Лекция 9. Исследование положений равновесия механических систем.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Условия равновесия механических систем.
2. Устойчивость равновесия.
3. Пример определения положений равновесия и исследования их устойчивости.

Изучение данных вопросов необходимо для изучения колебательных движений механической системы относительно положения равновесия в дисциплине «Детали машин», для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов».

Важным случаем движения механических систем является их колебательное движение. Колебания - это повторяющиеся движения механической системы относительно некоторого ее положения, происходящие более или менее регулярно во времени. В курсовой работе рассматривается колебательное движение механической системы относительно положения равновесия (относительного или абсолютного).

Механическая система может совершать колебания в течение достаточно длительного промежутка времени только вблизи положения устойчивого равновесия. Поэтому перед тем, как составить уравнения колебательного движения, надо найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

Условия равновесия механических систем.

Согласно принципу возможных перемещений (основному уравнению статики), для того, чтобы механическая система, на которую наложены идеальные, стационарные, удерживающие и голономные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе были равны нулю все обобщенные силы:

$$Q_j = 0, \quad j = 1,2,\dots,s, \qquad (1)$$

где Q_j - обобщенная сила, соответствующая j - ой обобщенной координате;

s - число обобщенных координат в механической системе.

Если для исследуемой системы были составлены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа II - го рода, то для определения возможных положений равновесия достаточно приравнять обобщенные силы нулю и решить полученные уравнения относительно обобщенных координат.

Если механическая система находится в равновесии в потенциальном силовом поле, то из уравнений (1) получаем следующие условия равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,2,\dots s. \qquad (2)$$

Следовательно, в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремальное значение. Не всякое равновесие, определяемое вышеприведенными формулами, может быть реализовано практически. В зависимости от поведения системы при отклонении от положения равновесия говорят об устойчивости или неустойчивости данного положения.

Устойчивость равновесия

Определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX века в работах русского ученого А. М. Ляпунова. Рассмотрим это определение.

Для упрощения выкладок условимся в дальнейшем обобщенные координаты q_1, q_2,..., q_s отсчитывать от положения равновесия системы:

$q_{j0} = 0$, где $j = 1,2,\dots s$.

Положение равновесия называется устойчивым, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое другое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что в том случае, когда начальные значения обобщенных координат и скоростей не будут превышать δ:

$$|q_{j0}| < \delta;\ \dots;\ |\dot{q}_{j0}| < \delta;$$

значения обобщенных координат и скоростей при дальнейшем движении системы не превысят ε.

$|q_j(t)| < \varepsilon; \ldots; \; |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon.$

Иными словами, положение равновесия системы $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$ называется **устойчивым**, если всегда можно найти такие достаточно малые начальные значения $|q_{j0}| < \delta; \ldots; |\dot{q}_{j0}| < \delta$, при которых движение системы $q_j(t), \dot{q}_j(t)$ не будет выходить из любой заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия $|q_j(t)| < \varepsilon; \ldots; |\dot{q}_j(t)| < \varepsilon$. Для системы с одной степенью свободы устойчивое движение системы можно наглядно изобразить в фазовой плоскости (рис.1). Для устойчивого положения равновесия движение изображающей точки, начинающееся в области $[-\delta; \delta]$, не будет в дальнейшем выходить за пределы области $[-\varepsilon; \varepsilon]$.

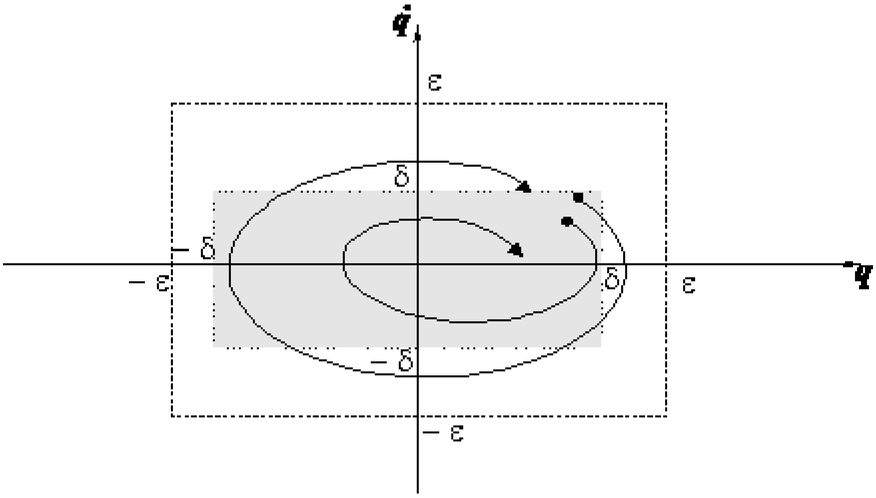

Рис.1

Положение равновесия называется ***асимптотически устойчивым***, если с течением времени система будет приближаться к положению равновесия, то есть

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,s.$$

Определение условий устойчивости положения равновесия представляет собой достаточно сложную задачу, поэтому ограничимся простейшим случаем: исследованием устойчивости равновесия консервативных систем .

Достаточные условия устойчивости положений равновесия для таких систем определяются ***теоремой Лагранжа - Дирихле***: ***положение равновесия консервативной механической системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум***.

Потенциальная энергия механической системы определяется с точностью до постоянной. Выберем эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия равнялась нулю:

П(0)=0.

Тогда для системы с одной степенью свободы достаточным условием существования изолированного минимума, наряду с необходимым условием (2), будет условие

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} > 0.$$

Так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум и П(0)=0, то в некоторой конечной окрестности этого положения

П(q)=0.

Функции, имеющие постоянный знак и равные нулю только при нулевых значениях всех своих аргументов, называются знакоопределенными. Следовательно, для того, чтобы положение равновесия механической системы было устойчивым необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этого положения потенциальная энергия была положительно определенной функцией обобщенных координат.

Для линейных систем и для систем, которые можно свести к линейным при малых отклонениях от положения равновесия (линеаризовать), потенциальную энергию можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j \qquad (3)$$

где c_{ij} - обобщенные коэффициенты жесткости.

Обобщенные коэффициенты c_{ij} являются постоянными числами, которые могут быть определены непосредственно из разложения потенциальной энергии в ряд или по значениям вторых производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам в положении равновесия:

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что обобщенные коэффициенты жесткости симметричны относительно индексов

$c_{ij} = c_{ji}.$

Для того, чтобы выполнялись достаточные условия устойчивости положения равновесия, потенциальная энергия должна быть положительно определенной квадратичной формой своих обобщенных координат.

В математике существует ***критерий Сильвестра***, дающий необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичных форм: ***квадратичная форма (3) будет положительно определенной, если определитель, составленный из ее коэффициентов, и все его главные диагональные миноры будут положительными, т.е. если коэффициенты*** c_{ij} ***будут удовлетворять условиям***

$$D_1 = c_{11} > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

. . . . . .

$$D_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdot & \cdot & c_{ss} \end{vmatrix} > 0,$$

В частности, для линейной системы с двумя степенями свободы потенциальная энергия и условия критерия Сильвестра будут иметь вид

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + c_{12}q_1q_2 + c_{21}q_2q_1 + c_{22}q_2^2)$$

$$\Delta_1 = c_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0.$$

Аналогичным образом можно провести исследование положений относительного равновесия, если вместо потенциальной энергии ввести в рассмотрение потенциальную энергию приведенной системы.

Пример определения положений равновесия и исследования их устойчивости

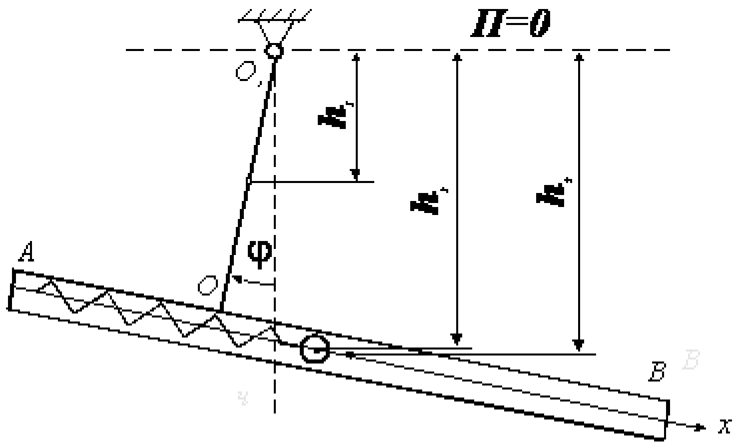

Рис.2

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трубки *AB*, которая стержнем OO_1 соединена с горизонтальной осью вращения, и шарика, который перемещается по трубке без трения и связан с точкой *A* трубки пружиной (рис.2). Определим положения равновесия системы и оценим их устойчивость при следующих параметрах: длина трубки l_2= 1 м, длина стержня l_1 =0,5 м. длина недеформированной пружины l_0 = 0,6 м , жесткость пружины c = 100 Н/м. Масса трубки m_2 = 2 кг , стержня - m_1 = 1 кг и шарика - m_3 = 0,5 кг. Расстояние *OA* равно l_3 = 0,4 м.

Запишем выражение для потенциальной энергии рассматриваемой системы. Она складывается из потенциальной энергии трех тел, находящихся в однородном поле силы тяжести, и потенциальной энергии деформированной пружины.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести равна произведению веса тела на высоту его центра тяжести над плоскостью, в которой потенциальная энергия считается равной нулю. Пусть потенциальная энергия равна нулю в плоскости, проходящей через ось вращения стержня OO_1, тогда для сил тяжести

$$\Pi_{\text{тяж}} = \Pi_{\text{AB}} + \Pi_{\text{OO}_1} + \Pi_{\text{ш}} = m_2gh_2 + m_1gh_1 + m_3gh_3 =$$
$$= -m_2g\left\{l_1cos\varphi + (\frac{l_2}{2} - l_3)sin\varphi\right\} - m_1g\frac{l_1}{2}cos\varphi -$$
$$-m_3g\{l_1cos\varphi + (x - l_3)sin\varphi\}$$

Для силы упругости потенциальная энергия определяется величиной деформации $\Delta = (x - l_0)$

$$\Pi_{\text{упр}} = \frac{c\Delta^2}{2} = \frac{c(x - l_0)^2}{2}.$$

Найдем возможные положения равновесия системы. Значения координат в положениях равновесия есть корни следующей системы уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = m_2gl_1\varphi - m_2g\left(\dfrac{l_2}{2} - l_3\right)cos\varphi + m_1gl_1sin\varphi + \\ \qquad + m_3gl_1sin\varphi - m_3g(x - l_3)cos\varphi = 0 \\ \qquad \dfrac{\partial\Pi}{\partial x} = -m_3gsin\varphi + c(x - l_0) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Подобную систему уравнений можно составить для любой механической системы с двумя степенями свободы. В некоторых случаях можно получить точное решение системы. Для системы (5) такого решения не существует, поэтому корни надо искать с помощью численных методов.

Решая систему трансцендентных уравнений (5), получаем два возможных положения равновесия:

1. $\varphi_1 = 0{,}1721$ рад, $x_1 = 0.6084$ м.
2. $\varphi_2 = 3.3091$ рад, $x_2 = 0{,}5918$ м.

Для оценки устойчивости полученных положений равновесия найдем все вторые производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам и по ним определим обобщенные коэффициенты жесткости.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial k^2} = c,$$
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial k^2 \partial \varphi} = -m_3 g cos\varphi,$$
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = (m_1 + m_2 + m_3) g l_1 cos\varphi + \left[m_2\left(\frac{l_2}{2} - l_3\right) + m_3(x - l_3)\right] g sin\varphi.$$

Тогда для первого положения равновесия

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\right)_1 = -100,$$
$$c_{12} = c_{21} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi}\right)_1 = -4{,}833,$$
$$c_{22} = (\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2})_1 = 17{,}425.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра

$$\Delta_1 = c_{11} = 100 > 0,$$
$$\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1719 > 0.$$

Для второго найденного положения равновесия

$$c_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\right)_2 = -100,$$
$$c_{12} = c_{21} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi}\right)_2 = 4{,}836,$$
$$c_{22} = (\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2})_2 = -17{,}425.$$
$$\Delta_1 = c_{11} = 100 > 0,$$
$$\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = -1766 < 0.$$

Таким образом, первое положение равновесия устойчиво, второе - неустойчиво.

Вопросы для самопроверки

- Каков вид условий равновесия сил, имеющих потенциал?
- Каким может быть состояние покоя механической системы?
- Каков критерий устойчивости состояния покоя механической системы, устанавливаемый теоремой Лагранжа-Дирихле?
- Как установить вид состояния покоя механической системы с одной степенью свободы в том случае, если $(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2})_{q=q_{\text{покоя}}} = 0$?
- Каков порядок исследования состояния покоя механической системы на устойчивость?
- Какое движение механической системы называется возмущенным?
- Какое равновесие системы называется: а) устойчивым; б) неустойчивым; в) асимптотически устойчивым?
- Каким свойством обладает потенциал консервативных сил в положении равновесия?
- Что называется потенциальным барьером? Потенциальной ямой?
- Сформулируйте теорему Ляпунова.
- Что такое уравнения первого приближения?
- Сформулируйте теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.