11. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение тела, при котором любая прямая, жестко соединенная с ним, остается параллельной своему начальному положению.

Теорема. ***При поступательном движении все точки тела описывают совпадающие при наложении траектории и имеют в данный момент времени одинаковые скорости и ускорения.***

Пусть тело (рис.9), двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A'B'. Фигура ABA'B' - параллелограмм, т.к. стороны AB и A'B' равны и параллельны. Следовательно, перемещения точек A и B также будут равны и параллельны, т.е. $\Delta\bar{r}_A = \Delta\bar{r}_B$. Из рисунка видно, что траектория т. B получается из траектории т. A смещением на $\bar{r}$, т.е. траектории совпадают при наложении. Взяв два раза производную от равенства $\bar{r}_A = \bar{r}_B$, получим: $\bar{v}_A = \bar{v}_B$; $\bar{a}_A = \bar{a}_B$. Что и требовалось доказать.

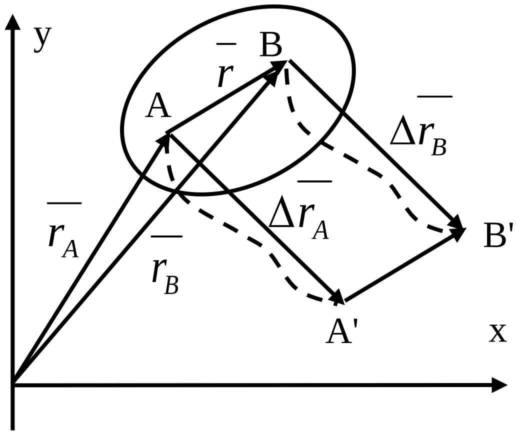

Рис. 9

Тоесть при изучении поступательного движения тела достаточно изучить движение хотя бы одной его точки, а для этого можно использовать теорию, полученную в кинематике точки.

12. Вращательное движение. Угловые скорость и ускорение

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором имеются две точки, остающиеся все время неподвижными.

Линия, проходящая через эти две точки, называется осью вращения. Все точки, лежащие на оси вращения, неподвижны. Положение вращающегося тела можно задать с помощью двугранного угла φ (рис.10) между неподвижной полуплоскостью (н.п.) и подвижной полуплоскостью (п.п.), жестко связанной с телом. Угол φ положителен, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси вращения, поворот виден происходящим против часовой стрелки. Для задания вращения надо задать функцию, описывающую изменение угла φ во времени: $\varphi=\varphi(t)$. Это и есть закон вращательного движения. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость ω (рад/с; 1/с) и угловое ускорение ε (рад/с^2; 1/с^2). Эти величины вводятся по аналогии с понятиями скорости и ускорения точки.

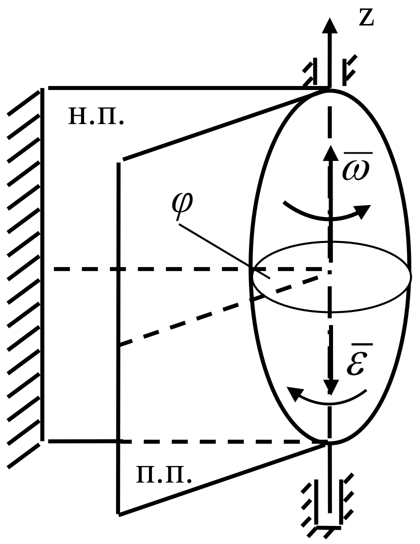

Рис.10

Угловая скорость ω (омега) есть предел, к которому стремится отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за которое это приращение произошло, при стремлении Δt к нулю. Угловое ускорение ε (ипсилон) есть предел отношения приращения угловой скорости к промежутку времени, при стремлении последнего к нулю. Очевидно, эти пределы равны первым производным от угла и угловой скорости по времени, то есть

$$\omega = d\varphi/dt; \quad \varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2.$$

В технике часто угловая скорость задается в об/мин. В этом случае она называется частотой вращения и обозначается буквой n. Связь между ω и n имеет вид

$$\omega = \pi \times n / 30 .$$

Угловые скорость и ускорение можно представить как векторы. Вектор $\overline{\omega}$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки. Вектор $\overline{\varepsilon}$ направлен в сторону вектора $\overline{\omega}$, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если замедленное (рис.10).

13. Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении. Формула Эйлера

Пусть за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$, тогда т. М опишет дугу окружности длиной Δs (рис.11a). Найдем скорость т.М

$$v_M = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s / \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} (R \cdot \Delta\varphi)/ \Delta t = R \cdot \omega.$$

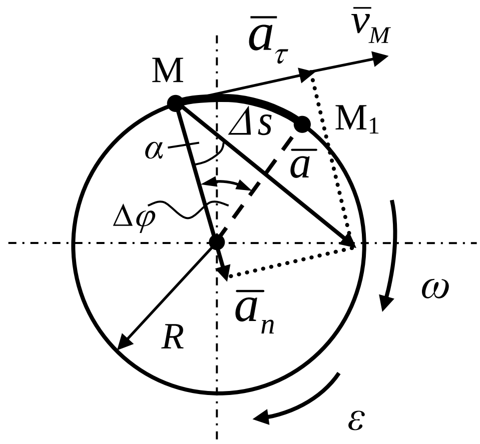

Рис.11а

Ускорение касательное

$$a_\tau = d\, v_M /dt = d(R \cdot \omega)/dt = R \cdot d\omega/dt = R \cdot \varepsilon.$$

Ускорение нормальное

$$a_n = v_M{}^2 / \rho = \omega^2 R^2 / R = \omega^2 R.$$

Тогда полное ускорение

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + w^4} .$$

Угол наклона полного ускорения к радиусу не зависит от R, т. к. $tg\alpha = a_\tau / a_n = \varepsilon / \omega^2$.

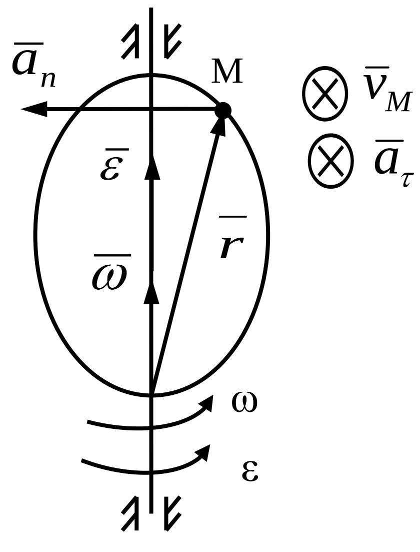

Рис.11б

Скорость т. М можно найти и с помощью векторного произведения: $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, это и есть ***формула Эйлера.*** Здесь $\overline{r}$ – радиус вектор точки М (рис 11б). Взяв производную от этой формулы, получим

$$\overline{a}_M = d\overline{v}_M/dt = d\overline{\omega}/dt \times \overline{r} + \overline{\omega} \times d\overline{r}/dt = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}).$$

Можно проверить, что первое слагаемое есть a_τ, а второе $- a_n$.

14. Уравнение равнопеременного вращения

Равнопеременным вращением называется такое вращение, при котором угловое ускорение постоянно (ε = const).

Но $\varepsilon = d\omega/dt$, разделив переменные и проинтегрировав: $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon\, dt$,

получим закон изменения угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t, \qquad \text{или} \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{14.1}$$

Учитывая, что $\omega = d\varphi/dt$, разделяя переменные и интегрируя еще один раз, получим закон равнопеременного вращения: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + 1/2\ \varepsilon t^2$ (14.2)

Из уравнения (14.1) видно, что если ε и ω_0 имеют одинаковые знаки, то ω по модулю возрастает с течением времени. В этом случае вращение называется равноускоренным. В формуле (14.2) обычно полагают $\varphi_0 = 0$, т.к. начальный угол поворота φ_0 зависит от выбора начала отсчета. Если $\varepsilon = 0$, то вращение называется равномерным. $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$ – закон равномерного вращения.