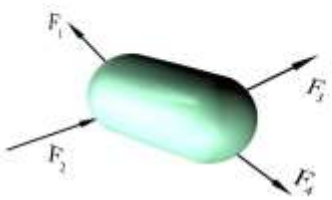
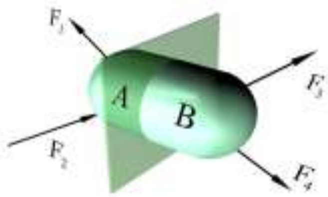
Лекция 2

2. **Внутренние силы. Метод сечений.**

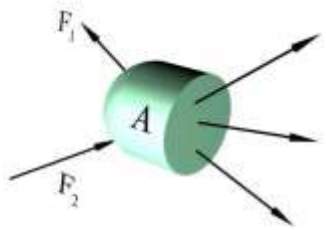
Форма тела и размеры сохраняются вследствие молекулярного взаимодействия частиц (действия внутренних сил), составляющих тело. При воздействии внешних сил, внутренние силы, обусловленные молекулярным строением тела, изменяются, и если внешние силы превышают силы молекулярного взаимодействия, то тело разрушается.

Для определения внутренних сил используют метод сечений.
1) Приложим к телу систему сил (F_1-F_4)
2) Разбиваем тело пластиной 1 на две части (А и В).



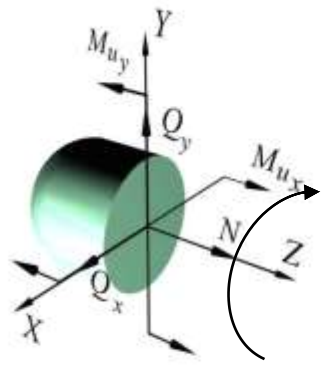


Отбросим часть В, а действие отброшенной части заменим внутренними силами.



3) По правилам теоретической механики, все силы можно свести к главному вектору и к главному моменту.

Разложим главный вектор и главный момент по осям x,y,z.
Сила N – продольная сила, которая растягивает или сжимает тело.
Q_x и Q_y – поперечные силы.
M_x, M_y – изгибающие моменты.
Т – крутящий момент.

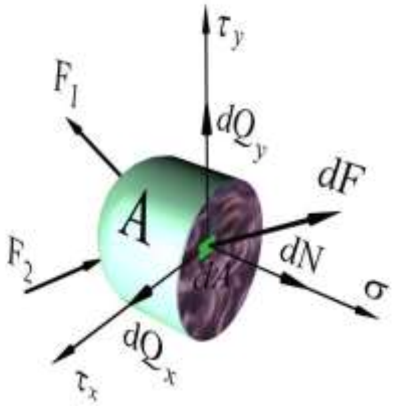


Каждому силовому фактору соответствует свой вид деформации.
N – растяжение, сжатие.
Q_y – срез
Q_z – сдвиг
$T_к$ – Кручение.
M_x, M_y – изгиб.

Понятие о напряжениях.

Внутренние силы неравномерно действуют по всему сечению.
Интенсивность распределения сил по сечению называют **напряжением**.

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади dA.



dA - элем. площадь.

dF – общая элементарная сила.

dN – элем. продольная сила.

dQ_x, dQ_y – элем. поперечные силы.

Можно предположить, что в пределах этого элемента напряжения распределены равномерно.

$$P = \frac{dF}{dA}, \left[\frac{H}{мм^2}\right], [МПа]$$ - общее напряжение.

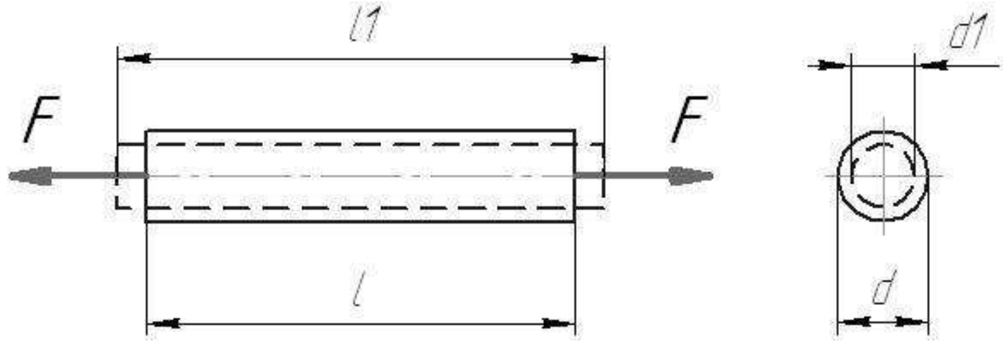
$$\sigma = \frac{dN}{dA}$$ - нормальное напряжение.

$$\tau_x = \frac{dQ_x}{dA}, \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}$$ - касательные напряжения.

$$\overline{P} = \overline{\sigma} + \overline{\tau}_x + \overline{\tau}_y$$ - общее напряжение.

3. **Растяжение (сжатие)**.

3.1. Напряжение и деформация при растяжении.



Растяжение или сжатие – это такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила.

l - первоначальная длина стержня.

l_1 - конечная длина (после приложения нагрузки).

$\Delta l = l_1 - l$ – абсолютное удлинение.

d – начальный диаметр.

d_1 - конечный диаметр.

$\Delta d = d - d_1$ - абсолютное сужение.

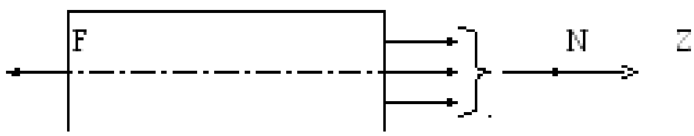
Если силы направлены в обратную сторону, то это будет сжатие, и знаки у Δl и Δd будут противоположны.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$ - относительное удлинение.

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta d}{d}$$ - относительное сужение.

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$ - коэффициент Пуассона.

После рассечения балки и отбрасывания правой части составляем уравнение равновесия.



$$\sum F_z = 0, \quad -F + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F,$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \le [\sigma]$$ - условие прочности при растяжении.

Существует несколько вариантов расчёта.

1. **Проверочный расчёт**

Дано: нагрузка *F*, площадь поперечного сечения *A*, допускаемое напряжение *[σ]* (зависит от материала).
Найти: действующее напряжение s и проверить выполнение условия прочности $\sigma < [\sigma]$.

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

2. **Определение максимального усилия**

Дано: площадь поперечного сечения *A*, допускаемое напряжение *[s]*.
Найти: максимально допустимое усилие $F_{\max}$ из условия прочности:

$$F_{\max} \leq [\sigma] \cdot A$$

3. **Конструкторский расчёт.**

Дано: нагрузка *F*, допускаемое напряжение *[σ]*.
Найти: минимально допустимую площадь поперечного сечения $A_{\min}$ из условия прочности:

$$A_{\min} > \frac{F}{[\sigma]}$$ - определение размеров сечения.

3.2. Закон Гука при растяжении.

Гук получил экспериментальную зависимость:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \qquad (1)$$

E - модуль упругости при растяжении (Юнга). физический смысл: напряжение при котором образец удлиняется в 2 раза ($\Delta l = l$);
σ - нормальное напряжение;
ε- относительное удлинение.

Подставим в (1) $\sigma = \frac{F}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l]$$ - условие жесткости.

По возможности сопротивляться деформации материалы делятся на:
1. Пластичные (Cu,Al) – деформируются в широких пределах без разрушения.
2. Хрупкие (чугун, стекло) – разрушаются без заметных деформаций.
3. Малопластичные (легированные стали, бронзы).

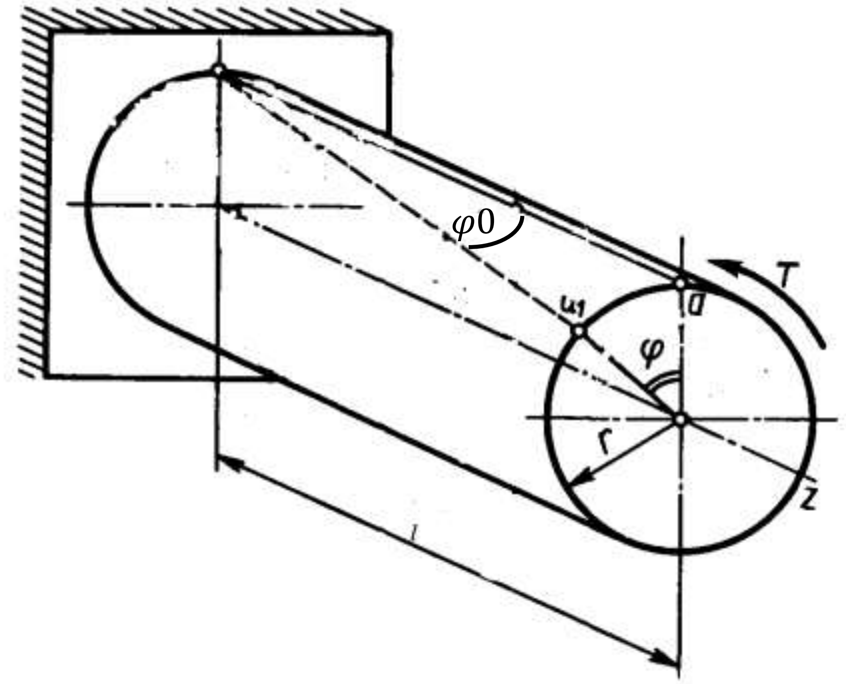
4. КРУЧЕНИЕ

Это вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных его оси, приложить вращающий момент *T (момент внешних сил называется скручивающим).*

Крутящий момент – это момент внутренних сил возникающих в сечении и уравновешивающий внешние моменты, приложенные к отсеченной части бруса.

На кручение работают валы, имеющие круглое или кольцевое сечение. Рассмотрим кручение круглого цилиндра (рис.).



T – скручивающий момент

l – длина

Под действием внешнего момента T:

1. ось цилиндра остается прямолинейной;

2. диаметр и длина цилиндра не изменяются, d и l = const;

3. образующие цилиндра располагаются по винтовой линии.

Т.е. происходит поворот поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси цилиндра, углы поворота прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения.

φ – полный угол закручивания сечения.

φ_0- относительный угол закручивания.

$\varphi_0 = \varphi / l$.

П*ри кручении* возникает *деформация сдвига* в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого.

При этом в поперечных сечениях возникают только касательные внутренние силы - крутящий момент $M_к$.

Эпюры крутящих моментов $M_к$

Мк *в любом поперечном сечении = алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения.*

Эпюры крутящих моментов дают возможность определить опасное сечение. Если брус имеет постоянное поперечное сечение, то опасными будут сечения на участке, где возникает максимальный крутящий момент Мк = max.

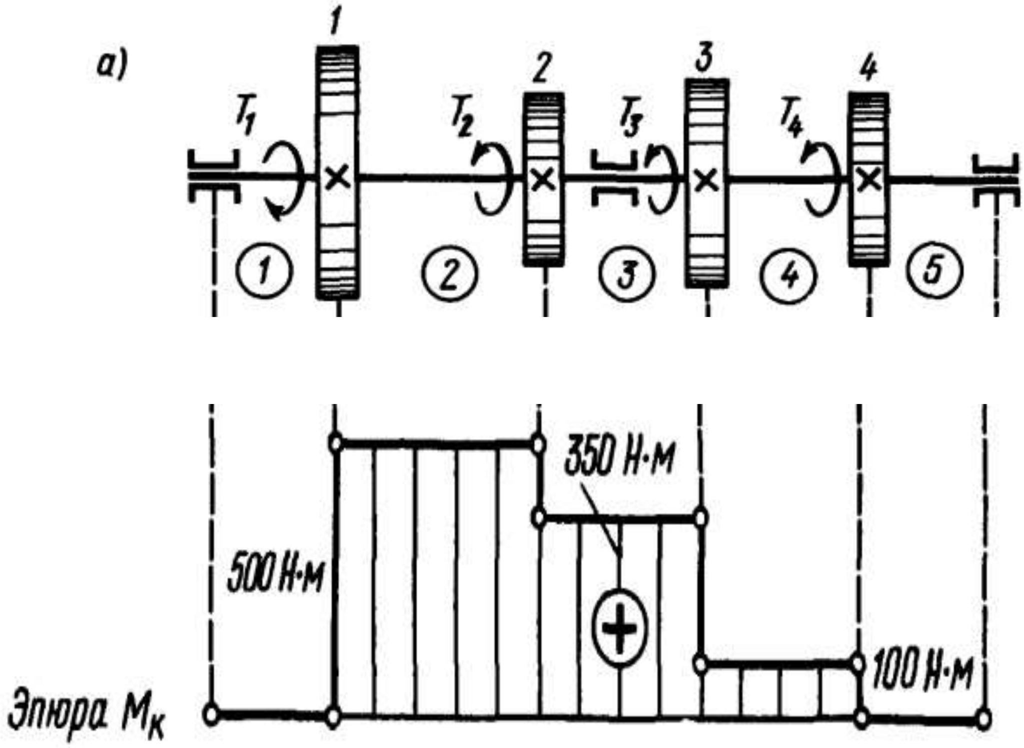
ПРАВИЛО ЗНАКОВ. Мк < 0, если при взгляде со стороны сечения крутящий момент Mk направлен против часовой стрелки, и наоборот.

В поперечном сечении, где приложены скручивающие моменты, значения крутящего момента меняются скачкообразно.

Пример.

Дано: T_1= 500 Н·м, T_2 = 150Н·м, T_3= 250 Н·м, T_4=100 Н·м.

Эпюра Мк - ?



Решение. 1) Разбиваем вал на участки 1 – 5 и применяем метод сечений.

Из эпюры видно, что наибольший крутящий момент на втором участке:

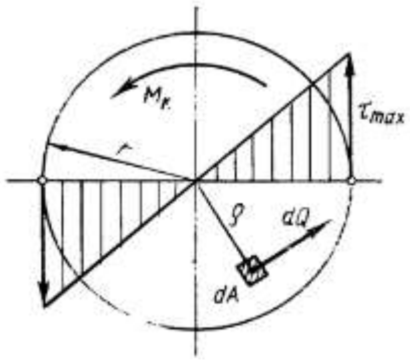
$M_{к\ max} = M_{к2} = 500 Н·м$, т.е он является опасным участком.

Напряжения и деформации

Касательные напряжения *максимальны в* наибольшей удаленности от оси кручения:

$\tau_{max} = G\ \varphi_0\ r$.

Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника (рис.).



Крутящий момент: $M_к = G\ \varphi_0\ I_p$,

Откуда: $\varphi_0 = M_к /(G\ I_p)$, рад.

$\varphi = M_к\ l/(G\ I_p)$, рад.

где GI_p – жесткость сечения.

Т.о. полный угол закручивания круглого цилиндра прямо пропорционален крутящему моменту, длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости сечения при кручении.

Для бруса, имеющего несколько участков: $\varphi = \sum \varphi_i$

где φ_i – угол закручивания каждого участка.

Напряжение при кручении:

$\tau_{max} = M_к r/I_p = M_к/(I_p/r) = M_к/W_p$,

где I_p – полярный момент инерции, $м^4$

Для круглого сечения $I_p = \pi D^4/32 \approx 0,1\ D^4$

$W_p = I_p/r$ — момент сопротивления кручению (или полярный момент сопротивления), в $м^3$.

Момент сопротивления кручению:

1. Круг $Wp \approx 0{,}2d^3$.

2. Кольцо $Wp \approx 0{,}2(D^4\text{-}d^4)/D = 0{,}2D^3(1\text{-}k^4)$, *где* $k = d/D$

Пример.

Дано: Стальная круглая проволока длиной l=1 м, диаметром d=*2* мм одним концом укреплена в зажиме, а на другом конце к ней приложен скручивающий момент. При каком угле закручивания напряжение кручения будет равно 60 МПа? Модуль упругости $G = 8{,}2 \cdot 10^4$ МПа.

φ - ?

Решение. Запишем формулы, необходимые для решения задачи: полный угол закручивания круглого цилиндра $\varphi = M_к l/(GI_p)$;

максимальное напряжение при кручении $\tau_{max} = M_к/ W_p$,

откуда $M_к = \tau_{max}\, W_p$.

Учитывая, что полярный момент инерции $I_p = W_p \cdot d/2$

и подставляя числовые значения, получим

$\varphi = M_к\, l/(G\, I_p) = \tau_{max} W_p l \cdot 2/(GW_p d) = \tau_{max} l \cdot 2/(Gd) =$

$= 60 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 2/(8{,}2 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) = 0{,}732$рад $\approx 42°$.

Расчет на прочность и жесткость при кручении

Условие *прочности*

При расчетах на прочность при кручении используют формулу:

$$\tau_k = M_к/W_p \leq [\tau_k]$$

и читается так: *касательное напряжение в опасном сечении,* вычисленное по формуле $\tau_k = M_к/W_p$ *не должно превышать допускаемое.*

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении, а именно:

для сталей $[\tau_к] = (0{,}55... 0{,}60)\, [\sigma_p]$;

для чугунов $[\tau_к] = (1...1{,}2)[\sigma_p]$.

Кроме прочности к валам предъявляется требование выполнения

условия *жесткости,которое* заключается в том, что относительный угол закручивания (угол закручивания 1 м длины вала) не должен превышать допустимой величины .

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах или радианах обозначается [θ];

если допускаемый относительный угол закручивания задан в рад/м, то **условие жесткости при кручении имеет вид:**

$$\theta = (M_k/GI_p) \leq [\theta].$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от назначения вала; их обычно принимают в следующих пределах:

[θ] = 0,25...1 град/м = 0,004…0,017 рад/м.

С помощью этих формул выполняют три вида расчетов конструкций на прочность и жесткость при кручении — проектный (когда подбирается диаметр вала из расчета на прочность или жесткость), проверочный (когда проверяют выполнение условия прочности или жесткости)и определение допускаемой нагрузки (когда находят максимально возможную нагрузку при которой обеспечивается условие прочности или жесткости).

Полный угол закручивания определяется по формуле:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_к \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

При построении эпюры углов закручивания полагают угол закручивания произвольного сечения равным 0, а затем к нему прибавляют углы закручивания отдельных участков вала.