Лекция №14
Случайные величины

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин.
2. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины.
3. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин

- Под ***случайной величиной*** (сокращенно с. в.) понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее какое.

Случайные величины обозначаются обычно прописными латинскими буквами X, Y, Z, …, а принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$.

Примеры с. в.:

1) X — число очков, появляющееся при бросании игральной кости;
2) Y — число выстрелов до первого попадания в цель;
3) Z — время безотказной работы прибора и т. п.

- Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется ***дискретной*** (д. с. в.).
- Если же множество возможных значений с. в. несчетно, то такая величина называется ***непрерывной*** (н. с. в.).

То есть д. с. в. принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а н. с. в. может принимать любые значения из некоторого промежутка.

Случайные величины X и Y (примеры 1) и 2)) являются дискретными. С. в. Z (пример 3)) является непрерывной.

2. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины

Для полного описания с. в. необходимо знать не только ее возможные значения, но и вероятности этих значений.

- ***Законом распределения*** д. с. в. называется правило, позволяющее находить вероятности отдельных значений с. в.

Способы задания закона распределения д. с. в.:

1) ***Табличный***, т. е. в виде таблицы, где в первой строке указываются возможные значения с. в., а во второй — соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Такая таблица называется ***рядом распределения д. с. в.***

Так как события $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, $\ldots$, $\{X = x_n\}$ несовместные и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т. е. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример 1:

Составить ряд распределения д. с. в. X — числа очков, появляющегося при бросании игральной кости.

Решение

Ряд распределения д. с. в. X имеет вид

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) ***Графический.*** На оси абсцисс откладываем возможные значения д. с. в., а на оси ординат — вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), $\ldots$, (x_n, p_n), называют ***многоугольником (или полигоном) распределения***.

3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1) ***Математическим ожиданием*** д. с. в. называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности.

Оно определяет среднее значение д. с. в.

$$\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}.$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где $C = \text{const}$;
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;

2) Для оценки степени рассеивания значений с. в. относительно ее среднего значения вводятся понятия дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Дисперсией с. в. называется математическое ожидание квадрата отклонения с. в. от ее математического ожидания.

$$\boxed{D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n}[x_i - M(X)]^2 p_i}$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где $C = \text{const}$;
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;

Средним квадратическим отклонением называется величина

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

Пример 2.

Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности.

X	–2	1	3
p	0,1	0,6	0,3

Вычислить:
1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) среднее квадратическое отклонение.

Решение

1) Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Получим

$$M(X) = (-2) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 = -0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}3 .$$

2) Дисперсию случайной величины X найдем по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \text{ где}$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i .$$

Получим

$$D(X)=(-2)^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}6+3^2\cdot 0{,}3-(1{,}3)^2=0{,}4+0{,}6+2{,}7-1{,}69=2{,}01.$$

3) Среднее квадратическое отклонение случайной величины X найдем по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Получим $\sigma(X)=\sqrt{2{,}01}\approx 1{,}42$.

Ответ: 1) 1,3; 2) 2,01; 3) 1,42.

Лекционное упражнение

- ***Задание № 1:***

Построить многоугольник распределения д. с. в., заданной рядом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,15	0,25	0,1	0,3

- ***Задание № 2:***

Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности.

X	1	2	3
P	0,2	0,15	0,65

Вычислить:
1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) среднее квадратическое отклонение.