Функция одной переменной. Область определения. Множество значений. Способы задания. Четность, нечетность. Периодичность

Краткие теоретические сведения:

1. Понятие функции. Способы задания функции.

Величина, которая в условиях данного процесса сохраняет одно и тоже числовое значение, называется *постоянной* величиной.

Величина, которая в условиях данного процесса принимает различные числовые значения, называется *переменной* величиной.

Например, при равномерном движении скорость v — величина постоянная, время движения t и пройденный путь s — переменные.

Часто приходится рассматривать несколько переменных величин, зависящих одна от другой. Математический анализ изучает переменные величины, рассматривая их во взаимной связи, зависимости. Так, в приведенном примере переменные s и t не могут принимать произвольные значения, независимо друг от друга, придав определенное значение переменной t, мы единственным образом определим значение $s = v \cdot t$.

В указанном примере каждому рассматриваемому значению одной величины соответствует одно определенное значение другой величины.

Пусть x и y — две переменные величины.

Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если по некоторому правилу или закону каждому значению, которое может принять переменная x, ставится в соответствие одно определенное значение переменной y.

Условно это записывается так: $y = f(x)$.

Переменная x при этом называется независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции:

1) *Аналитический способ* — это задание функции при помощи формул. Например: $y = 6x - 8$, $y = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$, $y = \cos x$.

Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*.

Например, $e^y - 7xy + x^3 = 0$ — неявное задание функции.

Функция может задаваться не одной, а несколькими формулами. Например, $y = \begin{cases} x^2 + 1, если x \le 0, \\ 2x + 3, если x > 0. \end{cases}$

2) *Табличный способ* — это способ задания функции при помощи таблицы, содержащей ряд числовых значений аргумента и соответствующих им значений функции.

3) *Графический способ* — это способ задания функции графиком.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости xOy, для каждой из которых абсцисса x равна значению аргумента, а ордината равна соответствующему значению функции $y = f(x)$.

Одну и ту же функцию можно задать различными способами.

Если дана функция $y = f(x)$, то для обозначения значения функции при некотором значении аргумента $x = a$ применяют обозначения: $y(a)$ или $f(a)$.

2. Область определения и множество значений функции.

Совокупность всех действительных значений аргумента x, для которых функция y определена, то есть существует и выражается действительным числом, называется *областью определения* функции $y = f(x)$ и обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Совокупность всех тех значений, которые принимает при этом сама функция y, называется *областью (множеством) значений функции* и обозначается $E(f)$ или $E(y)$.

Например, функция $y = x^2$ существует при любом значении аргумента x, поэтому ее областью определения является множество всех действительных чисел, то есть $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Но при этом зависимая переменная y принимает только положительные значения или 0, поэтому множеством ее значений являются $y \geq 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Основные свойства функций

1) Монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции:

$$x_1 < x_2,\ x_1,\ x_2 \in X \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции:

$$x_1 < x_2,\ x_1,\ x_2 \in X \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$

Функция только возрастающая или только убывающая на промежутке X называется *монотонной* на этом промежутке.

Например, функция $y = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 0]$.

2) Четность и нечетность.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого x, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Например, $y = x^2$ — четная функция.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x, принадлежащего области определения, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, $y = x^3$ — нечетная функция.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Их часто называют функциями *общего вида*. Такова, например, функция $y = 2x + 3$.

3) Периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ значения $x \pm T \in D(f)$ и $f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называют *периодом* функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то ее периодами будут также числа kT, где $k \in Z$.

Наименьший положительный период функции называется ее *основным периодом.*

Например, $y = \sin x$ — периодическая функция с основным периодом 2π.

4) Ограниченность.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если существует число $C > 0$, такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$ или $-C \leq f(x) \leq C$.

График ограниченной функции лежит между прямыми $y = -C$ и $y = C$.

Например, $y = \sin x$ — ограниченная функция, так как $|\sin x| \leq 1$ для $x \in R$.

Понятие сложной функции. Понятие обратной функции.

Краткие теоретические сведения:

1. Понятие обратной функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, для которой $D(f)$ — область определения, $E(f)$ — область значений. Функция $y = f(x)$ каждому значению $x \in D(f)$ ставит в соответствие единственное значение $y \in E(f)$.

Теперь, наоборот, поставим в соответствие каждому $y \in E(f)$ единственное значение $x \in D(f)$, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, называемую *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначаемую $x = f^{-1}(y)$.

Для любой монотонной функции $y=f(x)$ существует обратная.

Чтобы найти обратную функцию, надо из уравнения $y=f(x)$ выразить x через y.

Например, для функции $y=2x$ функция $x=\frac{1}{2}y$ является обратной.

Переход от функции $y=f(x)$ к обратной функции $x=f^{-1}(y)$ сводится лишь к изменению ролей множеств $D(f)$ и $E(f)$, тогда как зависимость между x и y одна и та же в обоих случаях. Поэтому графики функций $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.

Обычно для обратной функции аргумент обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, то есть вместо $x=f^{-1}(y)$ пишут $y=f^{-1}(x)$. В этом случае графики функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Например, функция $y=\frac{1}{2}x$ — обратная по отношению к $y=2x$.

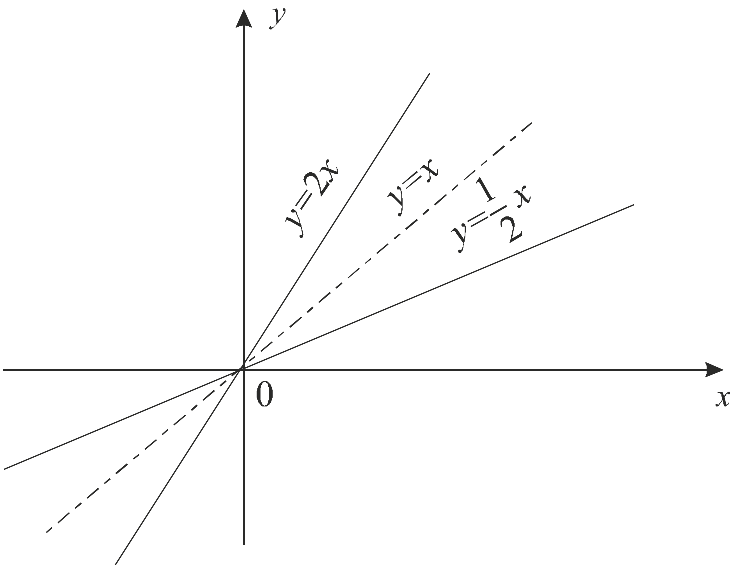

Рис. Графики взаимно-обратных функций $y=2x$ и $y=\frac{1}{2}x$

2. Понятие сложной функции.

Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u, в свою очередь, является функцией от независимой переменной x, то есть $y=f(u)$ и $u=g(x)$, причем значения $g(x)$ принадлежат области определения функции $f(u)$, тогда функция $y=f(g(x))$ называется *сложной функцией* (или функцией от функции).

Переменная $u=g(x)$ называется *промежуточным аргументом*.

Например, функция $y=\left(2-3x^2\right)^5$ является сложной, так как ее можно представить следующим образом $y=u^5$, где $u=2-3x^2$.

Если, например, $y=\sqrt{u+1}$, а $u=x^2$, то сложная функция имеет вид $y=\sqrt{x^2+1}$.

Основные элементарные функции, их свойства и графики. Элементарные функции. Понятие о производственных функциях в сельском хозяйстве.

Краткие теоретические сведения:

1. Основные элементарные функции.

К основным элементарным функциям относятся:

1) степенная $y=x^n$, $n\in R$;

2) показательная $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$;

3) логарифмическая $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;

4) тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$;

5) обратные тригонометрические $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

Функция, записанная одной формулой и составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий (+, -, ×, :) и операции взятия сложной функции, называется *элементарной*.

Например, $y=\dfrac{2^{\sin x}}{1+\ln x}$ — элементарная функция.

Если функция задана различными формулами для различных промежутков изменения аргумента, то она не является элементарной.

Например, $y=\begin{cases} x^2+1, если x\leq 0, \\ 2x+3, если x>0 \end{cases}$ не элементарная функция.

Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Основные теоремы о пределах. Раскрытие основных видов неопределенностей.

Краткие теоретические сведения:

1. Предел числовой последовательности.

Если каждому числу *n* натурального ряда чисел 1, 2, 3, …, *n*, … ставится в соответствие по определенному закону некоторое действительное число x_n, то совокупность действительных чисел x_1, x_2, x_3,…, x_n, …, расположенных в порядке возрастания номеров *n*, называется *числовой последовательностью.*

Числа x_1, x_2, x_3,…, x_n, … называют *членами последовательности*.

Числовую последовательность принято сокращенно обозначать $\{x_n\}$.

Общий член последовательности, переменная x_n, зависящая от номера *n*, есть функция натурального аргумента, то есть $x_n = f(n)$.

Последовательность считается заданной, если дан способ вычисления любого ее члена по известному номеру.

Число *A* называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε, найдется такой номер *N*, что для всех членов последовательности с номером $n > N$ верно неравенство

$$|x_n - A| < \varepsilon .$$

Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших *n* члены последовательности $\{x_n\}$ как угодно мало отличаются от числа *A* (по абсолютной величине меньше, чем на число ε, каким бы малым оно ни было).

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$.

В рассмотренном примере $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся.*

2. Понятие предела функции в точке.

Выясним понятие предела функции на примере. Пусть дана функция $y = x^2 - 4$. Рассмотрим две различные последовательности значений аргумента *x*:

3,1; 3,01; 3,001; 3,0001; …; $x_n = 3 + (0{,}1)^n$; …

2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; …; $x_n = 3 - (0{,}1)^n$; …

Каждая из этих двух последовательностей стремится к одному и тому же числу 3, т.е. число 3 является пределом этих последовательностей.

Если в данную функцию $y = x^2 - 4$ вместо x проставлять последовательно значения аргумента, которые являются членами этих последовательностей, то получим соответственно две числовые последовательности значений функции *y*:

5,61; 5,0601; 5,006001; 5,00060001; …

4,41; 4,9401; 4, 993901; 4,99949901; …

Полученные последовательности значений функции *y* имеют один и тот же предел, равный 5. Следовательно, число 5 является пределом функции $y = x^2 - 4$, когда аргумент стремится к числу 3. Это записывают так:

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 4) = 5 .$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Число *A* называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при x, стремящемся к* x_0 (или *в точке* x_0), если для любой последовательности значений аргумента, сходящейся к x_0, соответствующие последовательности значений функции имеют один и тот же предел, равный числу *A*.

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

3. Односторонние пределы.

Если при стремлении *x* к x_0 переменная *x* принимает лишь значения, меньшие x_0, или, наоборот, лишь значения, большие x_0, и при этом функция $y = f(x)$ стремится к некоторому числу *A*, то говорят об односторонних пределах функции $y = f(x)$ соответственно слева $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ и справа $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ существует тогда и только тогда, когда равны ее односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Тогда и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4. Основные теоремы о пределах.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — функции, имеющие пределы при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.

2. Предел постоянной равен самой постоянной, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} C = C, \text{ где } C = const.$$

3. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B.$$

4. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) g(x)\big) = AB.$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} C f(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x) = CA$$

6. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

7. Если предельное значение аргумента $x = x_0$ принадлежит области определения элементарной функции $y = f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 .$$

Например, функция $y = \ln x$ при $x \to 1$ есть бесконечно малая величина, так как $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$.

Свойства бесконечно малых величин:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если для любой последовательности значений аргумента, сходящейся к x_0, соответствующие последовательности значений функции неограниченно возрастают по абсолютной величине.

Принято писать $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ есть бесконечно большая величина, т.е. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Свойства бесконечно больших величин:

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.
2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

Теорема (связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами): Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая величина, и наоборот.

То есть если $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$. И наоборот, если $\beta(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Например, функция $y = tgx$ — бесконечно малая при $x \to 0$, а функция $y = \dfrac{1}{tgx} = ctgx$ — бесконечно большая при $x \to 0$.

Теорема о связи функции с ее пределом: Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ предел, равный *A*, то ее можно представить в виде суммы этого числа *A* и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Верна и *обратная* теорема: Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа *A* и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, то число *A* есть предел этой функции при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

6. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{tgx} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Число *e* является иррациональным $e \approx 2{,}718$. Оно служит основанием натуральных логарифмов. Для обозначения натурального логарифма числа *N* пользуются символом $\ln N$.