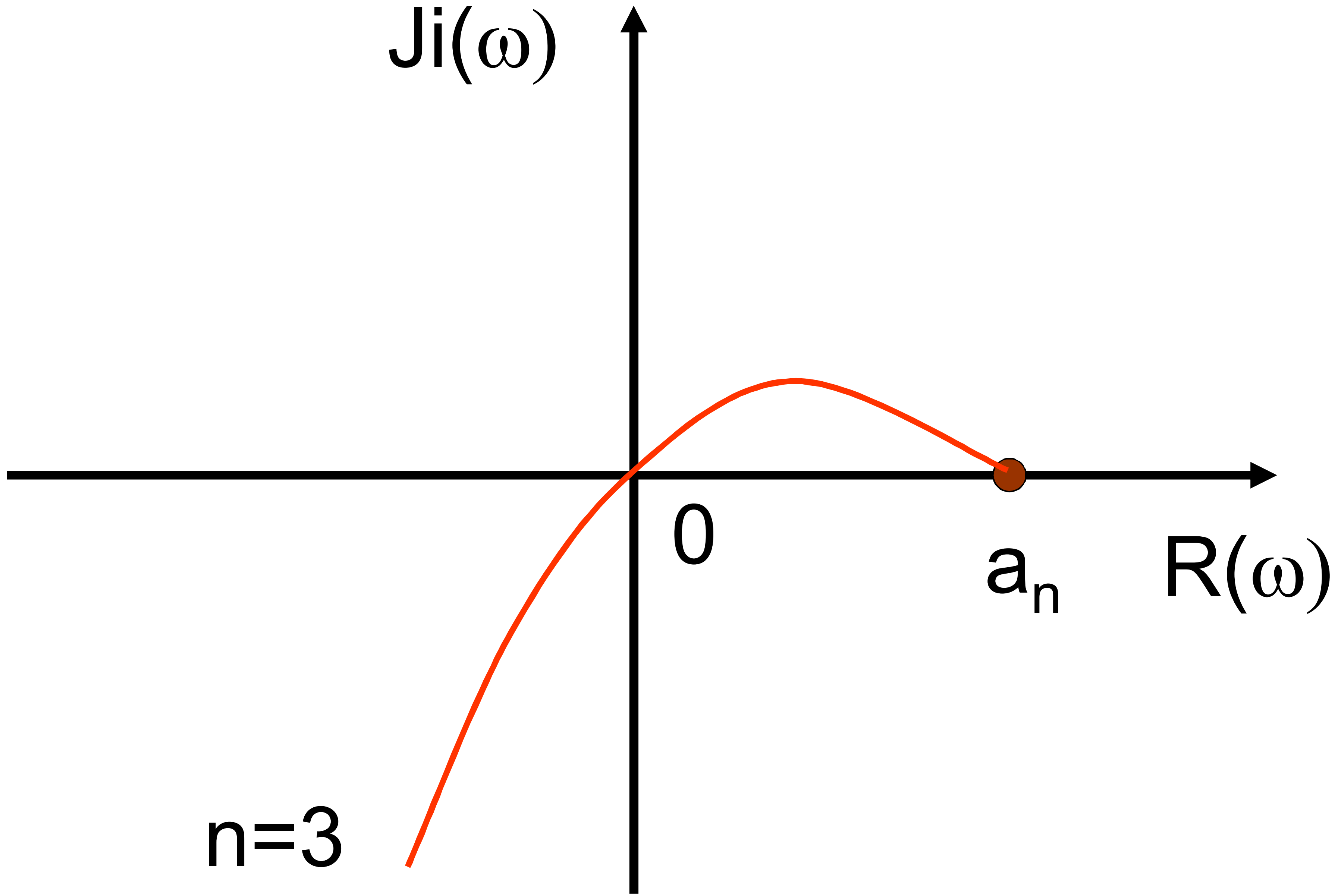
Примеры годографов устойчивых систем различных порядков показаны на рисунке. Уравнению первого порядка $a_0p + a_1 = 0$ соответствует прямая, параллельная мнимой оси, находящаяся на расстоянии $a_1 = a_n$ от нее.


Ji(ω)
n=1
n=5
0
a_n
R(ω)
n=3
n=4

Примеры годографов устойчивых систем различных порядков показаны на рисунке.


Ji(ω)
n=3
n=3
0
a_n
R(ω)
n=4

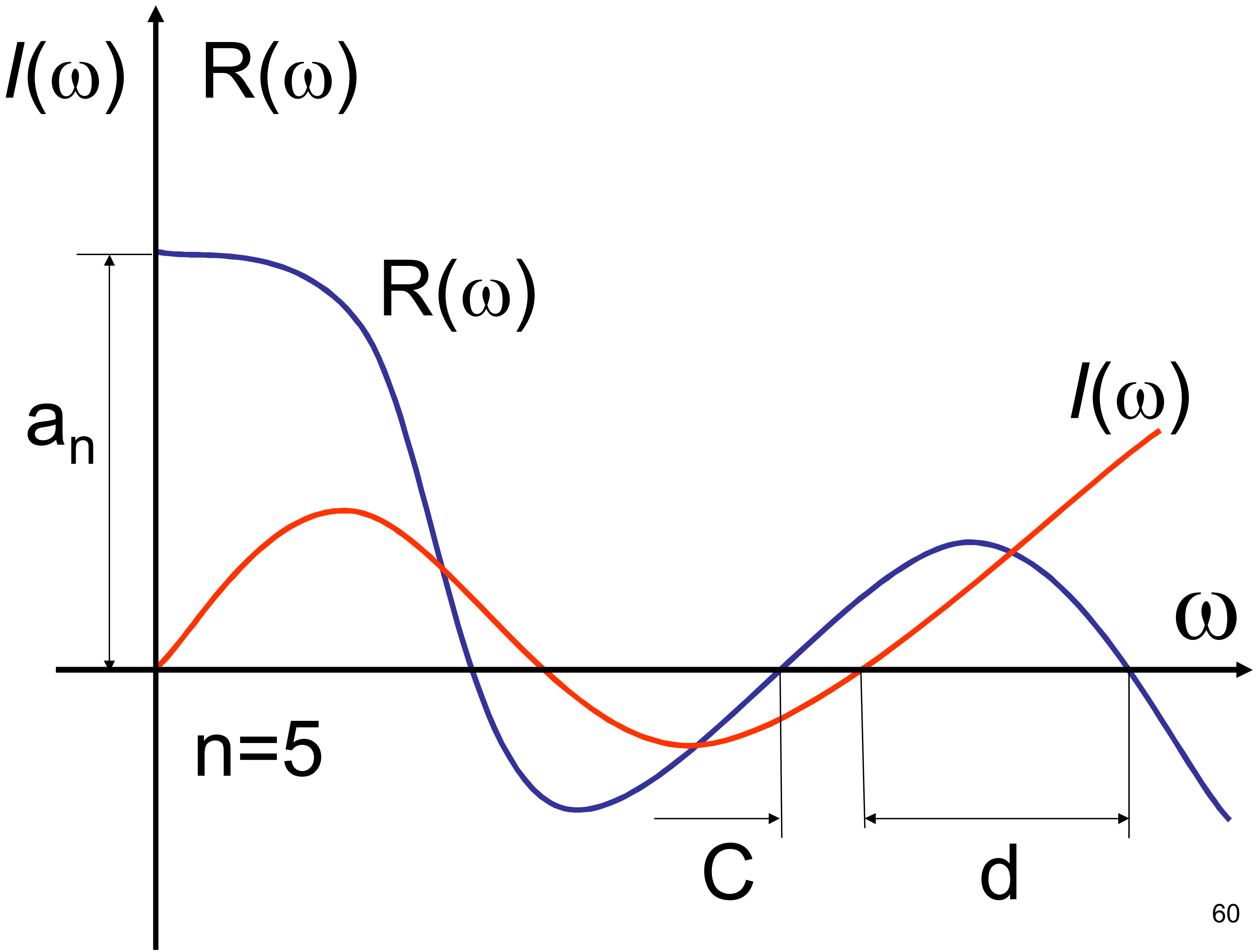
Система находится в нейтральном состоянии (на границе устойчивости), если годограф характеристического вектора при некотором значении ω проходит через начало осей координат



Ji(ω)
0
a_n
R(ω)
n=3

Следствие из критерия Михайлова. По мере вращения вектора $G(j\omega)$ вещественная и мнимая оси пересекаются годографом Михайлова поочередно. Каждому пересечению вещественной оси соответствует корень полинома $I(\omega)$, каждому пересечению мнимой оси соответствует корень полинома $R(\omega)$.

Система устойчива тогда и только тогда, когда корни полиномов R(ω) и I(ω) с измененением частоты ω от 0 до ∞ перемежаются (чередуются) и равны вещественным числам. Общее число корней этих поли*номов должно равняться порядку уравнения n.*

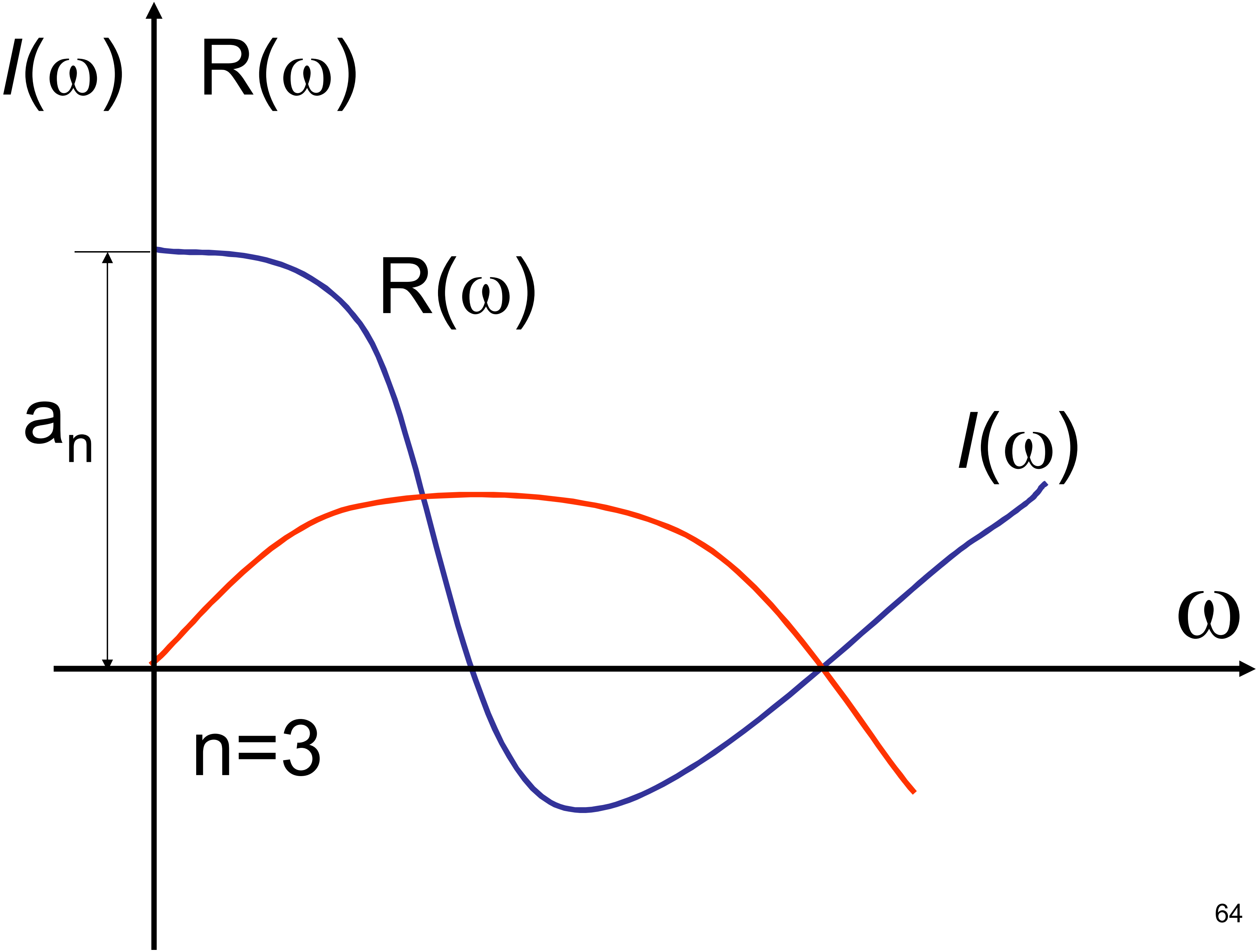


I(ω) R(ω)
R(ω)
I(ω)
ω
a_n
n=5
C
d

По этим графикам определяется не только устойчивость систем, но и *запас устойчивости.* Сближение корней полиномов свидетельствует о приближении системы к границе устойчивости. О запасе устойчивости судят по процентному отношению наиболее узкого интервала между корнями к смежному с ним наиболее широкому интервалу:

$$3 = \frac{C}{d}100\%.$$

На следующем рисунке показана система, находящаяся на границе устойчивости.


I(ω) R(ω)
R(ω)
a_n
I(ω)
ω
n=3

Критерии Найквиста—Михайлова называют также амплитудно-фазовым критерием. Об устойчивости замкнутой системы судят в этом случае по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы $W(j\,\omega)$.

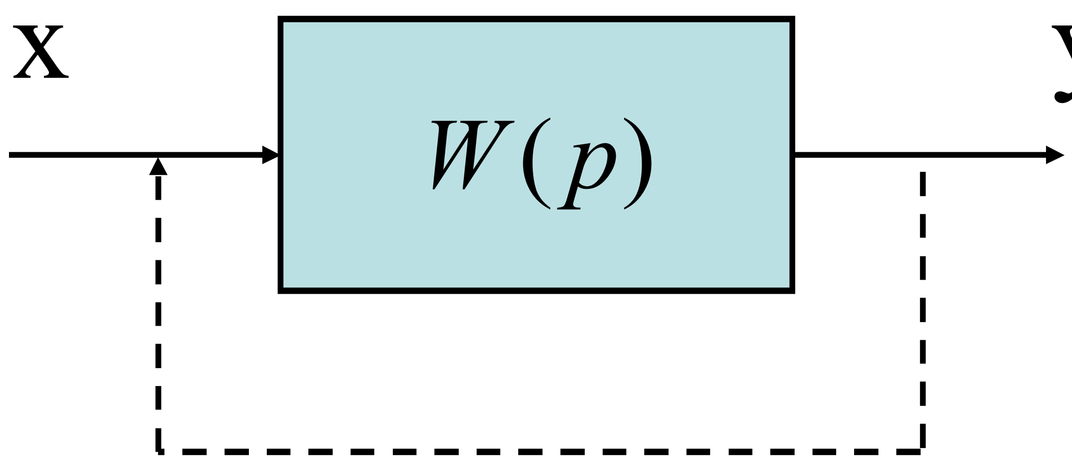
Исследование устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовым характеристикам разомкнутой позволяет значительно облегчить решение задачи даже в том случае, когда для некоторых звеньев неизвестны дифференциальные уравнения. Нужно располагать лишь амплитудно-фазовыми характеристиками, которые могут быть заданы в графической форме.

Пусть дана разомкнутая система с передаточной функцией $W(p)$. Уравнение разомкнутой системы

$$G(p)y = H(p)x.$$

Замкнем систему: сигнал *y* с выхода подадим на вход. Полагая, что *x=-y*, получим уравнение для замкнутой системы

$$E(p)=[G(p) + H(p)]y =0.$$

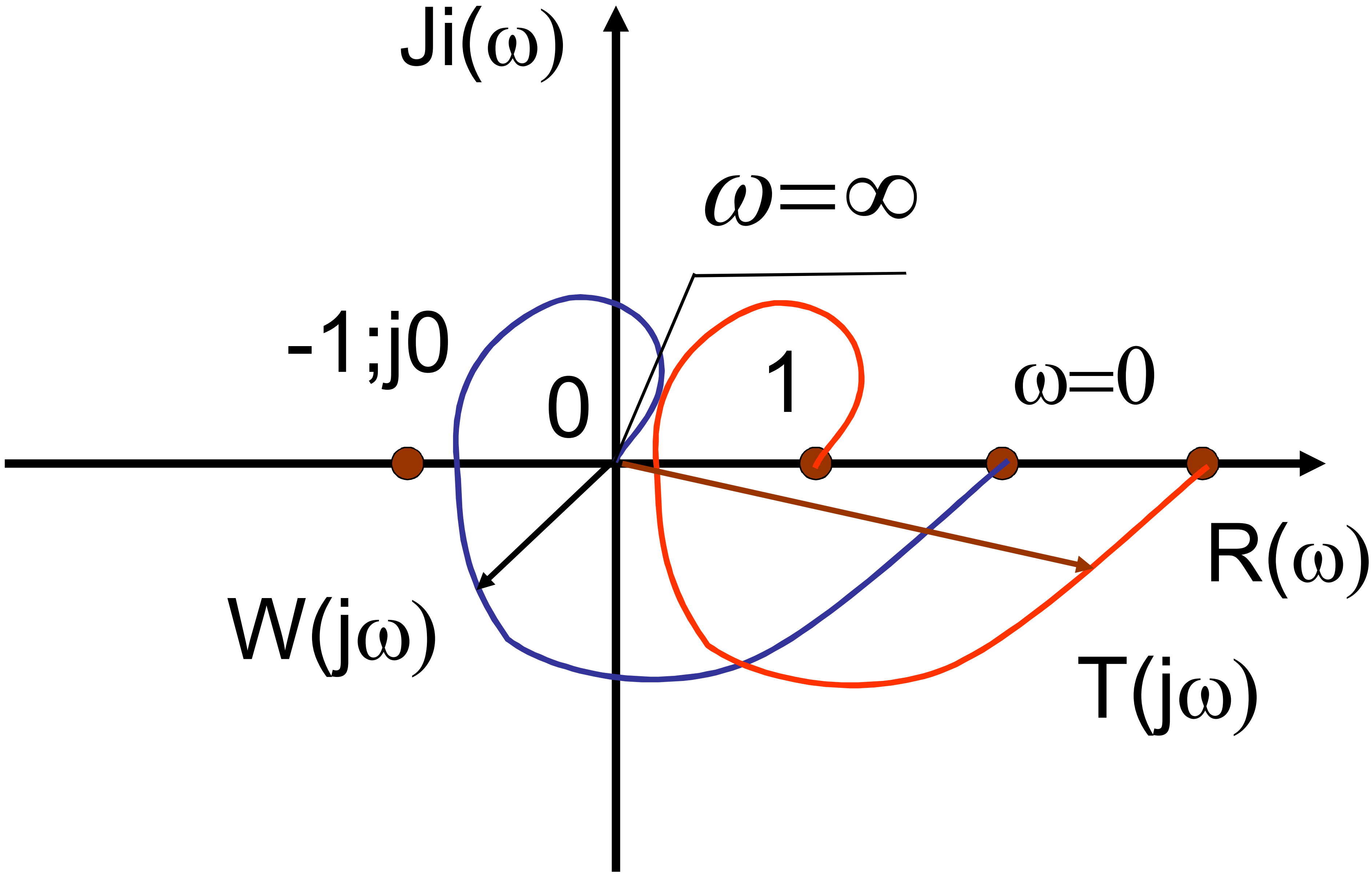


Заменив *p* на jω и разделив уравнение на G(jω), получим:

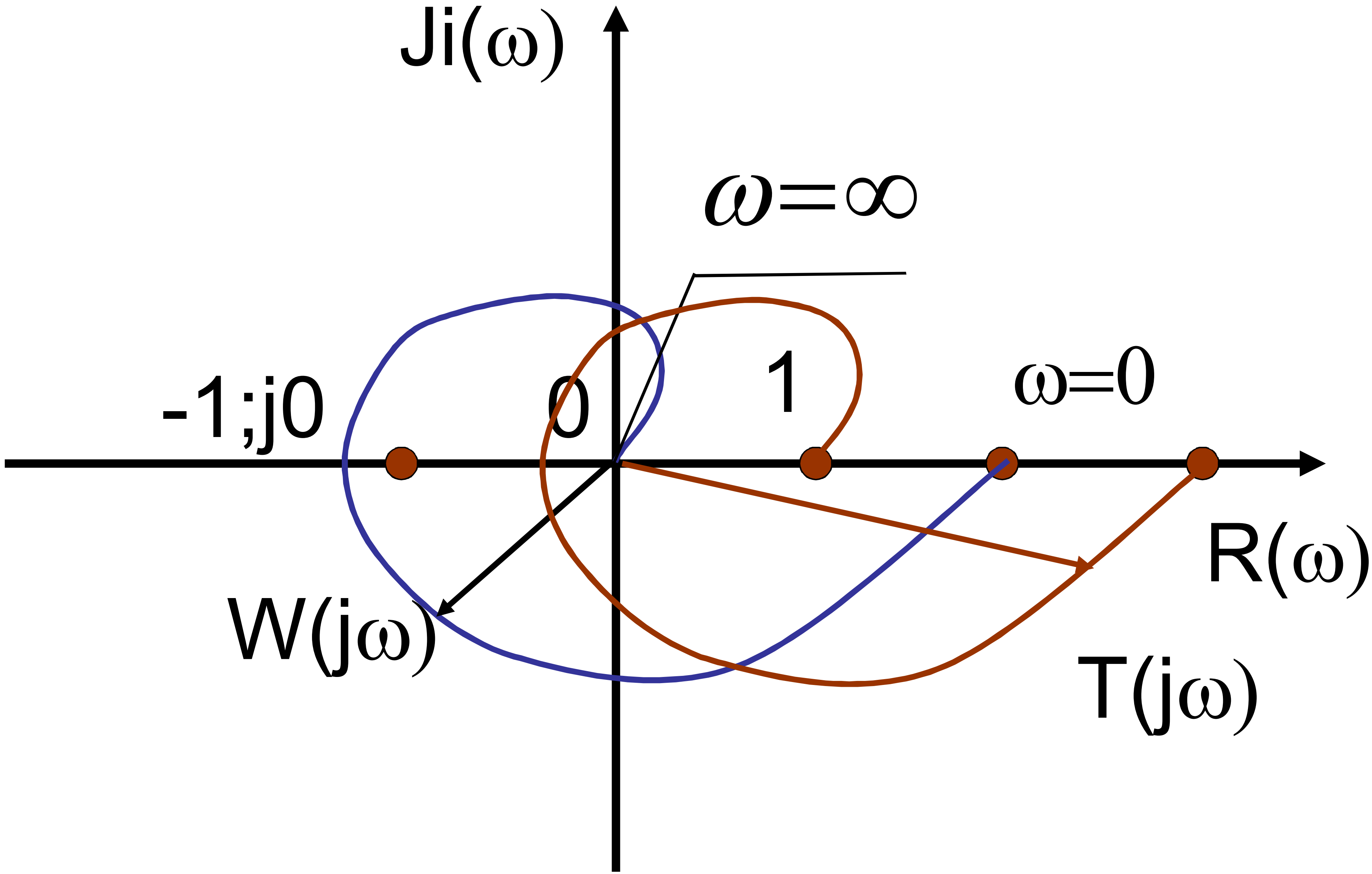
$$T(j\omega)=\frac{E(j\omega)}{G(j\omega)}=1+W(j\omega).$$

При анализе замкнутой системы по ее поведению в разомкнутом состоянии могут быть два случая: система устойчива и система неустойчива.

Критерий Найквиста—Михайлова формулируется следующим образом: система автоматического регулирования, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если амплитудно-фазовая характеристика этой системы в разомкнутом состоянии не охватывает точку с координатами — 1; *j0* (рис.)

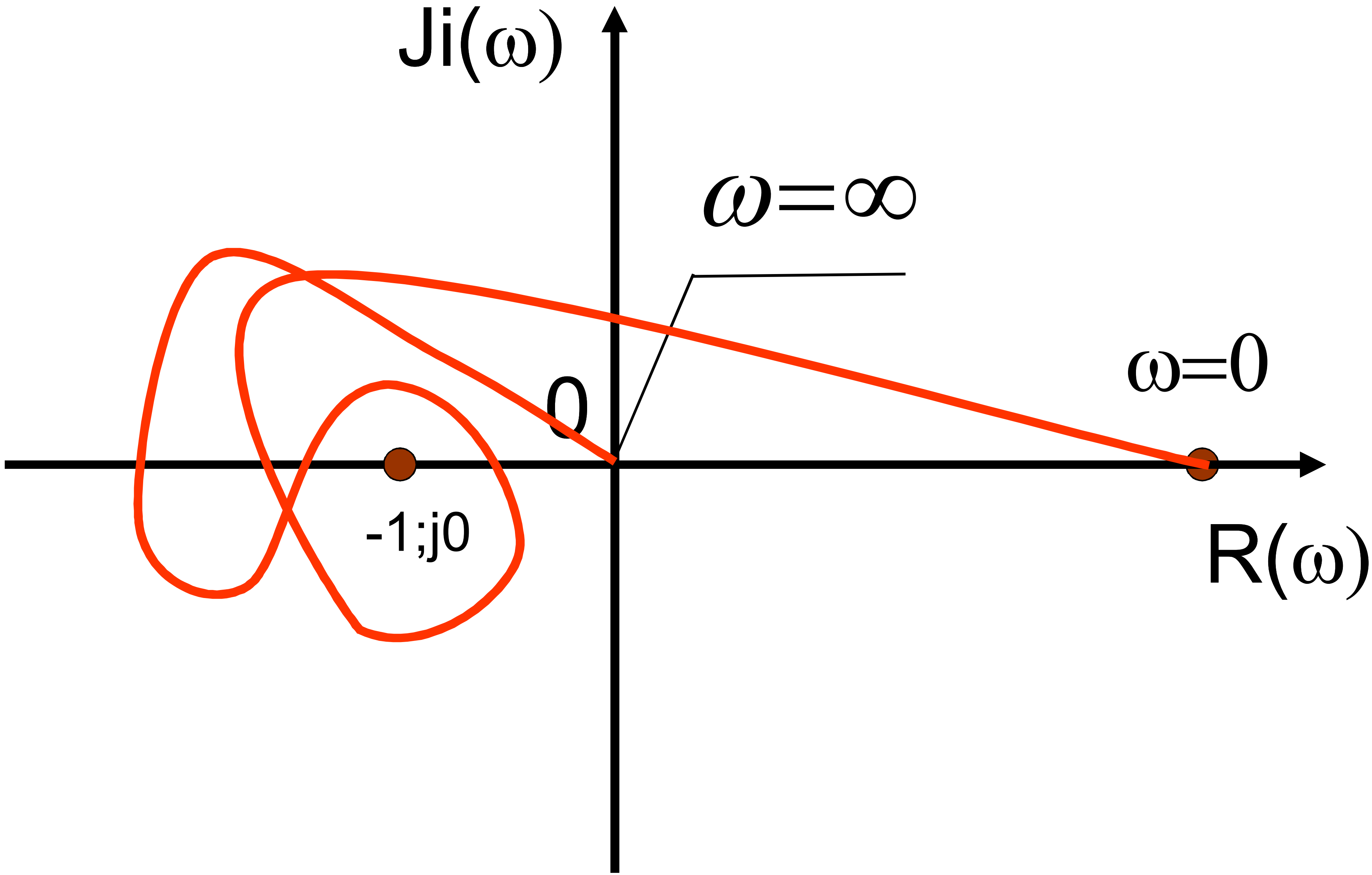

Ji(ω)
ω=∞
-1;j0
0
1
ω=0
R(ω)
W(jω)
T(jω)

Амплитудно-фазовые характеристики неустойчивой системы выглядят следующим образом:


Ji(ω)
ω=∞
1
ω=0
-1;j0
0
R(ω)
W(jω)
T(jω)

Система автоматического регулирования, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если ее амплитудно-фазовая характеристика в разомкнутом состоянии при изменении частоты ω *от* 0 *до* ∞ *охватывает точку с координатами -1; j0 в положительном (против часовой стрелки) направлении q раз.*

На рисунке изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, которая будет устойчива в замкнутом состоянии, если число корней с положительной вещественной частью характеристического уравнения разомкнутой системы q=2.


Ji(ω)
ω=∞
ω=0
0
-1;j0
R(ω)

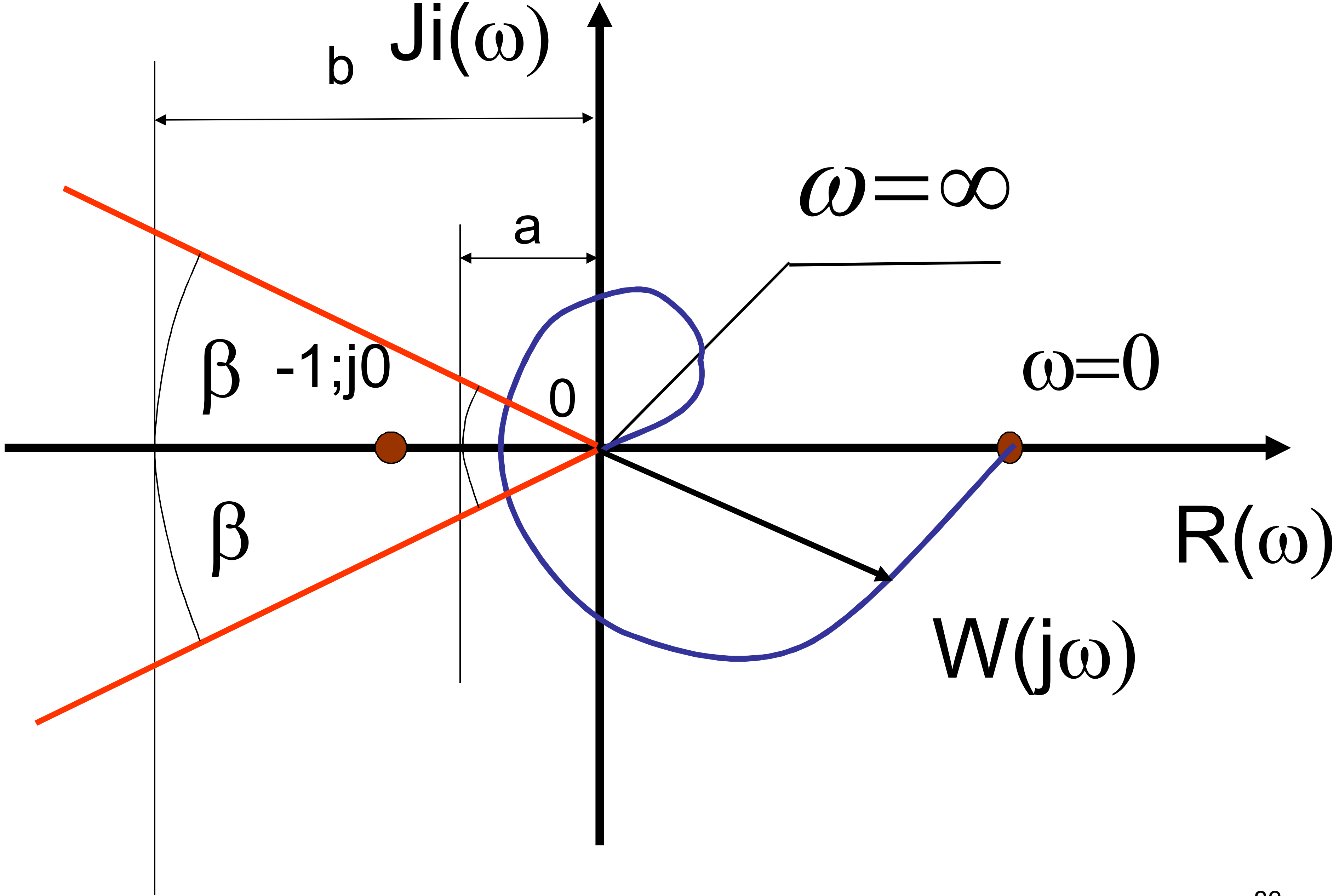
Если амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку с координатами -1;j0, то система регулирования находится на границе устойчивости (в нейтральном состоянии).

При практических расчетах система регулирования должна находиться на определенном расстоянии от границы устойчивости, то есть иметь определенный запас устойчивости. Под запасом устойчивости понимается некоторая величина, характеризующая при данном критерии устойчивости достаточное удаление системы от границы устойчивости.

Для критерия Найквиста—Михайлова запас устойчивости определяется по амплитуде и по фазе.

Запасом устойчивости по амплитуде именуется величина, указывающая, во сколько раз амплитуда вектора $W(j\omega)$ при $\varphi(\omega) = -\pi$ больше или меньше единицы. *Запасом устойчивости по фазе* называется угол β, который образует вектор единичной величины с отрицательной действительной полуосью.

Графически определение запаса устойчивости сводится к определению области, окружающей точку -1;j0, через которую амплитудно-фазовая характеристика не должна проходить. Величину *a* обычно берут менее 0,3, а величину *b* — более 3. Запас по фазе практически берется равным β = 30-50°.



b
Ji(ω)
ω=∞
a
β
-1;j0
0
ω=0
β
R(ω)
W(jω)

В ряде случаев удобнее пользоваться логарифмическим критерием устойчивости, который представляет собой интерпретацию критерия Найквиста — Михайлова в логарифмической форме.

- Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы сдвиг фазы на частоте единичного усиления разомкнутой системы $W(j\mathrm{w})$ не достигал значения -180°.
- Если система условно устойчивая, то при модулях больших единицы, фазовый сдвиг может достигать значения -180° четное число раз.

Области устойчивости АСУ

- При помощи критериев устойчивости можно установить факт устойчивости или неустойчивости АСУ, все параметры которой заданы. Однако часто при проектировании и наладке АСУ возникает более общая задача анализа устойчивости – определение допустимых (по условию устойчивости) пределов изменения некоторых *варьируемых параметров* системы.

- В качестве таких параметров обычно рассматривают коэффициенты и постоянные времени управляющего устройства (регулятора), которые можно *целенаправленно* изменять при настройке системы. Так как эти коэффициенты и постоянные времени однозначно определяют коэффициенты характеристического уравнения системы, то последние так же могут служить варьируемыми параметрами.

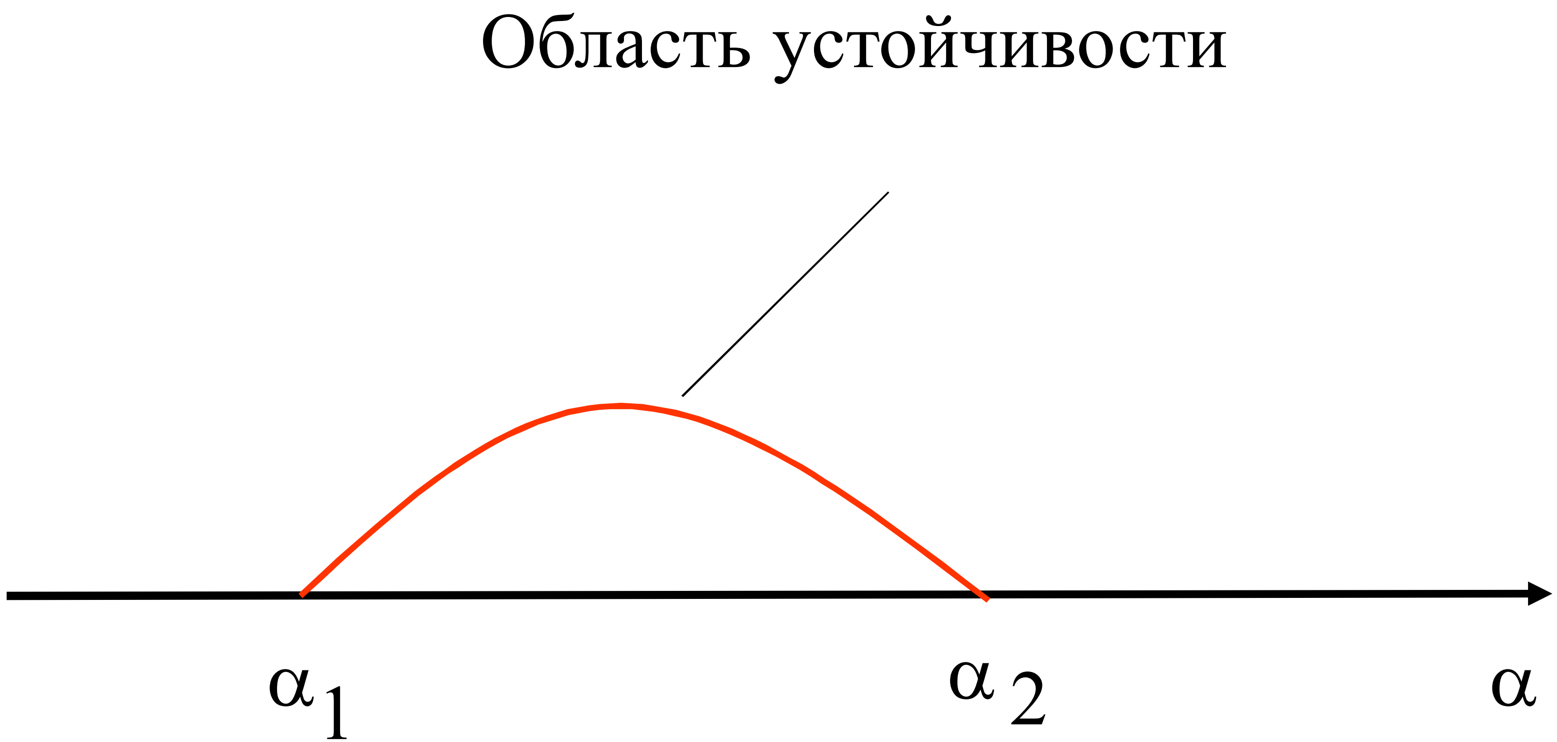
Допустимые пределы варьирования параметров системы можно определить путем построения *областей устойчивости*.

Область устойчивости АСУ – *область в пространстве варьируемых параметров АСУ, каждой точке которой соответствуют только корни характеристического уравнения с отрицательными действительными частями (располагающиеся в левой части комплексной плоскости).*

- Область устойчивости выделяет из всех возможных значений варьируемых параметров лишь те значения, при которых система устойчива.

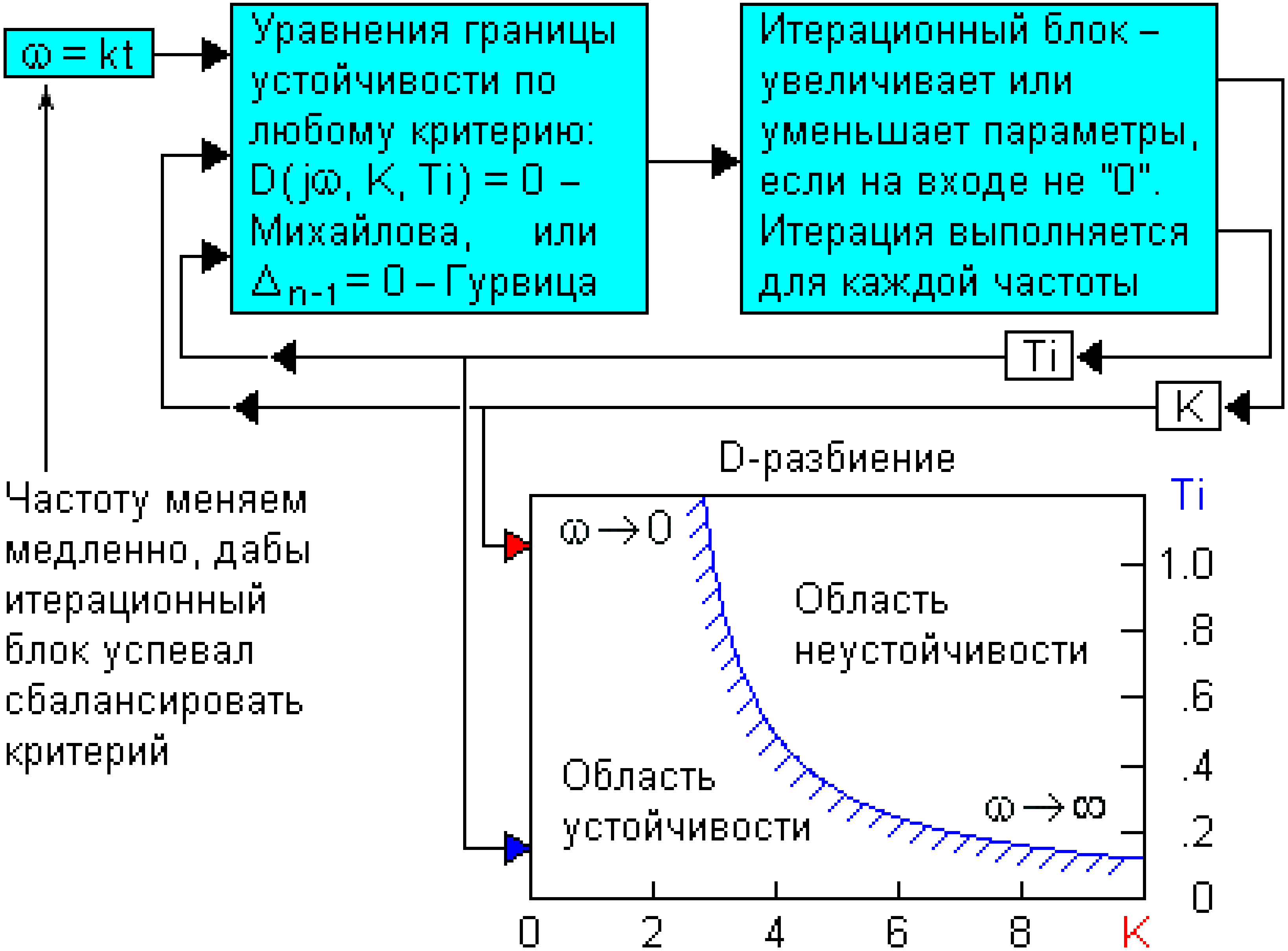
- Поверхность, ограничивающая область устойчивости, называется ***границей области устойчивости.***

Вид области устойчивости и ее границы определяется числом варьируемых параметров. Так при одном варьируемом параметре α область устойчивости – *отрезок прямой*, а граница – *точки* α_1 и α_2 по концам этого отрезка (рис.).


Область устойчивости
α1
α2
α

Для подбора параметров линейных САР пользуются так называемым методом D-разбиения плоскости комплексных переменных, вещественная часть которых равна исследуемому параметру. Этот метод позволяет найти устойчивые и неустойчивые области изменения исследуемого параметра в зоне частот от $-\infty$ до $+\infty$

Выделим два параметра (*K* и *Ti*), влияние которых на устойчивость следует оценить. Остальные параметры зафиксируем. Воспользуемся алгоритмом:


ω = kt
Уравнения границы устойчивости по любому критерию: D(jω, K, Ti) = 0 – Михайлова, или Δn-1 = 0 – Гурвица
Итерационный блок – увеличивает или уменьшает параметры, если на входе не "0". Итерация выполняется для каждой частоты
Ti
K
Частоту меняем медленно, дабы итерационный блок успевал сбалансировать критерий
D-разбиение
ω→0
Область неустойчивости
Область устойчивости
ω→∞
Ti
1.0
.8
.6
.4
.2
0
0
2
4
6
8
K

Итог итерационного алгоритма - область устойчивости (D-разбиение) ограниченная осями и графиком (уменьшение *K* и одной из постоянных времени объекта, как правило, положительно сказывается на устойчивости).

- Наиболее удобно в итерационном алгоритме для системы любого порядка использовать критерий Михайлова, тогда уравнение границы: $D(jw) = 1 + W(jw) = 1 + R(jw)/Q(jw) = R(jw) + Q(jw) = 0$,

- При заданной частоте существует только одна координата (K, T_i), которой будет соответствовать положение системы на границе устойчивости.

т.е. $K\,(1 + T_3(jw)) \ldots + jw(1 + T_1(jw))\,(1+T_2(jw)) \ldots = 0$

THE END