Пример решения задания К1.

Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos(\pi t/4) + 3;$$
$$y = 2\sin(\pi t/8) - 1. \qquad \text{(x, y – в сантиметрах, t - в секундах).}$$

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos(\pi t/4) = 1 - 2\sin^2(\pi t/8) \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим:

$$\cos(\pi t/4) = (3 - x)/2, \qquad \sin(\pi t/8) = (y+1)/2;$$

следовательно, $(3 - x)/2 = 1 - 2(y+1)^2/4.$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (рис. К1): $x = (y+1)^2 + 1.$

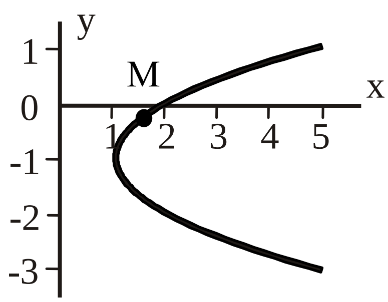

Рис. К1

2. Определяем положение точки в заданный момент времени.

При t = 1с: $x = -2\cos(\pi/4) + 3 = 1{,}6$ *см;* $y = 2\sin(\pi/8) - 1 = -0{,}23$ *см.*

Изображаем (рис. К1) эту точку на рисунке (т.М).

3. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси.

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin(\pi t/4); \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t/8); \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2};$$

При t = 1с: $\upsilon_x = 1{,}11$ *см/с*; $\upsilon_y = 0{,}73$ *см/с*; $\upsilon = 1{,}33$ *см/с.*

4. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} cos\left(\frac{\pi}{4} t\right); \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} sin\left(\frac{\pi}{8} t\right); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

При t = 1с: a_x = 0,87 см/с^2, a_y = - 0,12 см/с^2, a = 0,88 см/с^2.

5. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$. Получим: $$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}\ .$$

Подставив полученные ранее значения, найдем, что при t = 1с a_τ = 0,66 см/с^2.

6. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a и a_τ, получим, что при t = 1 с: a_n = 0,58 см/с^2.

7. Радиус кривизны траектории $\rho = \upsilon^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения v и a_n, найдем, что при t = 1 с ρ = 3,05 см.

При построении скоростей следует в данном случае выбрать масштаб:

$\mu_v = 0{,}02 \frac{см/с}{мм}$, тогда $l_{vx} = v_x / \mu_v \approx 56$ мм; $l_{vy} = v_y \,|\, / \mu_v \approx 37$ мм;

$l_v = |\, v \,| / \mu_v \approx 66$ мм;

если принять $\mu_v = 0{,}01 \frac{см/с}{мм}$, тогда $l_{vx} = |\, v_x \,| / \mu_v = 111$мм, $l_{vy} = |\, v_y \,| / \mu_v = 73$мм,

и мы видим, что длина $l_{vx} > 100$ мм и это плохо (слишком длинный вектор).

При построении ускорений следует выбрать масштаб: $\mu_a = 0{,}01 \frac{см/с}{мм}$, тогда:

$l_{ax} = |\, a_x \,| / \mu_a = 0{,}87/0{,}01 = 87$ мм,

$l_{ay} = |\, a_y \,| / \mu_a = 0{,}12/0{,}01 = 12$ мм;

$l_{a\tau} = |\, a_\tau \,| / \mu_a = 0{,}66/0{,}01 = 66$ мм, $l_{an} = |\, a_n \,| / \mu_a = 0{,}58/0{,}01 = 58$ мм.

Найденные длины отрезков откладываем из точки М.

При выбранных масштабах длины векторов v *и* a_τ практически равны.

Примечание. При построении следует учесть, что l_{ay} необходимо отложить вниз, так как: $a_y < 0$, а a_τ – по направлению скорости, т. к. $a_\tau > 0$.

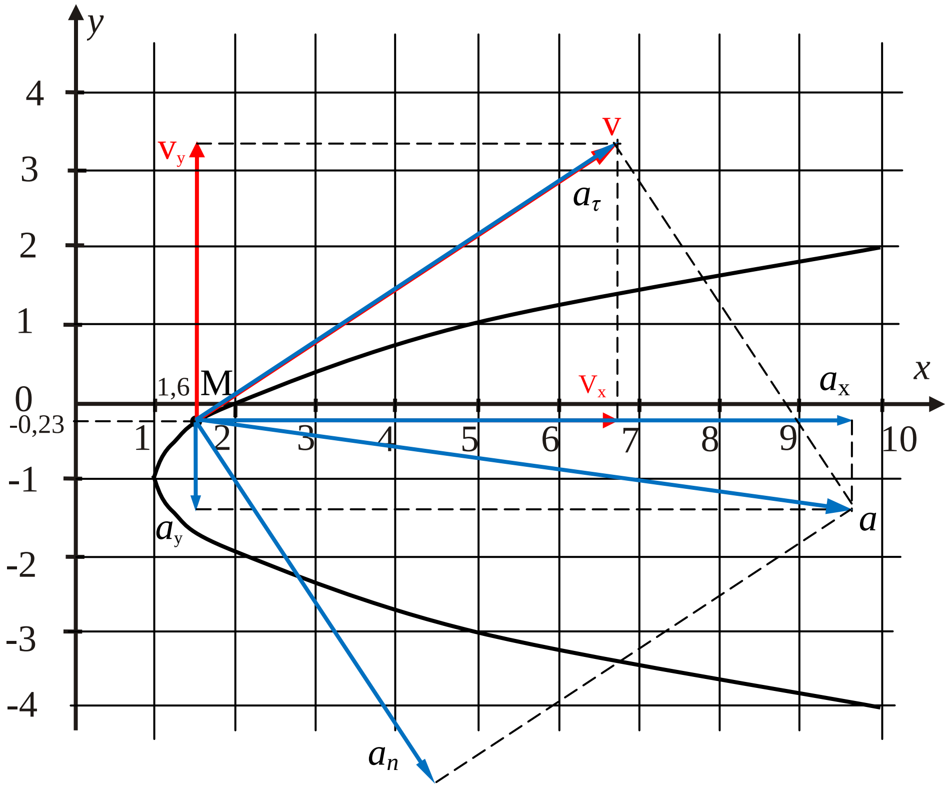

Рис. К1