Типовые звенья, их свойства, характеристики. Виды соединений звеньев. Составление и преобразование структурных схем САУ. Общее уравнение САУ.

Для удобства исследования динамических свойств САР их составные части заменяются элементарными звеньями, число которых оказывается сравнительно небольшим. Каждое элементарное звено характеризуется определенным типом дифференциального уравнения.

Выделяют звенья так, чтобы состояние каждого звена определялось одной переменной. В качестве переменной, характеризующей состояние звена, берут выходную величину. Порядок дифференциального уравнения звена должен быть не выше второго.

Не всегда один конструктивный элемент системы заменяется одним звеном. Иногда одно звено может объединить два или три элемента автоматики или, наоборот, один элемент заменяется двумя или тремя элементарными звеньями. В результате такого деления получается структурная схема системы, звенья которой уже различаются не по выполняемым ими функциям, а лишь по уравнениям переходного процесса.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся элементарные звенья и их уравнения.

Усилительное безынерционное звено (пропорциональное, нулевого порядка) — наиболее простое звено САР, без запаздывания.

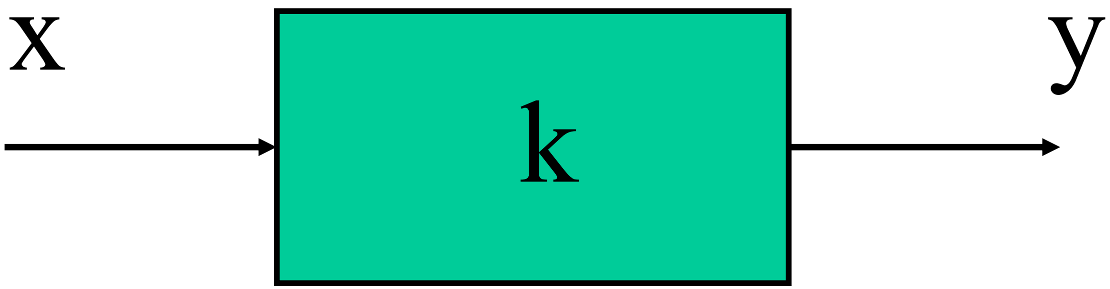
Зависимость между входной x и выходной y величинами такого звена описывается алгебраическим уравнением

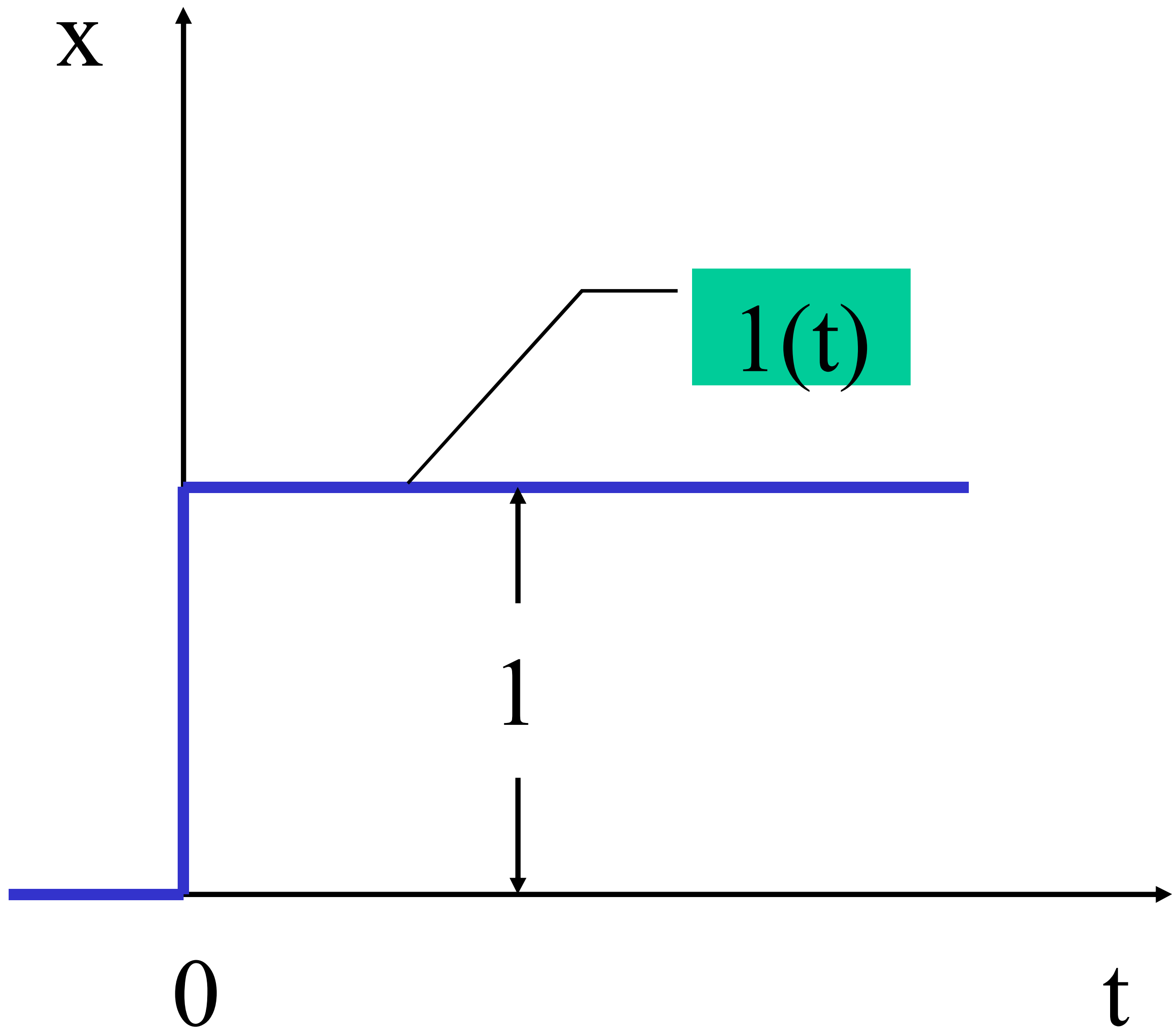
$$y = kx,$$

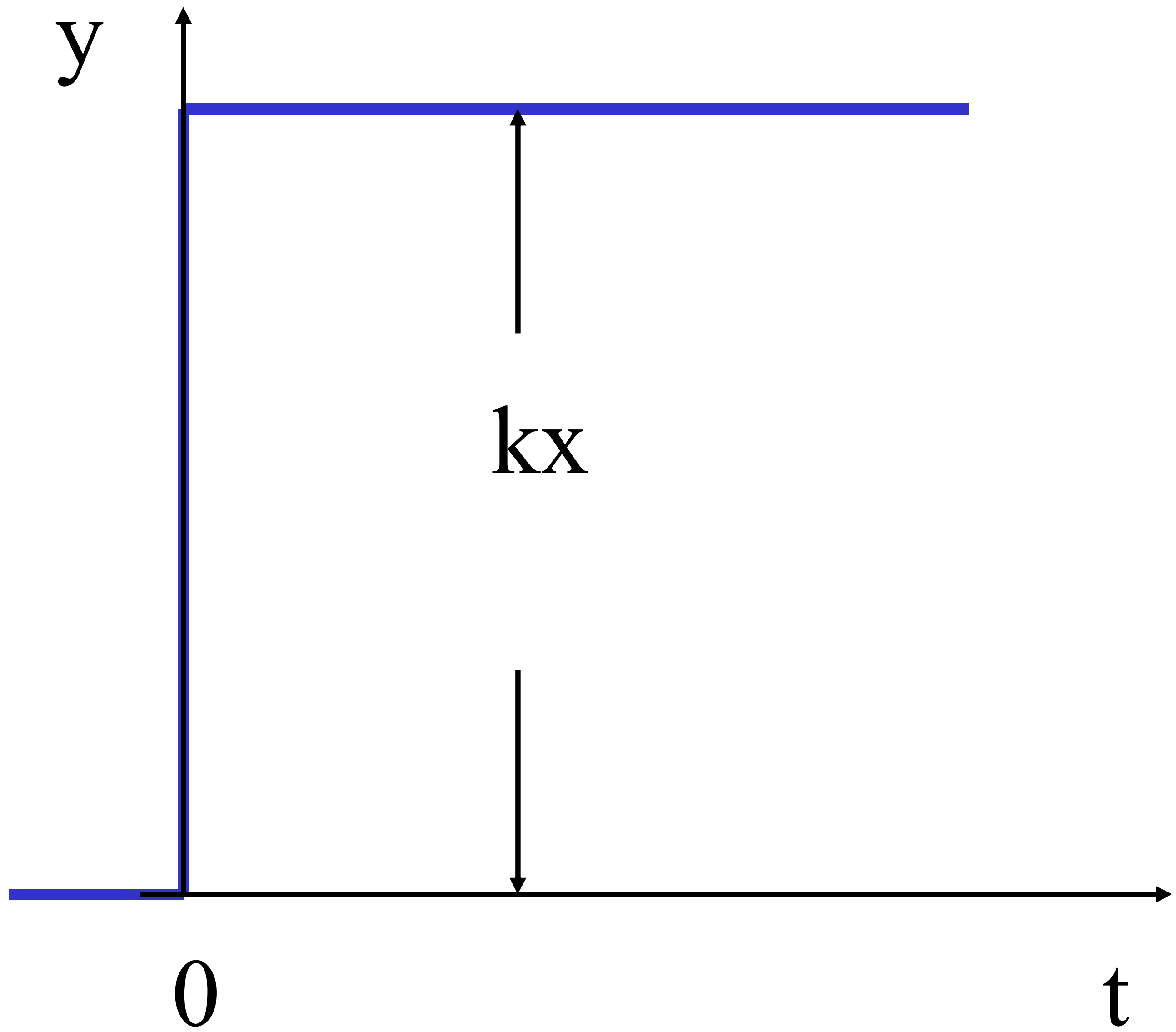
где k — коэффициент усиления.

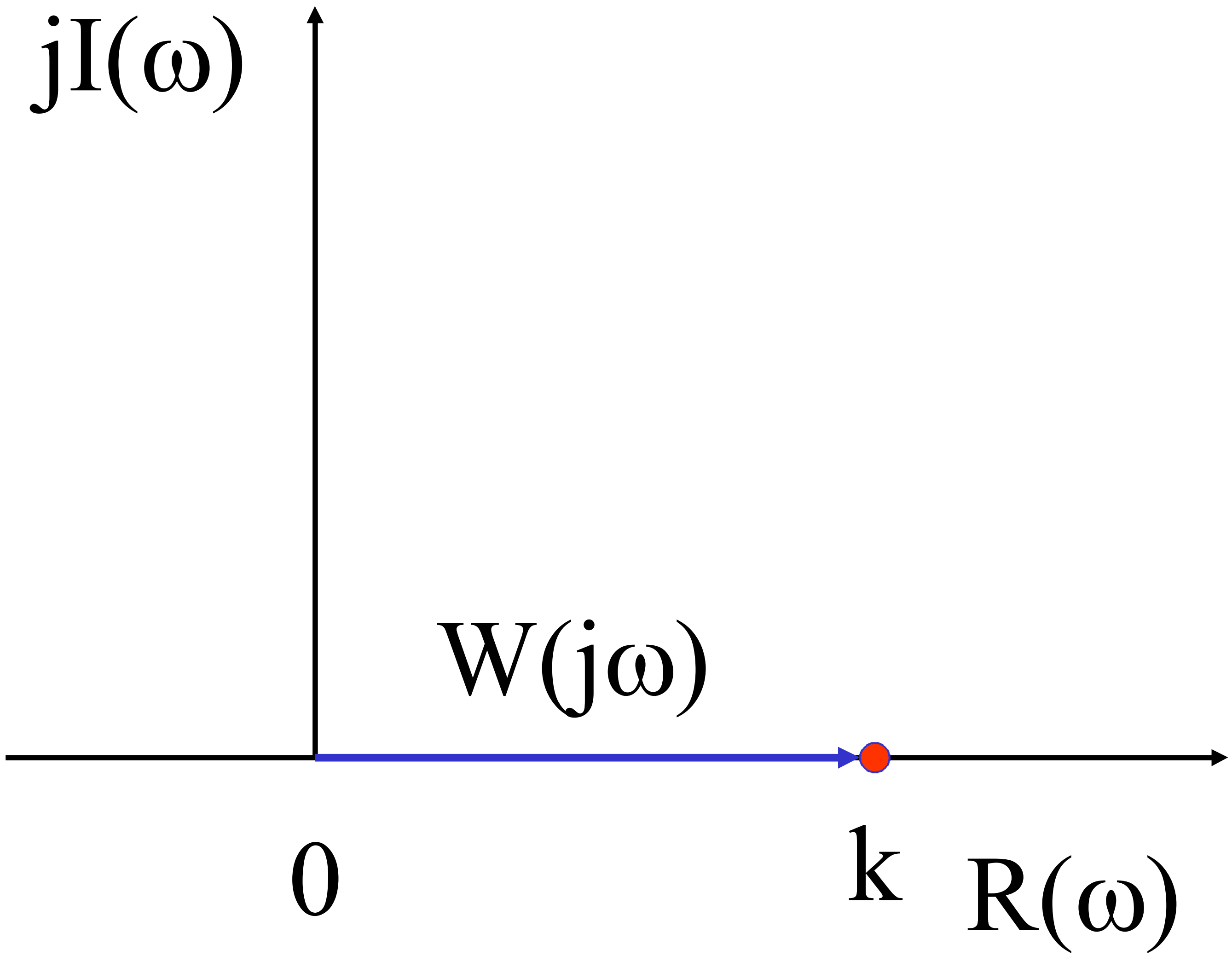
Для составления уравнения такого звена достаточно определить только коэффициент усиления *k*. Уравнение динамики этого звена соответствует его статическому уравнению.

На структурных схемах тип звена обозначается передаточной функцией, которая вписывается в условное обозначение звена, например $W(p)=k$




x
1(t)
1
0
t


y
kx
0
t


jI(ω)
W(jω)
0
k
R(ω)

Амплитудно-фазовая характеристика безынерционного звена представляет собой отрезок прямой, расположенный между началом координат и точкой k вещественной оси R(ω). Таким образом, $W(j\omega)=k$

Примерами безынерционных звеньев могут служить рычажная передача, механические шестеренчатые передачи без трения и зазоров, потенциометрические датчики, безынерционные термопары, усилители постоянного тока.

Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное, одноемкостное, статическое) описывается дифференциальным уравнением в операторной форме

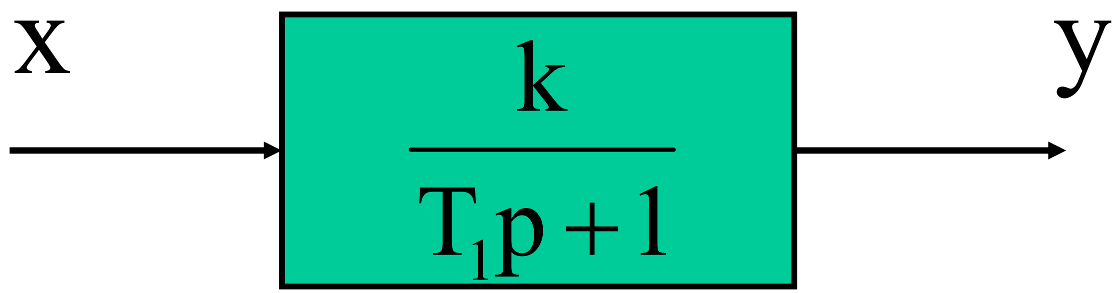
$$(T_1 p+1)y=kx$$

где T_1 — постоянная времени звена, *с.*;

k—коэффициент усиления звена.

Передаточная функция этого звена определяется выражением

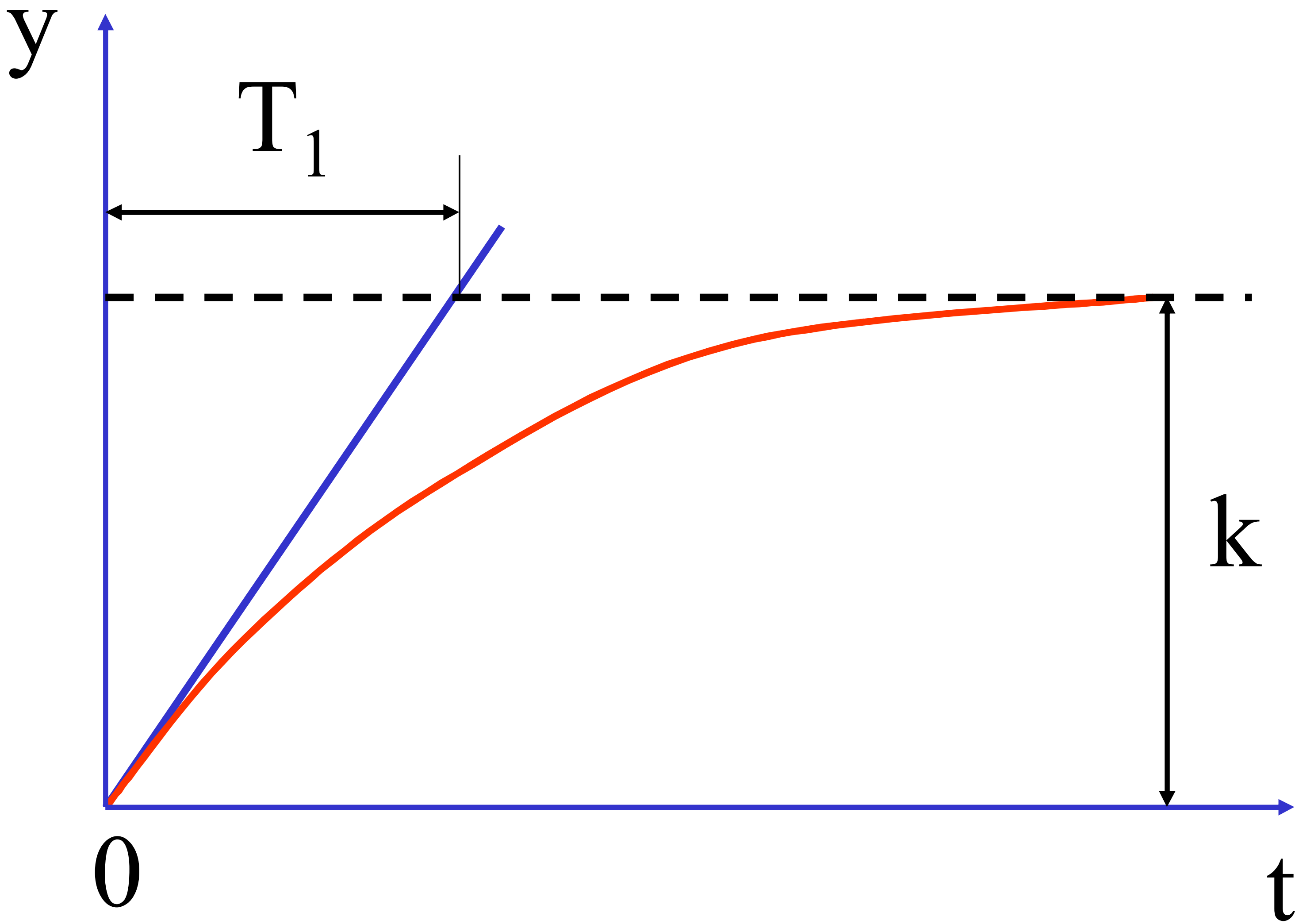
$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}$$



Апериодическое звено можно рассматривать состоящим из двух элементов: одно аккумулирует вещество или энергию, другое препятствует аккумуляции

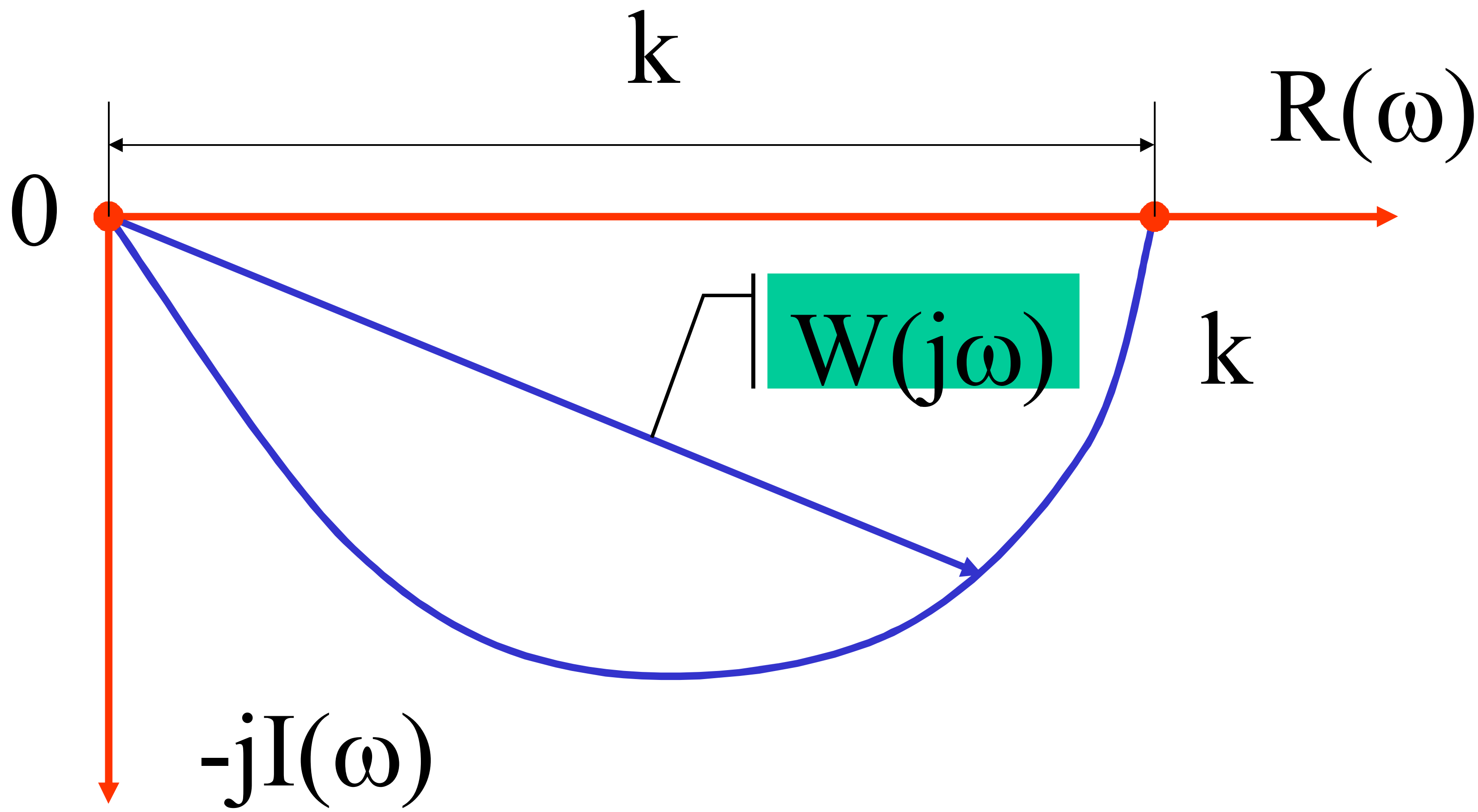
При входном воздействии типа единичной функции $x=1(t)$ закон изменения выходной величины описывается экспоненциальной кривой

$$y = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$


y
T1
k
0
t

Амплитудно-фазовая характеристика описывается уравнением

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} e^{-j\,arctg T_1 \omega}$$



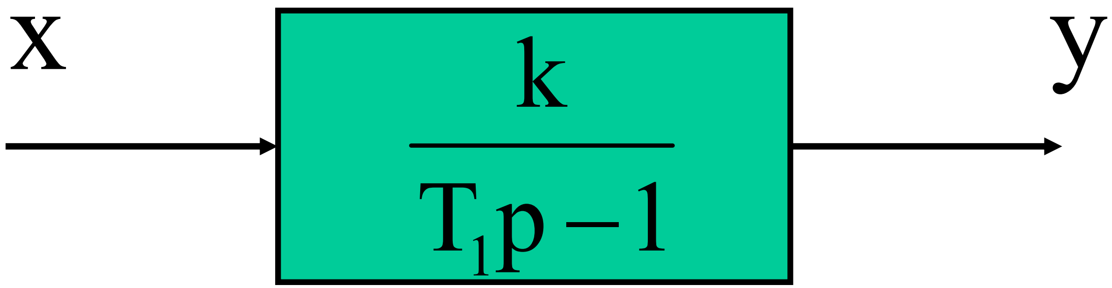
k
R(ω)
0
W(jω)
k
-jI(ω)

Рассмотренные, характеристики и уравнения относятся к *устойчивому* апериодическому звену.

Для *неустойчивого* апериодического звена 1-го порядка уравнение динамики в операторной форме будет:

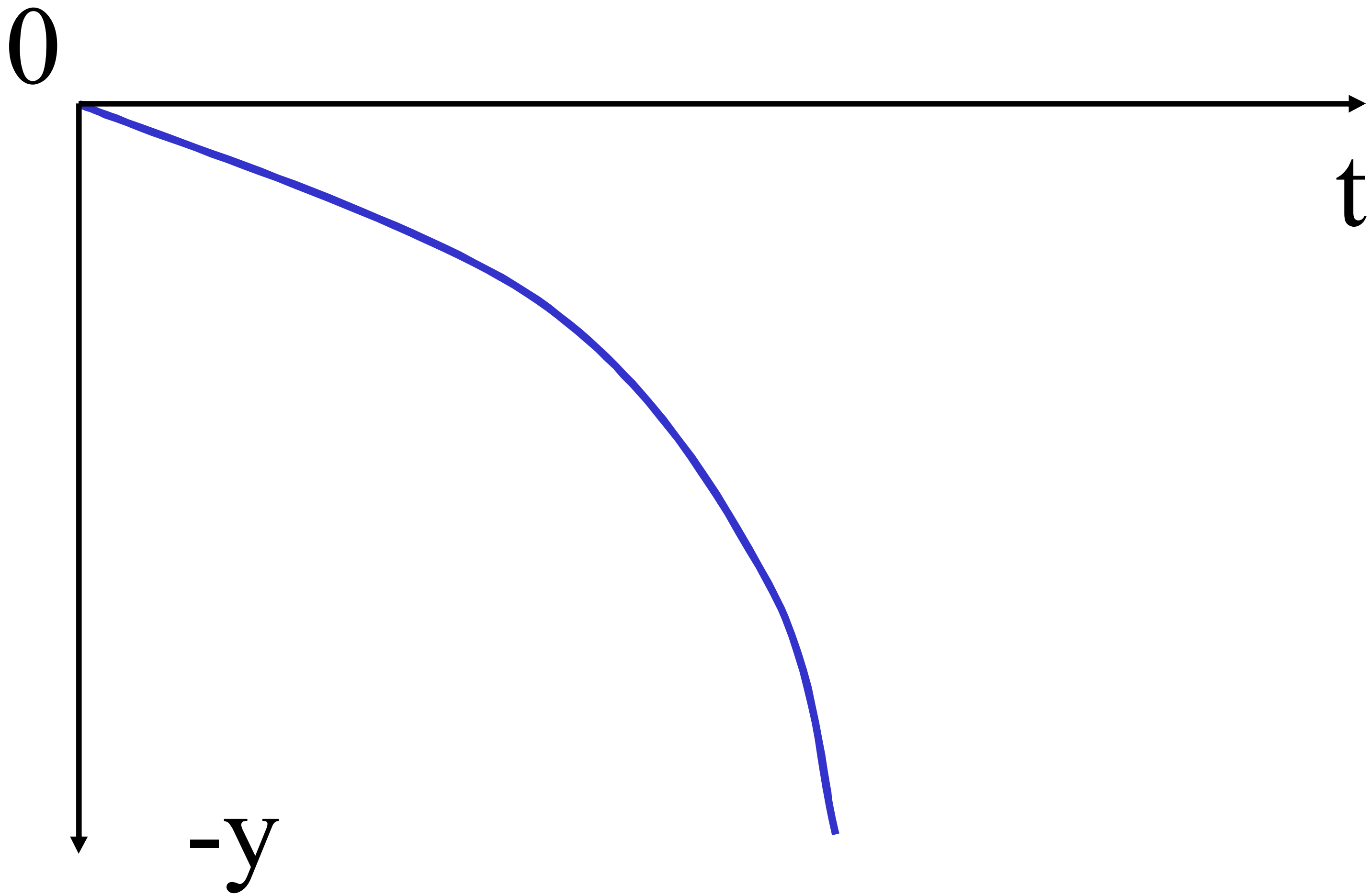
$$(T_1 p - 1)y = kx.$$

Передаточная функция, амплитудно-фазовая и временная характеристики определяются выражениями



$$W(p) = \frac{k}{T_1 p - 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} e^{j arctg T_1 \omega}$$


0
t
-y

$$y = k\left(1 - e^{\frac{t}{T_1}}\right)$$

В качестве примеров апериодического звена 1-го порядка можно привести инерционную термопару; водонапорный бак с подводом воды ниже уровня ее в баке; генератор с независимым возбуждением; регулятор прямого действия для регулирования скорости первичных двигателей путем изменения впуска энергоносителя; большинство механических и электрических усилителей.

Апериодическое звено 2-го порядка (колебательное) описывается дифференциальным уравнением в операторной форме

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y = kx$$

$$\mathrm{W}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{T}_2^2 \mathrm{p}^2 + \mathrm{T}_1 \mathrm{p} + 1}$$

где T_1 и T_2 — постоянные времени, характеризующие период и время затухания собственных колебаний звена;

k—коэффициент усиления звена.

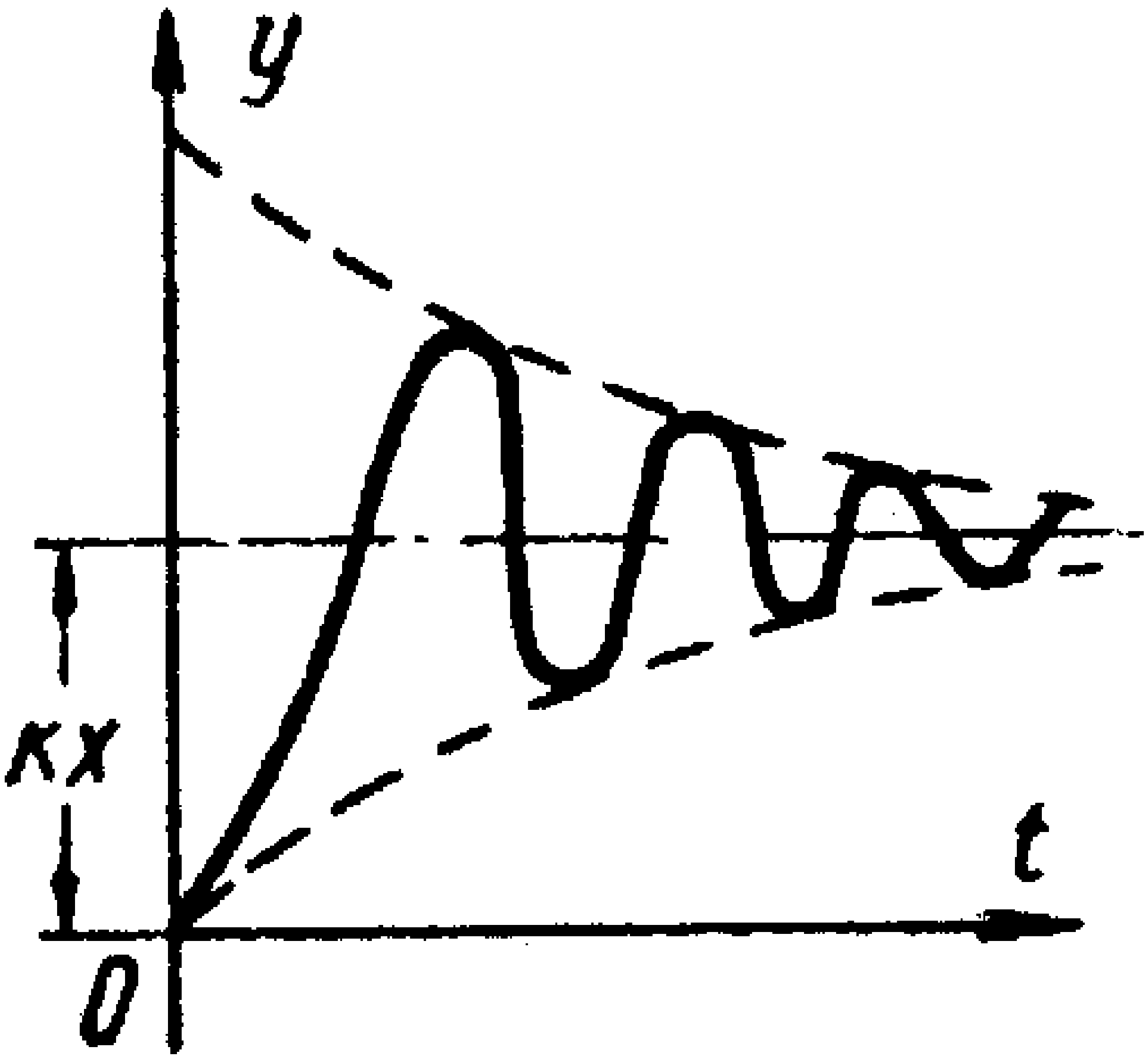
Колебательное звено характеризуется тем, что при изменении входной величины *x* возникает колебательный процесс изменения выходной величины *y*.

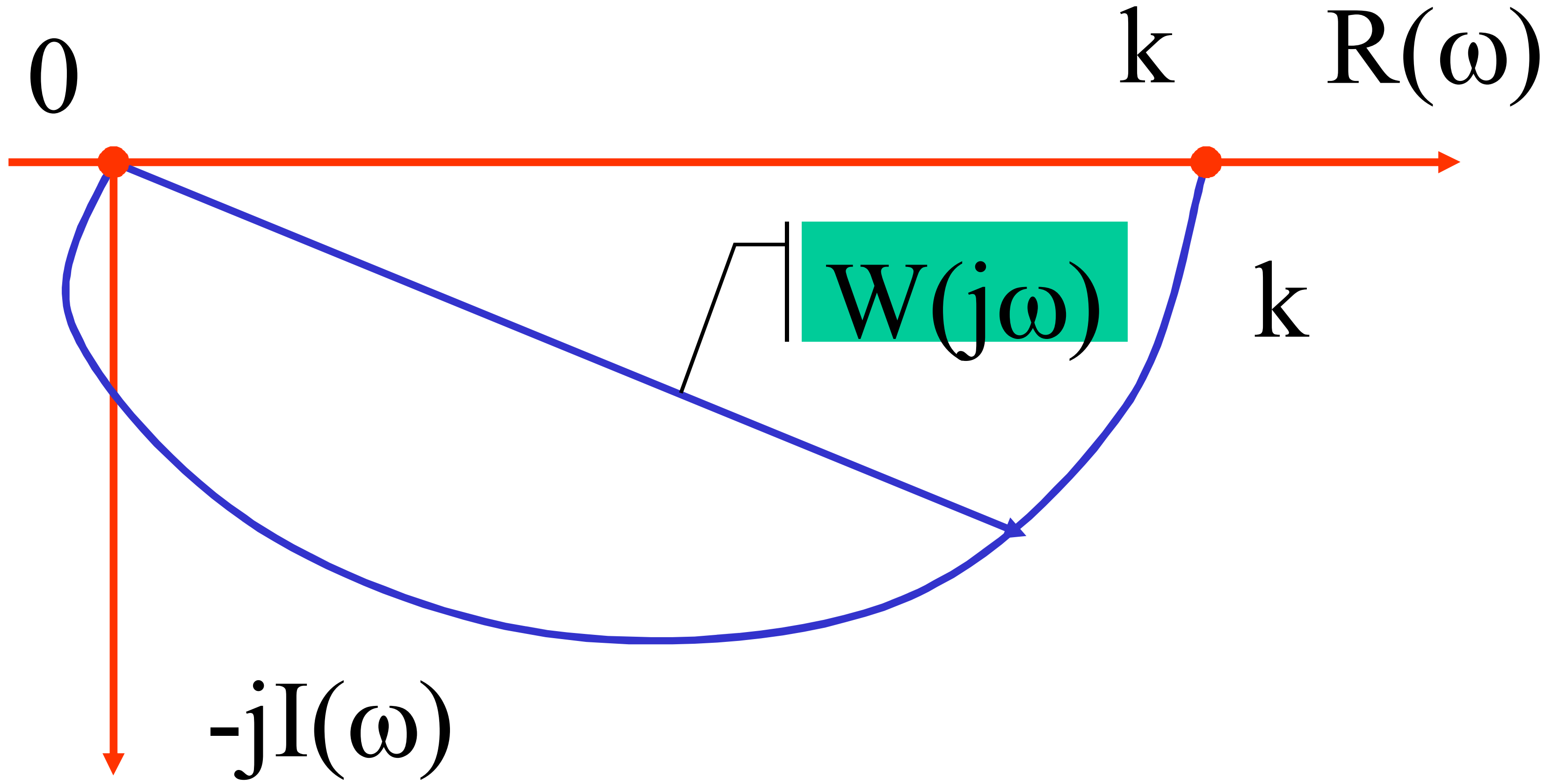
Передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика колебательного звена при $T_1 \leq 2T_2$ определяются выражениями

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left(1-\omega^2 T_2^2\right)^2 + \omega^2 T_1^2}} e^{-j\,arctg\frac{\omega T_1}{1-\omega^2 T_2^2}}$$

Временная и амплитудно-фазовая характеристики при входном воздействии типа единичного толчка показаны на рисунке.


y
KX
t
0

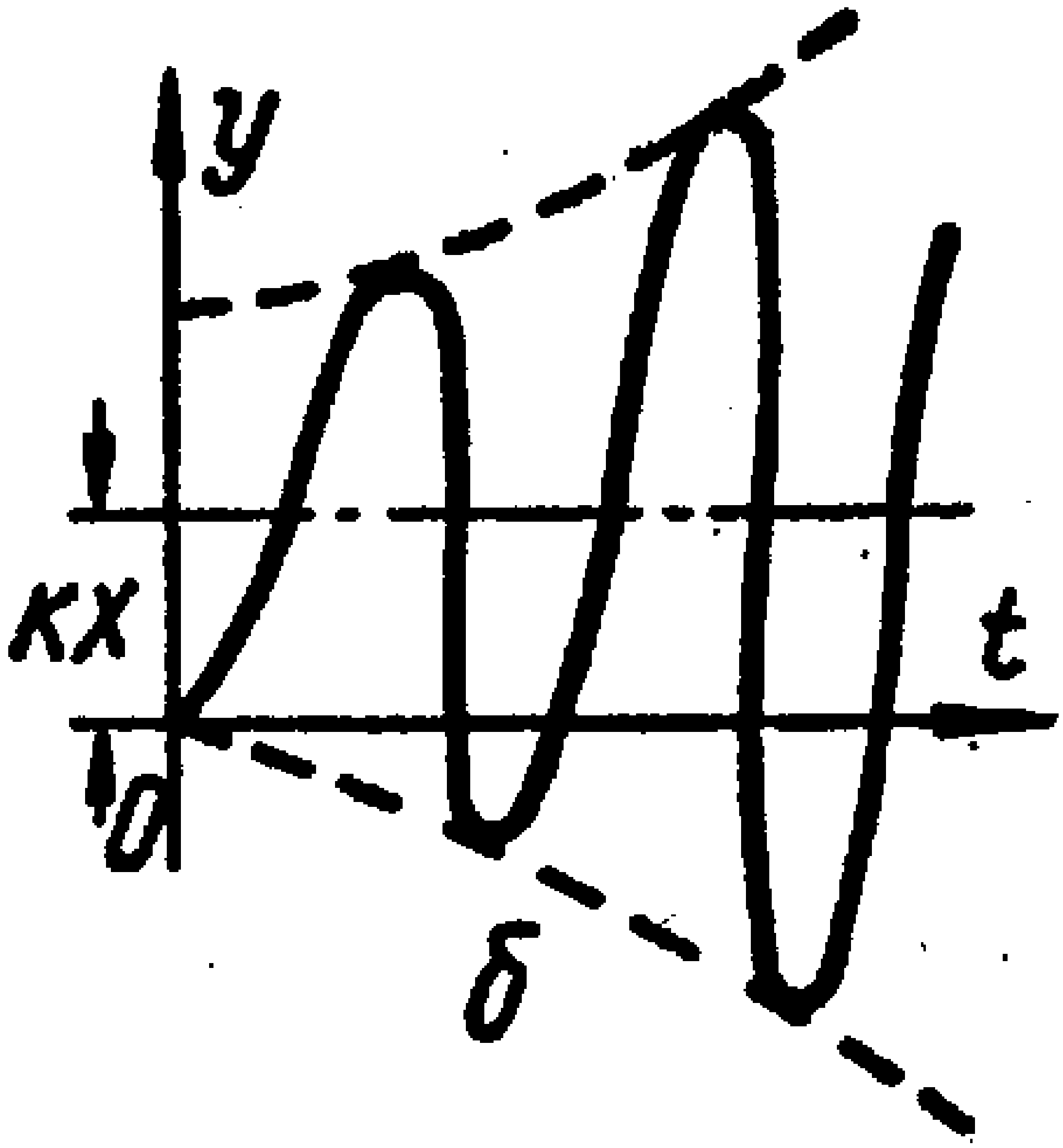

0
k
R(ω)
W(jω)
k
-jI(ω)

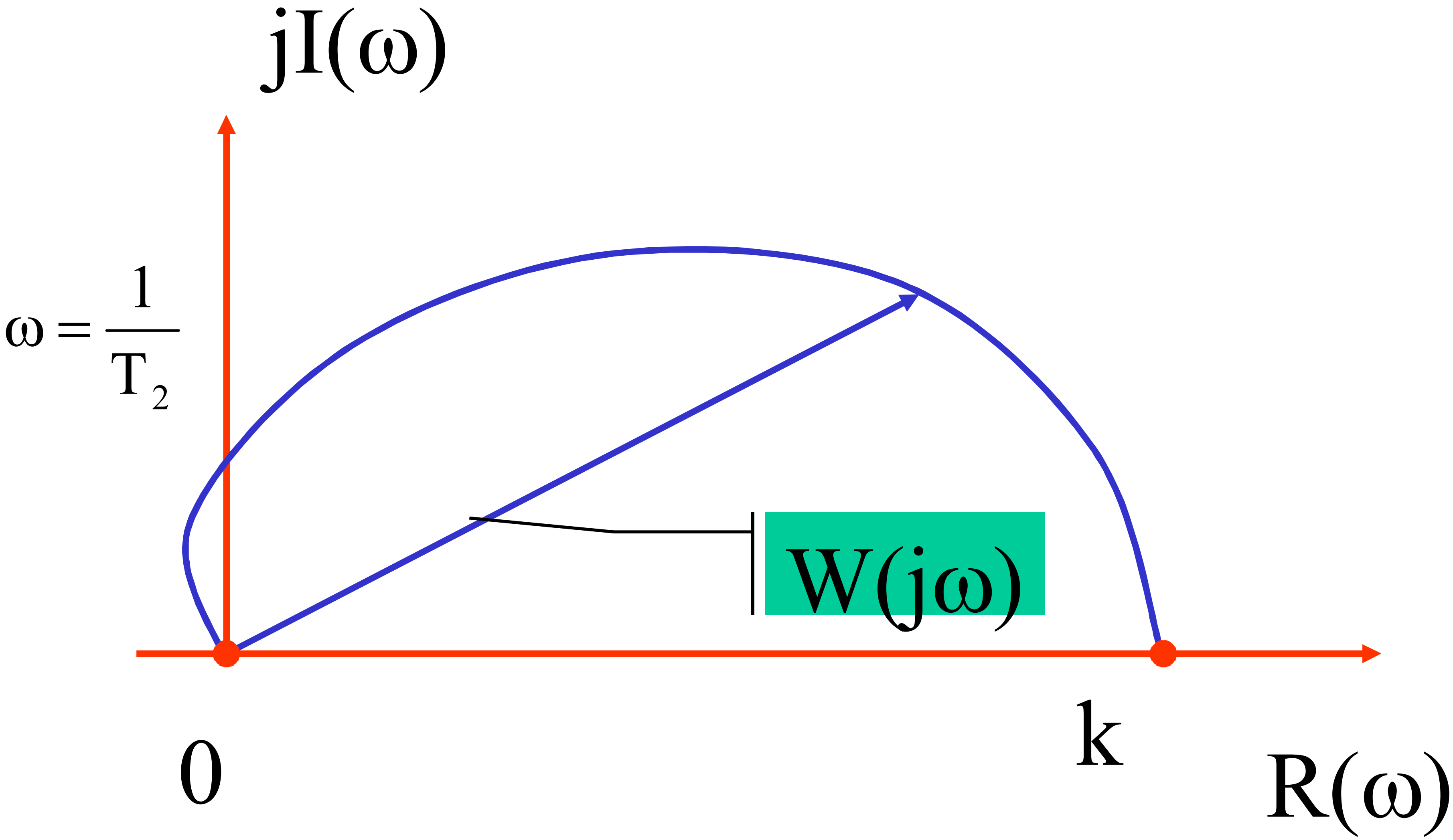
При возмущениях, нарушающих равновесие звена, возникают колебания. Если в результате колебаний происходит потеря энергии в звене, то колебания затухают, а само звено называют *устойчивым*. Если при колебаниях запас энергии в звене увеличивается, то амплитуда колебаний возрастает, а само звено называют неустойчивым.

Уравнение динамики неустойчивого колебательного звена

$$(T_2^2 p^2 - T_1 p + 1) y = kx$$

Временная и амплитудно-фазовые характеристики неустойчивого звена при возмущении вида единичной функции показаны на рисунке


y
kx
t
0
б


jI(ω)
$\omega = \frac{1}{T_2}$
W(jω)
0
k
R(ω)

Если при колебаниях отсутствуют потери энергии в звене, то такое звено называют гармоническим колебательным (консервативным) звеном.

Уравнение динамики консервативного звена при $T_1 = 0$:

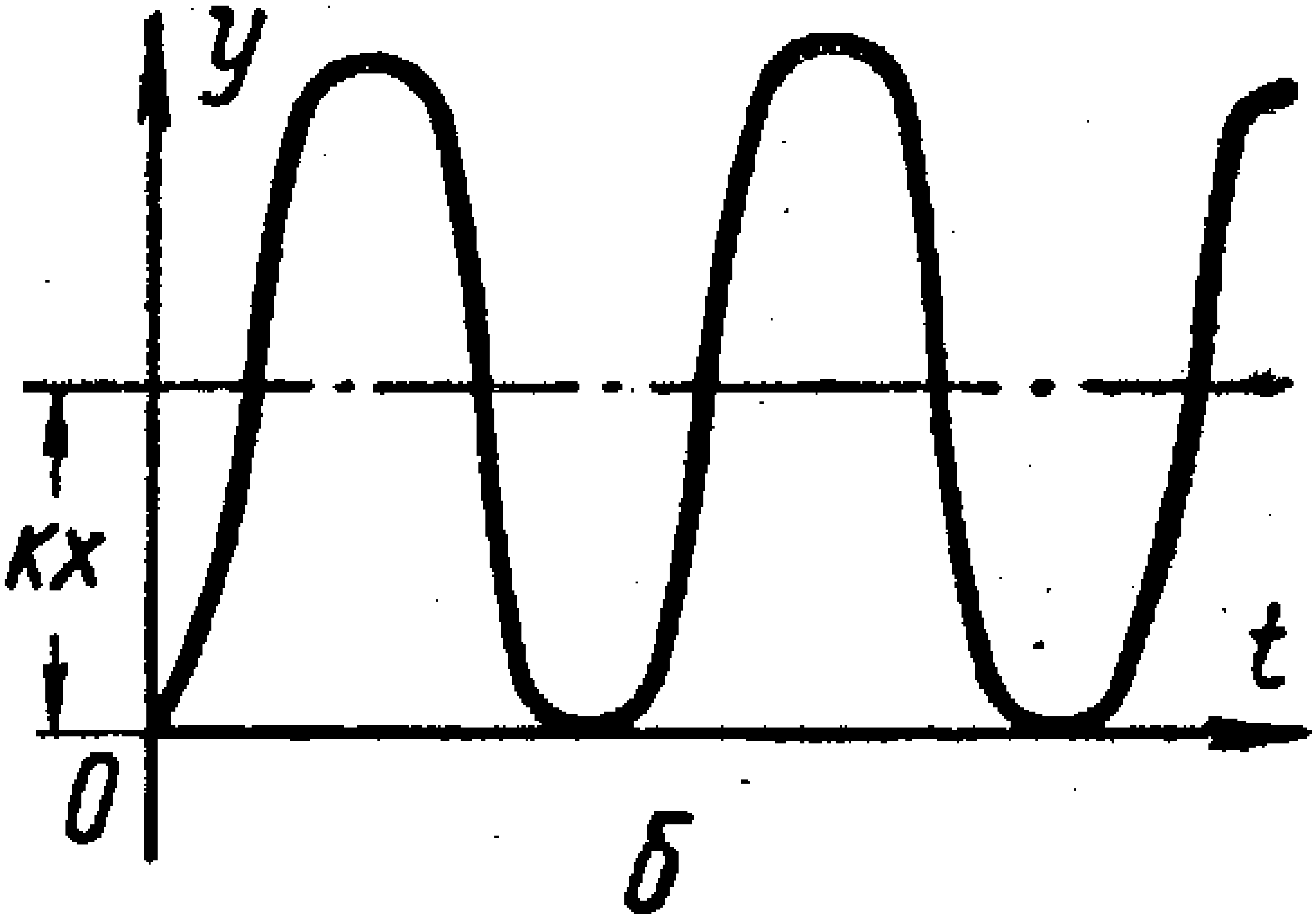
$$(T_2^2 p^2 + 1)y = kx$$

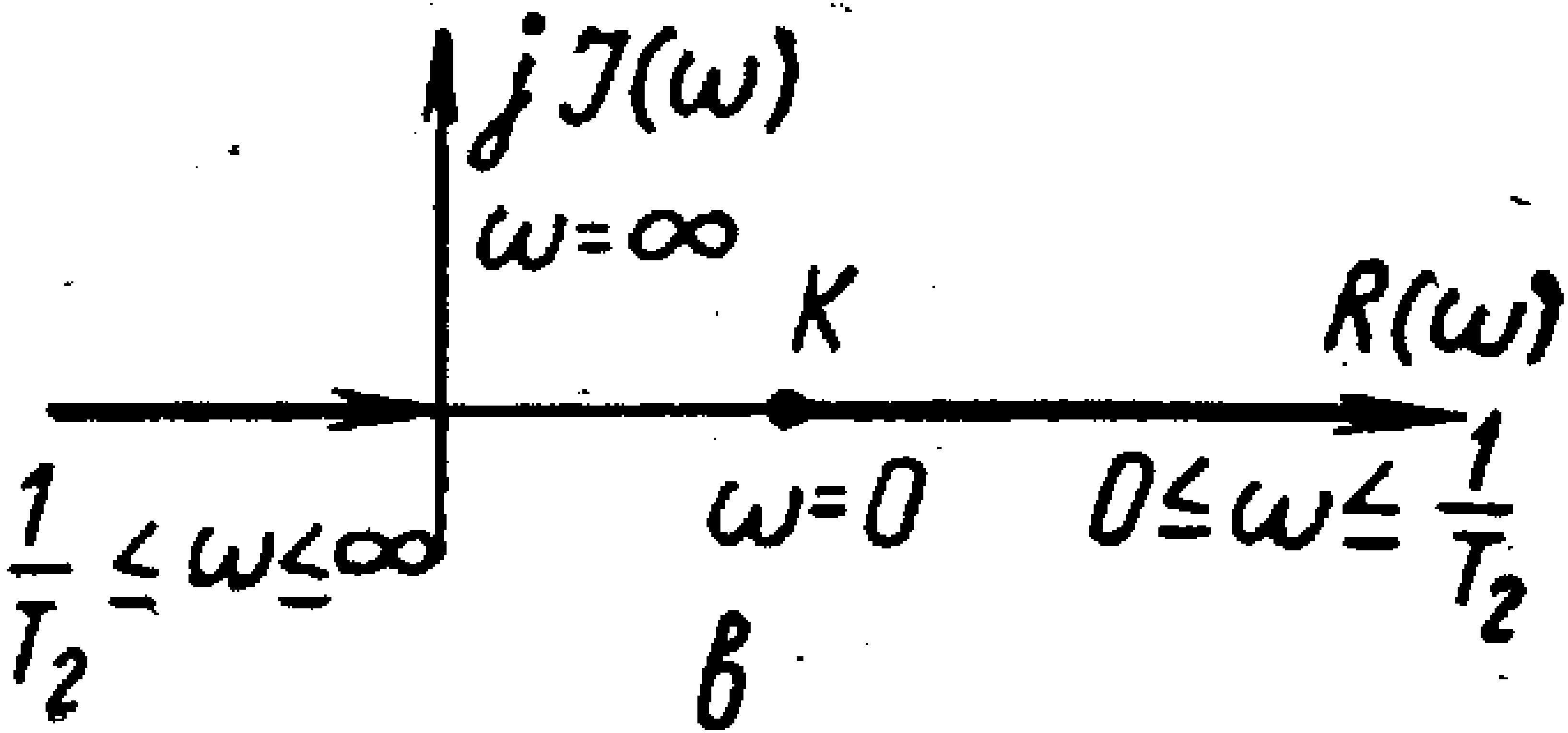
Передаточная функция, амплитудно-фазовая и временная характеристики для консервативного звена соответственно равны:

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1};$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T_2^2 \omega^2};$$

$$y = k\left(k - \cos\frac{1}{T_2}\right).$$


y
kx
t
0
б



jJ(ω)
ω=∞
K
R(ω)
ω=0
0≤ω≤ 1/T2
1/T2 ≤ω≤∞
в

Амплитудно-фазовая характеристика при изменении ω от 0 до ∞ начинается на положительной вещественной оси на расстоянии k от начала координат и уходит в бесконечность, а возвращается от —∞ по оси отрицательных вещественных чисел.

Апериодическое звено 2-го порядка имеет уравнение динамики

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y = kx$$

но при условии, что $T_1 \geq 2T_2$.

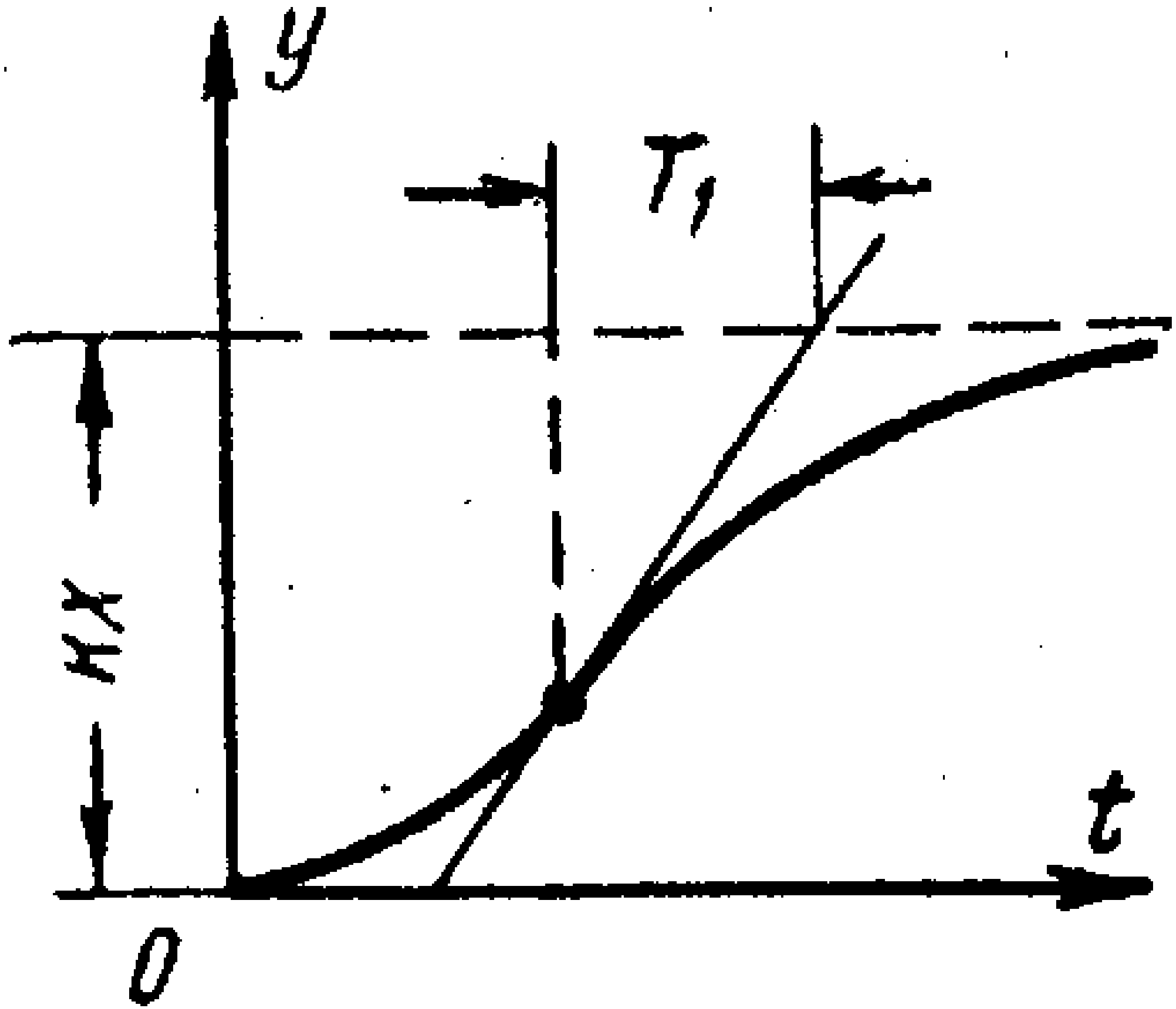
Физический смысл этого неравенства заключается в том, что потери энергии в звене очень велики и колебания в нем не возникают.

Временная и амплитудно-фазовая характеристики такого звена при входном воздействии типа единичной функции показаны на рисунке

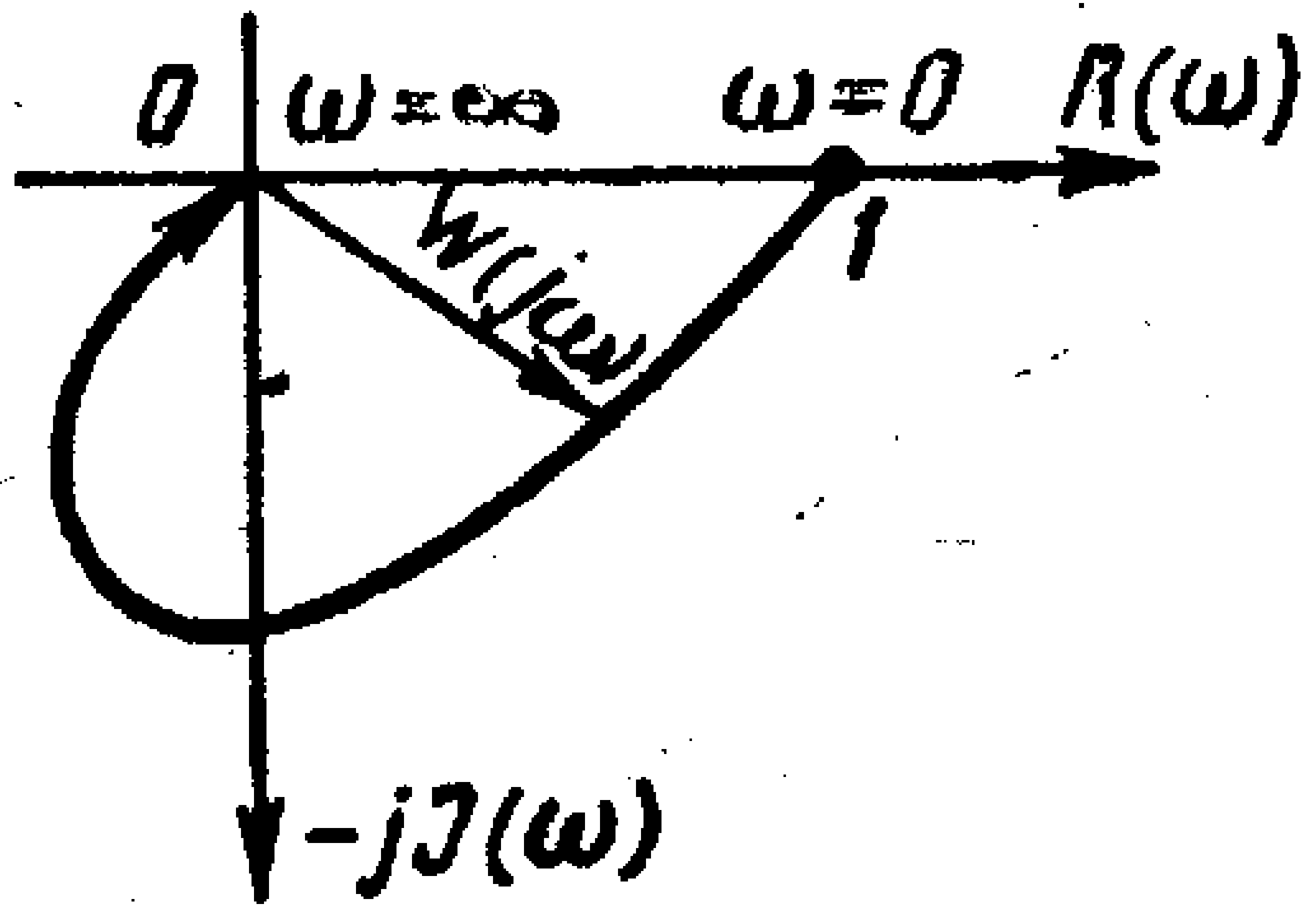
Уравнения передаточной функции и амплитудно-фазовой характеристики апериодического звена 2-го порядка записываются выражениями как и для колебательного звена.

$$W(p)=\frac{k}{T_2^2 p^2+T_1 p+1};$$

$$W(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{\left(1-\omega^2T_2^2\right)^2+\omega^2T_1^2}}e^{-jarctg\frac{\omega T_1}{1-\omega^2T_2^2}}$$



a



б

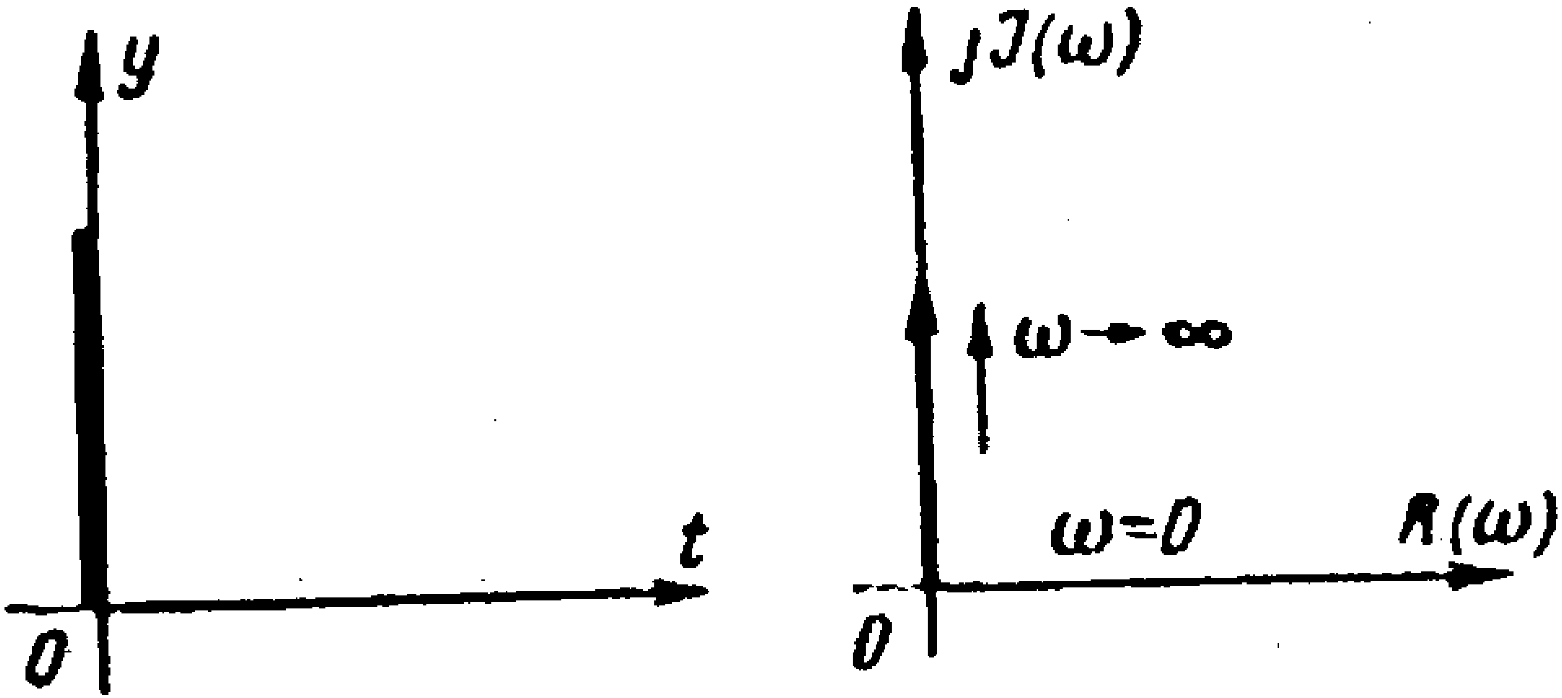
Дифференцирующим называют такое звено, у которого выходная величина y связана не только с абсолютным значением входной величины x, но и с ее первой или второй производной.

Дифференцирующие звенья могут быть нескольких типов, отличающихся между собой уравнениями и характеристиками. *Идеальное* звено имеет следующие уравнения динамики, передаточной функции и амплитудно-фазовой характеристики:

$$T_1 y = px$$

$$W(p) = \frac{p}{T_1}$$

$$W(j\omega) = \frac{\omega}{T_1} e^{j\frac{\pi}{2}}$$



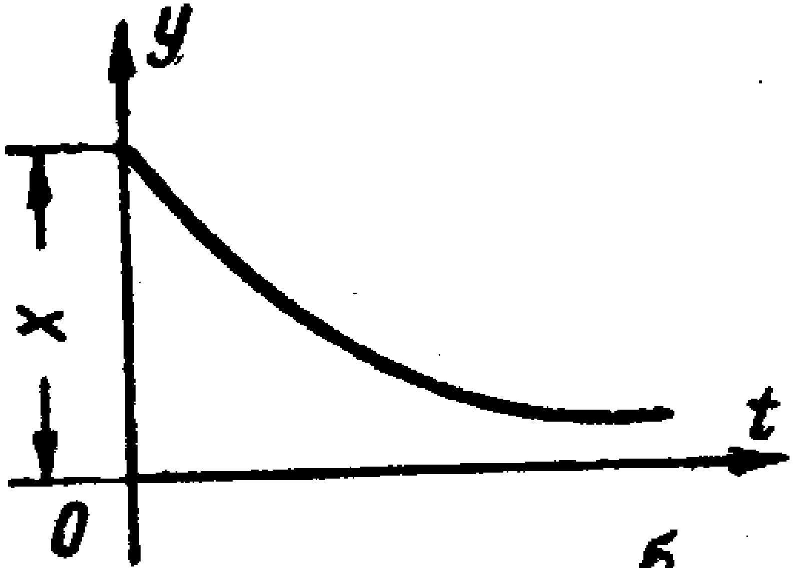
a

Гибкое без статизма (изодромное):

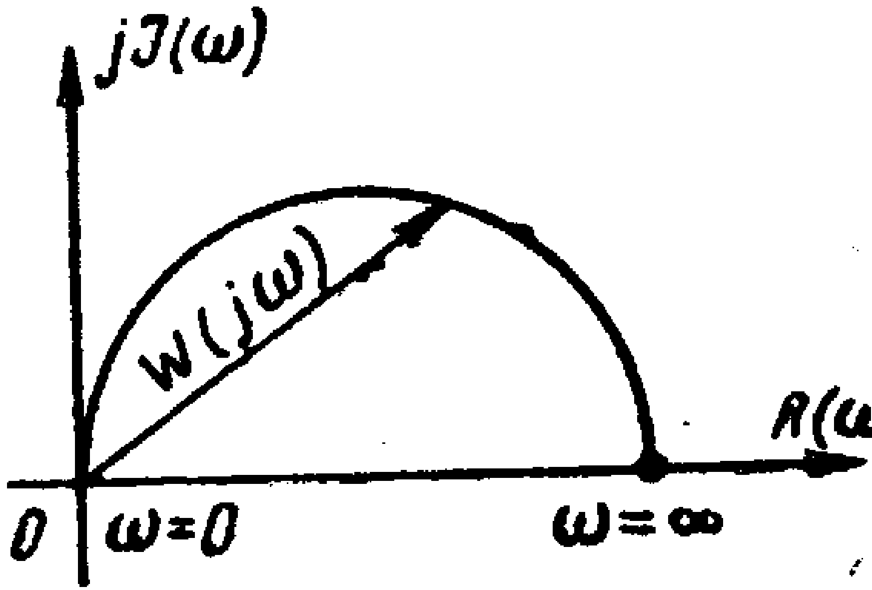
$$(T_1 p + 1)y == T_1^{'} p x$$

$$W(p) = \frac{T_1^{'} p}{T_1 p + 1};$$

$$W(j\omega) = \frac{T_1^{'} \omega}{1 + T_1^2 \omega^2} e^{jarcctg T_1 \omega}$$



б

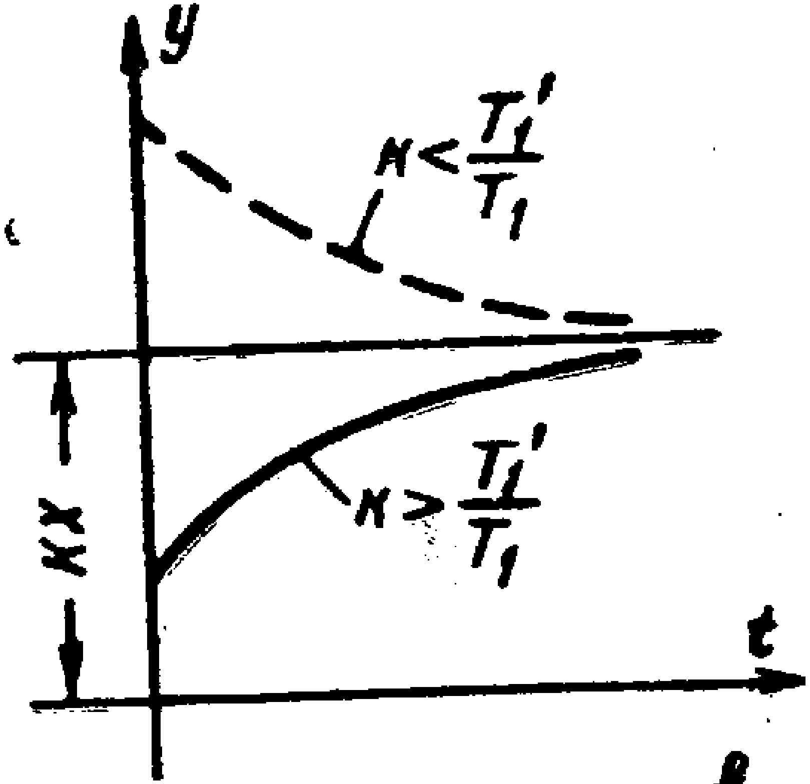


Гибкое со статизмом:

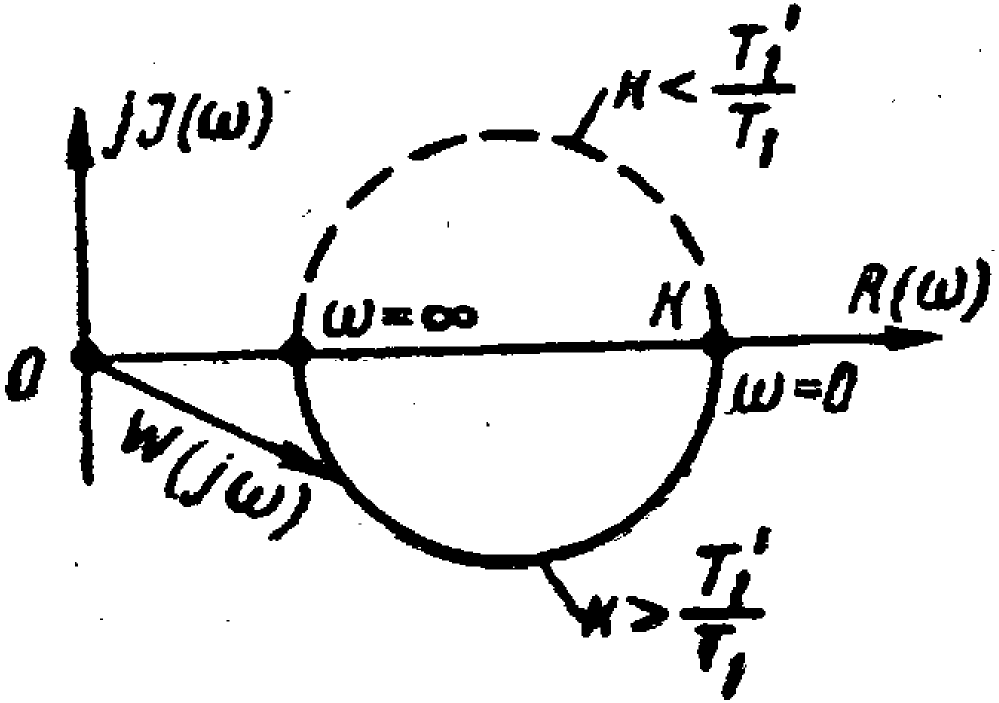
$$(T_1 p + 1) y = (T_1^{'} p + k) x$$

$$\mathrm{W(p)} == \frac{T_1^{'} + k}{T_1^{'} + 1};$$

$$W(j\omega) = \sqrt{\frac{k^2 + T_1^{'2} \omega^2}{1 + T_1^2 \omega^2}} e^{jarctg\left(\omega \frac{T_1^{'} - kT_1}{k + T_1 T_1^{'} \omega^2}\right)}$$



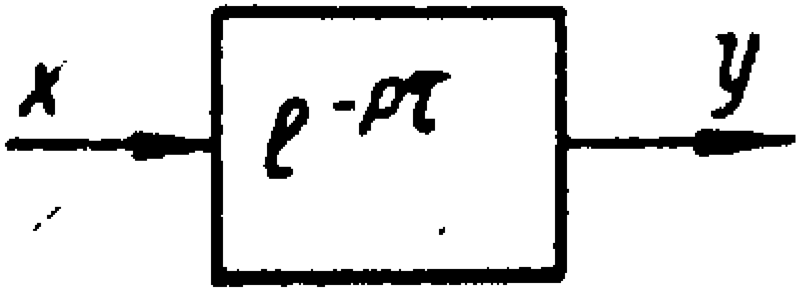
в



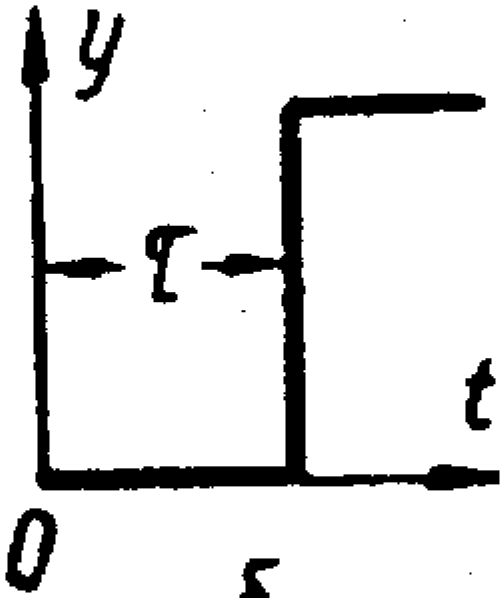
Передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика звена с запаздыванием записывается

$$W(p)=e^{-p\tau}$$

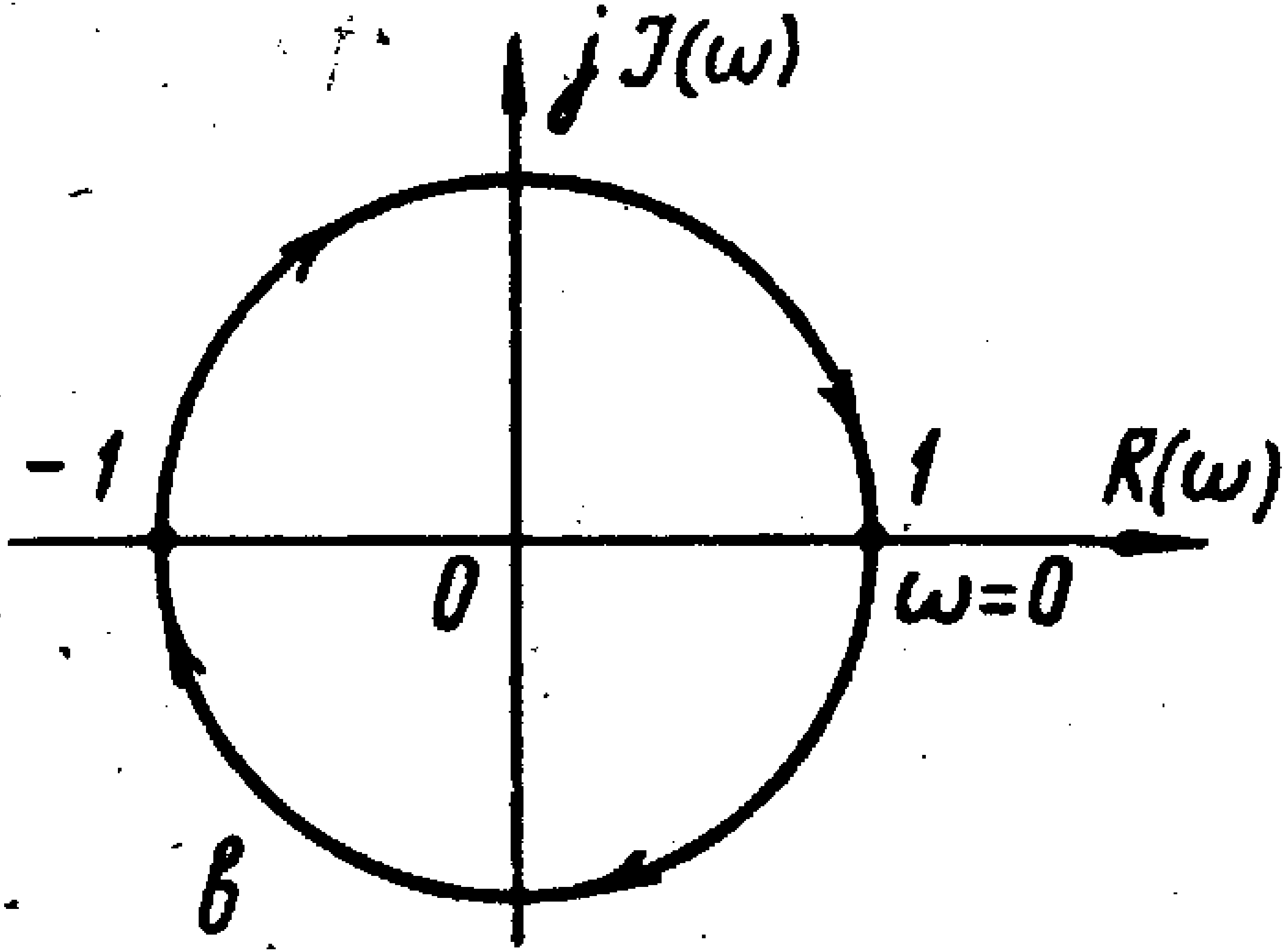
$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$



а



б



$jJ(\omega)$
-1
1
$R(\omega)$
0
$\omega=0$
в

Интегрирующее звено (астатическое звено 1-го порядка) описывается дифференциальным уравнением в операторной форме

$$T_1 p y = x.$$

Для интегрирующего звена характерно то, что одному и тому же значению входной величины *x* могут в различное время соответствовать несколько значений выходной величины:

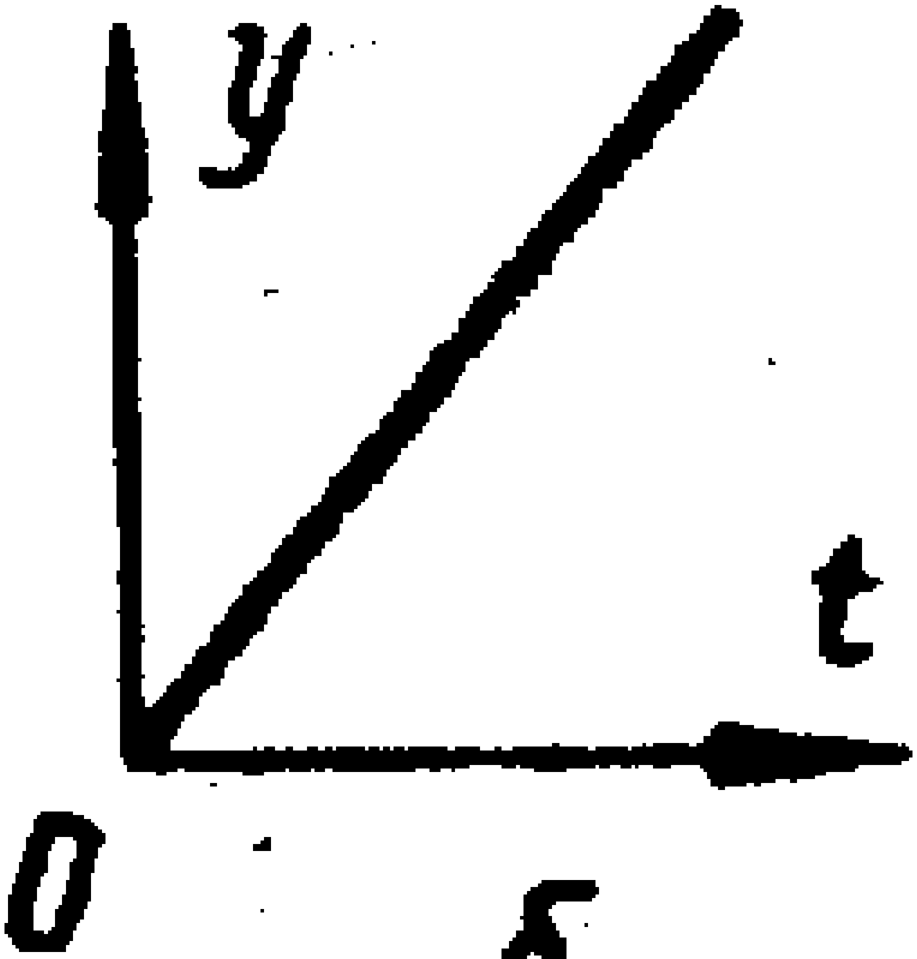
$$y = \frac{x}{T_1 p} = \frac{1}{T_1}\int_0^t x\,dt$$

Как видно из последнего уравнения, выходная величина y пропорциональна интегралу от входной величины x. Именно поэтому такое звено называют интегрирующим.

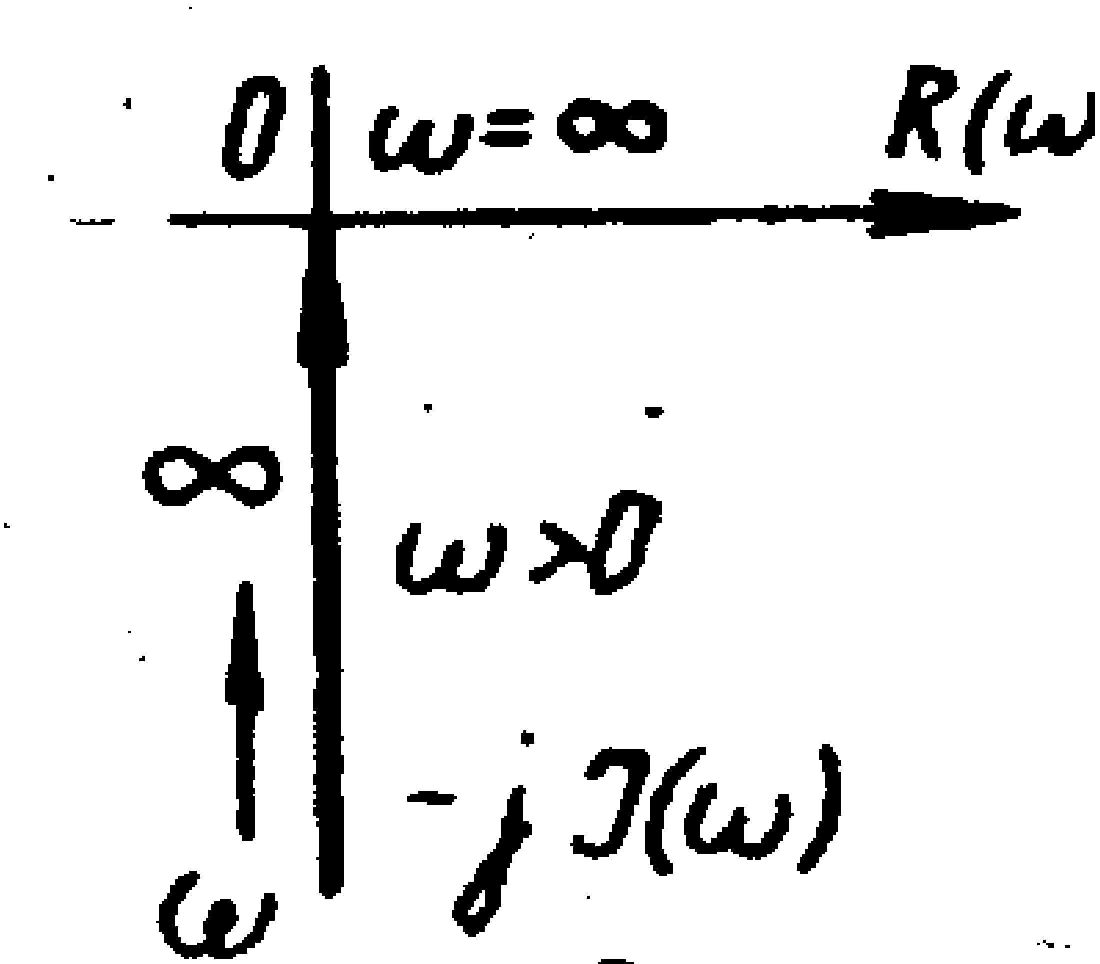
Передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика определяются выражениями

$$W(p) = \frac{1}{T_1 p};$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{T_1 \omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



б



в

СОСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ И ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ САР

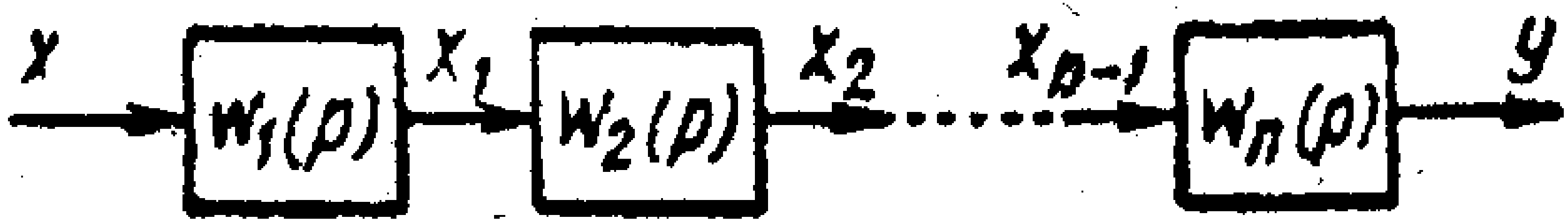
Структурная схема САР состоит из отдельных элементарных звеньев и отражает характер связей между ними. Звенья располагают в порядке их взаимодействия друг с другом. Наибольшее распространение имеют три вида соединения звеньев: последовательное, параллельное и замкнутое с обратной связью.

1. Последовательное соединение звеньев.

Передаточные функции для отдельных звеньев

Для всей схемы передаточная функция определяется путем умножения передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_1(p) = \frac{x_1}{x}; \quad W_2(p) = \frac{x_2}{x}; \quad ...; \quad W_n(p) = \frac{y}{x_{n-1}}.$$



а

$$W(p) = \frac{y}{x} = W_1(p)W_2(p)...W_n(p);$$

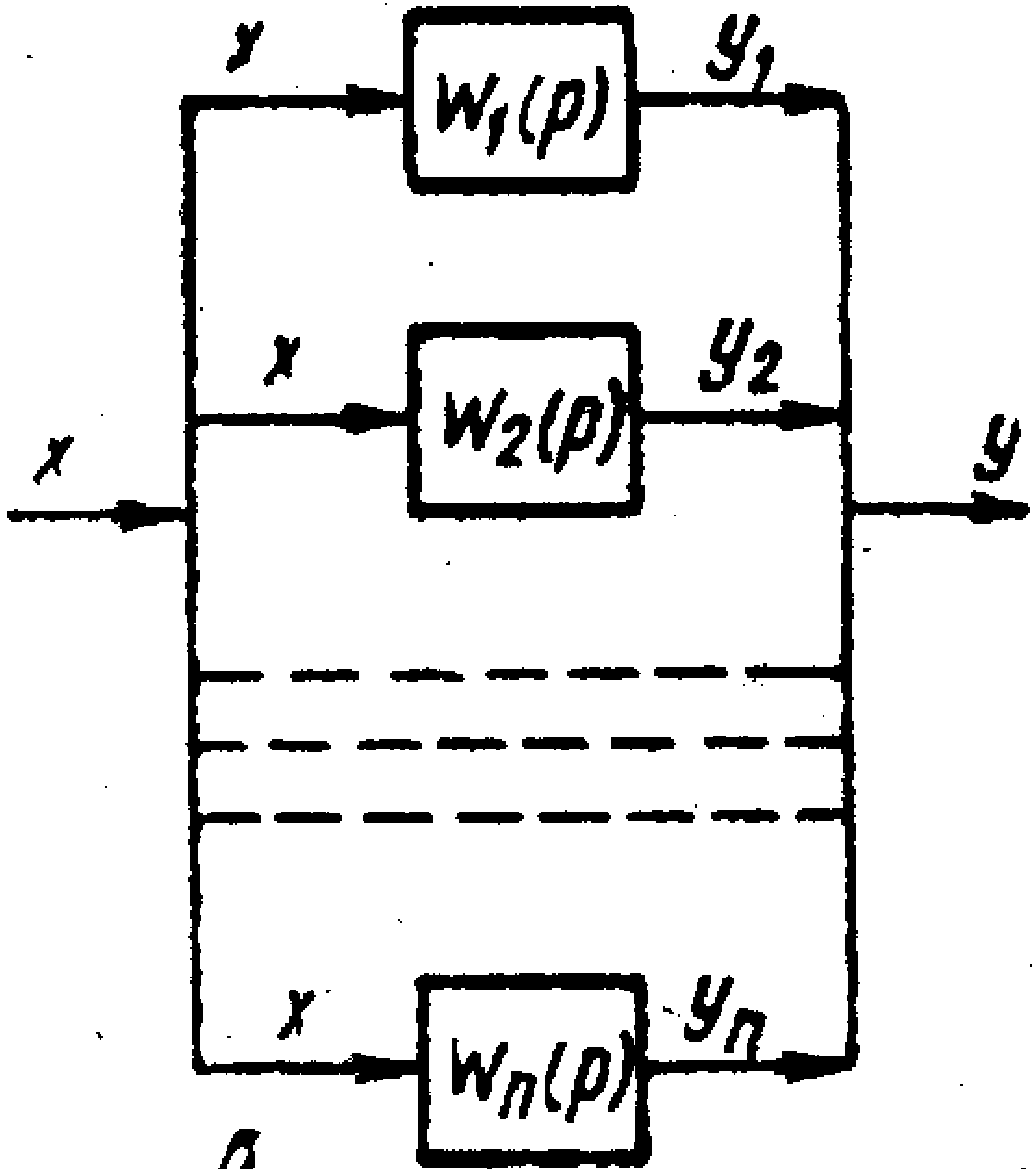
$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

Таким образом, передаточная функция всей схемы при последовательном соединении звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

2. Параллельное соединение звеньев.

При таком соединении звеньев

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$



б

Для каждого отдельного звена передаточная функция известна, поэтому легко определить выходные величины

$$y_1 = W_1(p)x; \; y_2 = W_2(p)x; \; \dots; \; y_n = W_n(p)x.$$

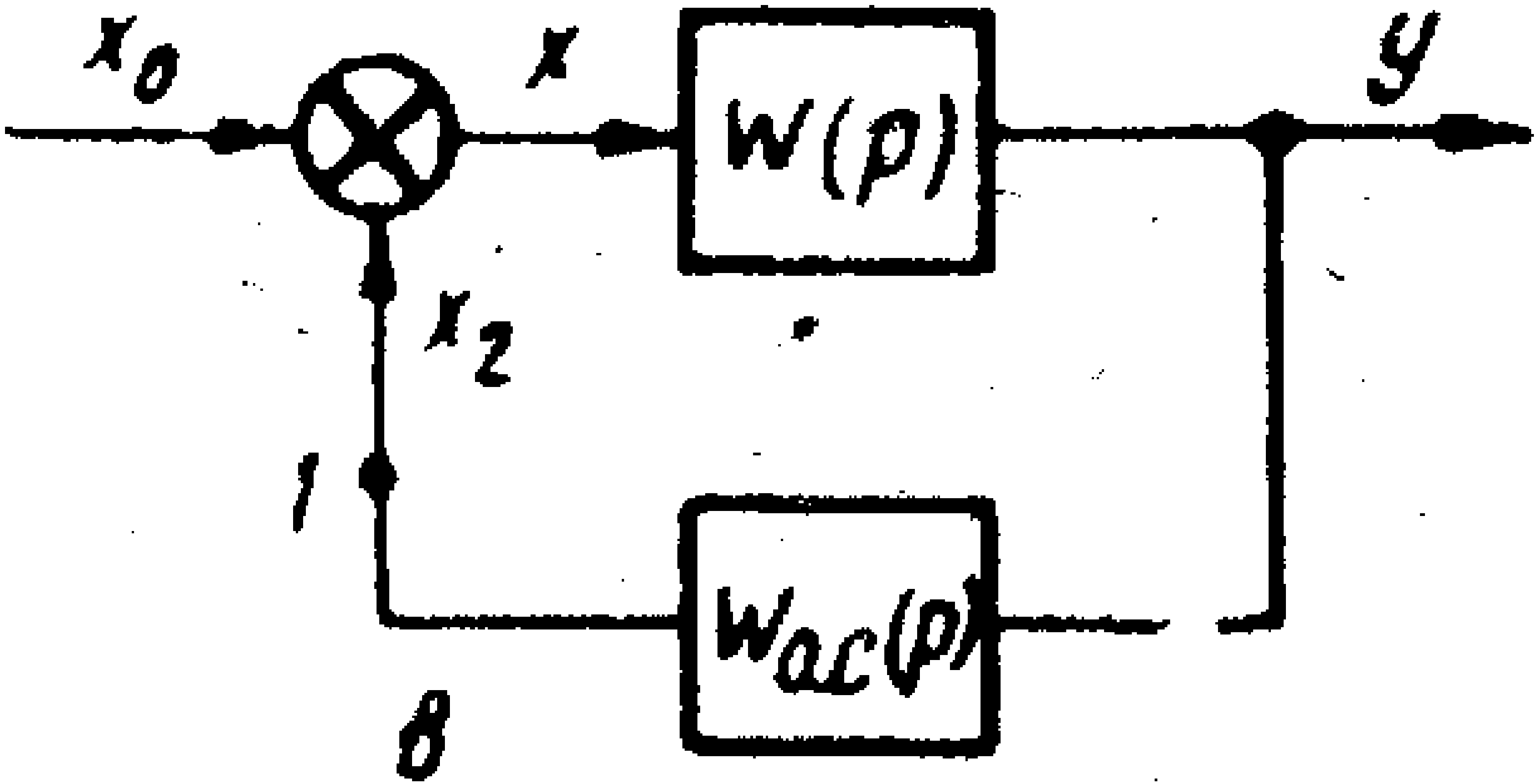
Просуммировав все функции, получим

$$W(p) = \frac{y}{x} = W_1(p) + W_2(p) + \ldots + W_n(p);$$

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p).$$

Передаточная функция $W(p)$ всей схемы при параллельном соединении звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

3. Замкнутое звено с обратной связью. Передаточную функцию всей схемы определим решением алгебраической системы уравнений



x_0
x
$W(p)$
y
x_2
1
$W_{oc}(p)$
8

$$\left.\begin{aligned} y &= W(p)x \\ x_2 &= W_{o.c}(p)y \\ x &= x_0 - x_2 \end{aligned}\right\}$$

где $W(p)$ и $Wo.c(p)$ — соответственно передаточные функции цепей прямой и обратной связи.

Из системы уравнений находим передаточную функцию звена с отрицательной обратной связью

$$W(p) = \frac{y}{x_0} = \frac{W(p)}{1 + W_{o.c}(p)W(p)}$$

Для звена с положительной обратной связью

$$W(p) = \frac{y}{x_0} = \frac{W(p)}{1 - W_{o.c}(p)W(p)}$$

Произведение $Wo.c(p)W(p)$ представляет собой передаточную функцию двух последовательно соединенных звеньев, то есть является передаточной функцией системы, разомкнутой в точке 1.

Таким образом, передаточная функция звена с обратной связью равна отношению передаточной функции прямой цепи к передаточной функции всей системы в разомкнутом состоянии, увеличенной на единицу при отрицательной и уменьшенной на единицу при положительной обратных связях.

Для исследования динамических качеств САР необходимо найти уравнение движения для каждого звена, а затем с помощью соответствующих математических преобразований с учетом структурной схемы соединения звеньев составить общее уравнение движения системы регулирования.

Уравнение движения системы регулирования составляют обычно по отношению к управляемой величине. Форма записи для системы регулирования та же, что и для отдельного звена. Запись уравнений рекомендуется начинать с управляемой величины, а затем, следуя в направлении, противоположном направлению прохождения сигналов, записываются уравнения всех звеньев системы и уравнение рассогласования.

Система уравнений решается относительно управляемой величины путем последовательного исключения всех промежуточных переменных. В результате решения полученного уравнения определяется кривая переходного процесса регулирования (временная характеристика системы), то есть характер изменения управляемой величины во времени при наличии различных возмущений.

Уравнение динамики любой линейной системы регулирования может быть сведено к дифференциальному уравнению вида,

$$a\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=$$

$$=b_0\frac{d^m x}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx}{dt}+b_m x,$$

или в операторной форме

$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_{n-1}p + a_n)y =$

$= (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_{m-1}p + b_m)x$

где x и y — входная и выходная величины системы регулирования; $a_0; \ldots; a_n; b_0; \ldots; b_m$ — коэффициенты, определяемые по постоянным времени и коэффициентам усиления отдельных звеньев структурной схемы САР.

Уравнение часто изображают в стандартной форме записи линеаризованных уравнений. Для этого обе части уравнения делятся на произведение $a_n b_m$, а получившиеся в результате деления коэффициенты обозначаются

$$\frac{a_0}{a_n} = T_n^n; \quad \frac{a_0}{a_n} = T_{n-1}^{n-1};...;\frac{a_{n-1}}{a_n} = T_1 \ ; \quad \frac{b_0}{b_m} = T_m^m;$$

$$\frac{b_1}{b_m} = T_{m-1}^{m-1};...;\frac{b_{m-1}}{b_m} = T_m^{'} \quad и \quad \frac{b_m}{a_m} = k.$$

Тогда уравнение динамики системы примет следующий вид:

$$(T_n^n p^n + T_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \ldots + T_1 p + 1) y =$$

$$= k(T_m^m p^m + T_{m-1}^{m-1} p^{m-1} + \ldots + T_1^{'} p + 1) x.$$

Величина k называется *коэффициентом усиления* системы

Полином

$$G(p) = T_n^n p^n + T_{n-1}^{n-1} p^{n-1} + \ldots + T_1 p + 1$$

называется *собственным оператором* системы, а полином

$$H(p) = T_m^m p^m + T_{m-1}^{m-1} p^{m-1} + \ldots + T_1^{'} p + 1$$

— *оператором воздействия*.

Величина

$$W(p) = \frac{y}{x} = k\frac{H(p)}{G(p)}$$

называется *передаточной функцией* системы.

THE END