ГРАФЫ

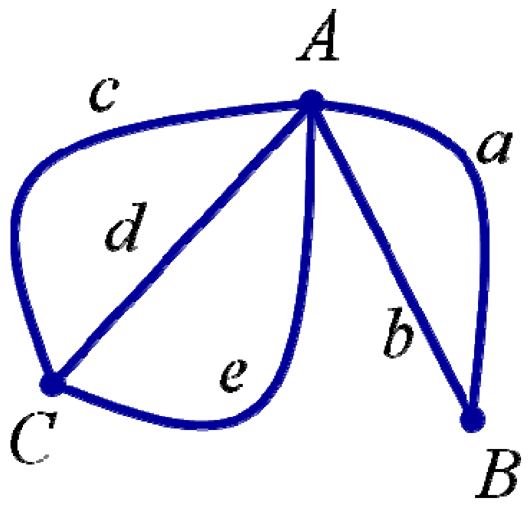
ВПЕРВЫЕ ПОНЯТИЕ «ГРАФ» ВВЕЛ В 1936 г. ВЕНГЕРСКИЙ МАТЕМАТИК *ДЕННИ КЁНИГ*, НО ПЕРВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИНАДЛЕЖАЛА ПЕРУ ВЕЛИКОГО *ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА* И БЫЛА НАПИСАНА ЕЩЕ В 1736 г.

ГРАФОМ G = (V, X) НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

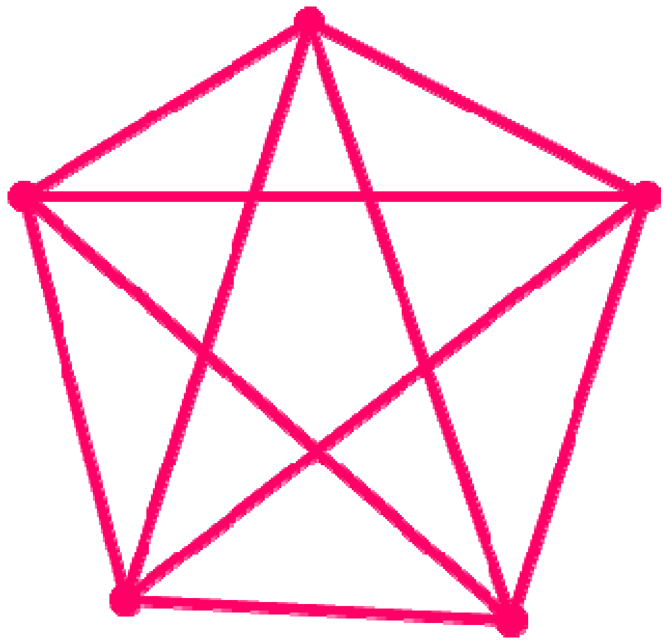
ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ ВЕРШИНАМИ, ИЛИ УЗЛАМИ, ГРАФА.

ЛИНИИ – РЕБРАМИ ГРАФА.

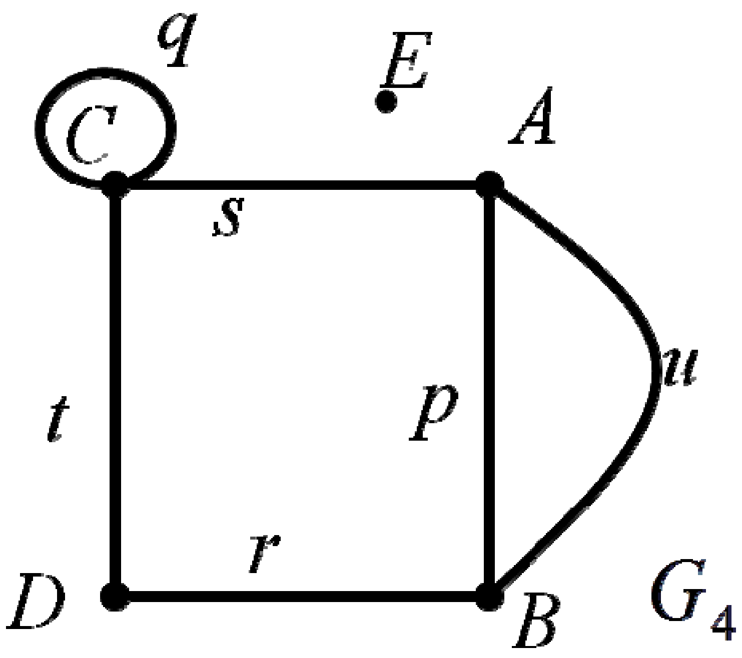
ПРИМЕРЫ ГРАФОВ:

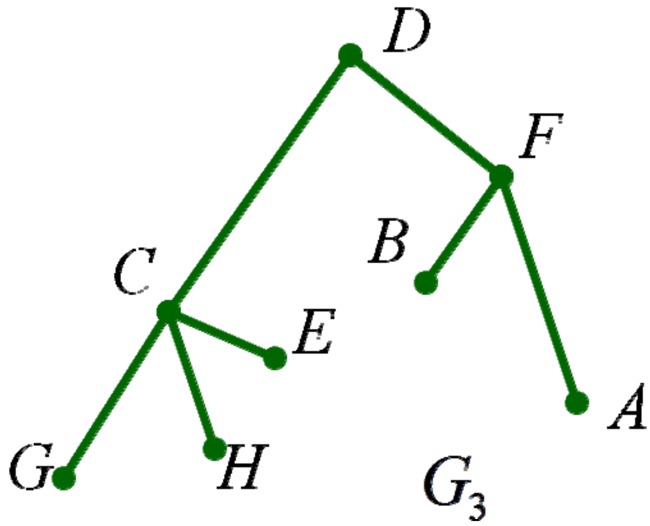


G_1



G_2


q
E
C
A
s
t
p
u
r
D
B
G_4

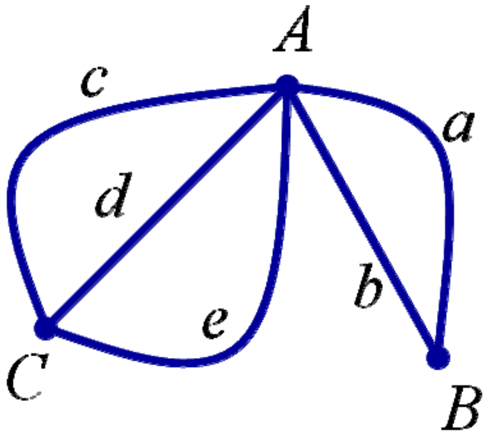

D
F
B
C
E
A
G
H
G_3

ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ ИНЦИДЕНТНО.

ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ СМЕЖНЫМИ, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.

ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ СМЕЖНЫМИ, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.

ПРИМЕР:



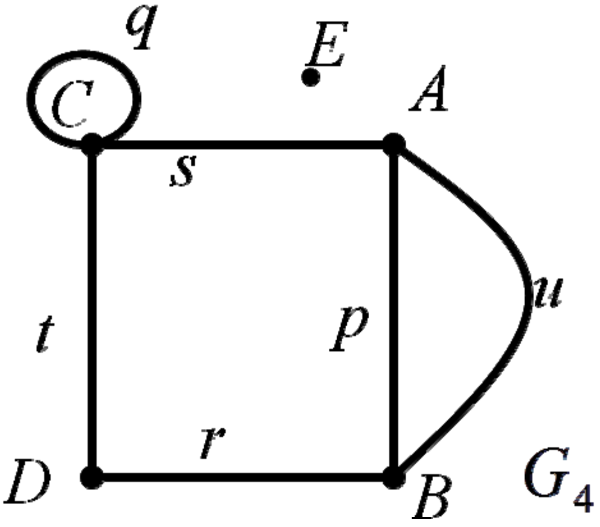
G_1

A **и** ***B*****,** ***A*** **и** ***C*** **— СМЕЖНЫЕ ВЕРШИНЫ;**

c **и** ***d*****,** ***a*** **и** ***b*** **— СМЕЖНЫЕ РЕБРА.**

ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ <u>ПЕТЛЕЙ</u>.

<u>ПРИМЕР:</u>

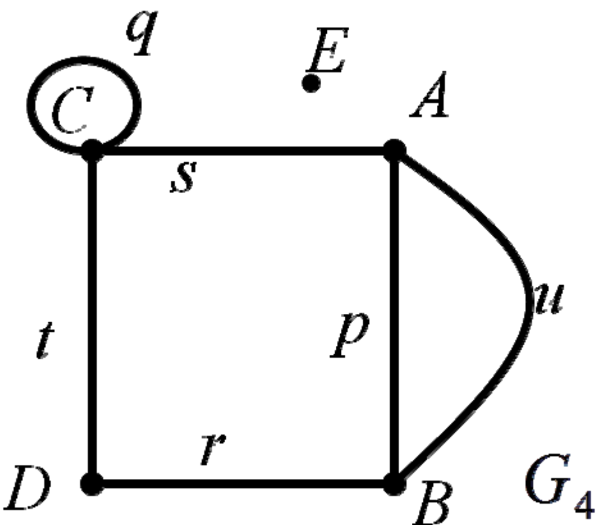


q(C,C) **— петля.**

ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ *A*, НАЗЫВАЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ *deg*(*A*).

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

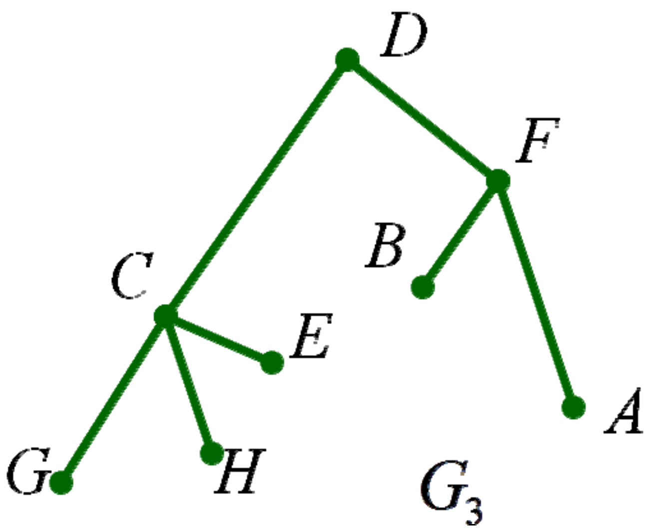
ПРИМЕР:



$deg(A) = 3;$
$deg(B) = 3;$
$deg(C) = 4;$
$deg(D) = 2;$
$deg(E) = 0.$

$deg(E) = 0$
E – **ИЗОЛИРОВАННАЯ ВЕРШИНА**

ПРИМЕР:



deg(G) = 1
deg(H) = 1
deg(E) = 1
deg(B) = 1
deg(A) = 1

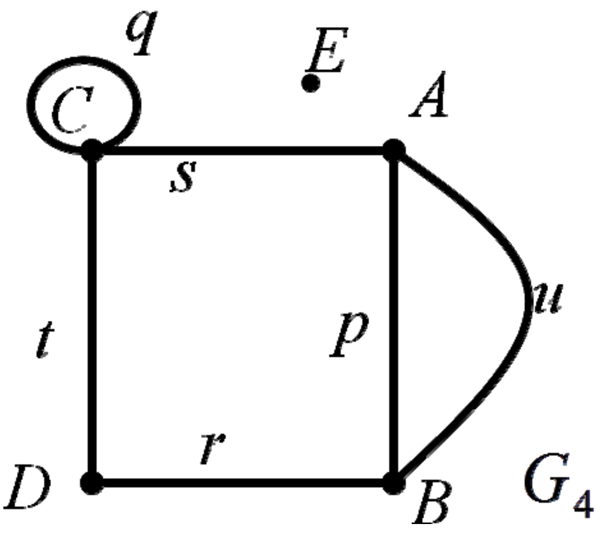
G, H, E, B, A - ВИСЯЧИЕ ВЕРШИНЫ

ТЕОРЕМА:

В ГРАФЕ G(V, X) СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m}$$

ПРИМЕР:



***deg(A)*= 3;**
***deg(B)* = 3;**
***deg(C)* = 4;**
***deg(D)* = 2;**
***deg(E)* = 0.**

$$m = 6$$

$$\sum_{i=1}^{5} \deg V_i = 2 \cdot m = 2 \cdot 6 = 12$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ), ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ (НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

ТЕОРЕМА:

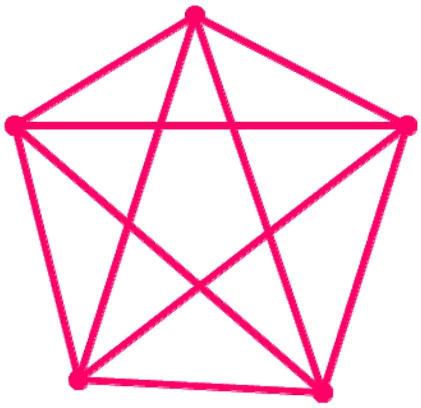
ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ:

НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ ПОЛНЫМ, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.

ПРИМЕР:



G_2

Полный граф

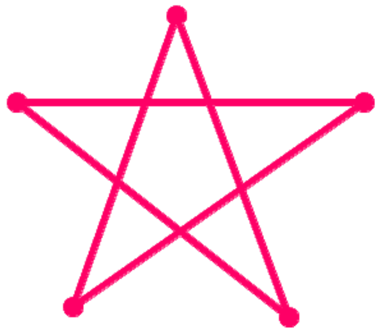
ЧИСЛО РЕБЕР ПОЛНОГО ГРАФА, КОТОРЫЙ ИМЕЕТ *n* ВЕРШИН, РАВНО

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

СТЕПЕНЬ ЛЮБОЙ ВЕРШИНЫ ПОЛНОГО ГРАФА ВСЕГДА НА 1 МЕНЬШЕ ЧИСЛА ЕГО ВЕРШИН.

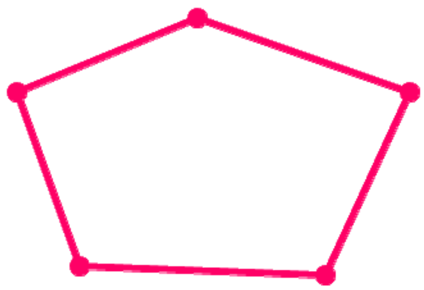
<u>ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА</u> НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.

ПРИМЕР:



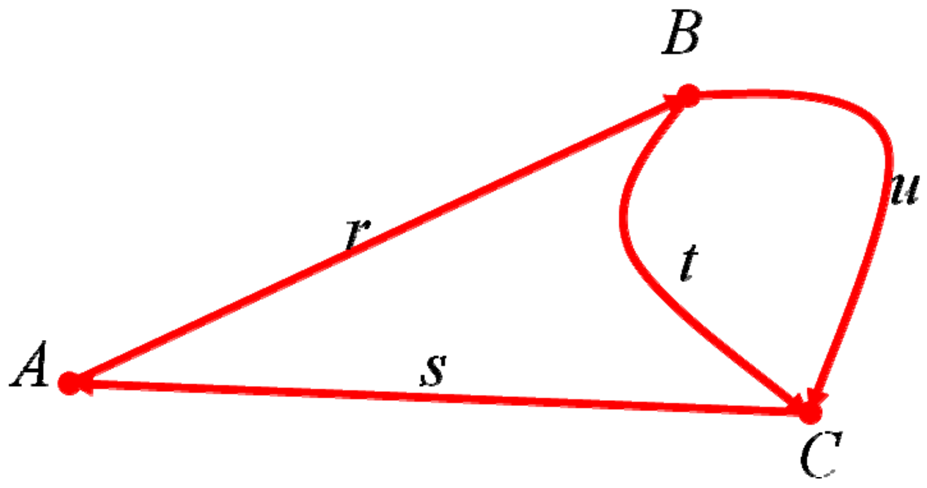
G_5

Не является полным графом



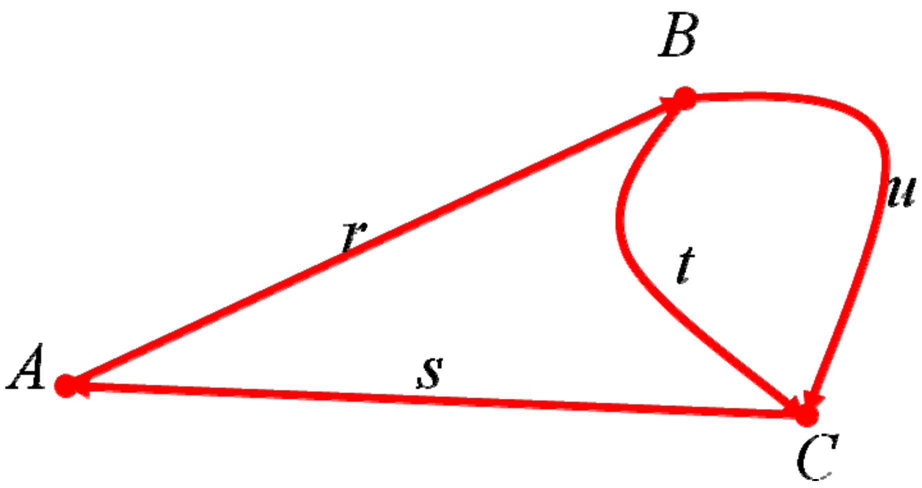
Дополнение графа G_5 **до полного графа** G_2

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ (ОРГРАФ)



СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА) ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

ПРИМЕР:



СТЕПЕНИ ВХОДА ВЕРШИН:

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

$$\deg_-(B) = 2$$

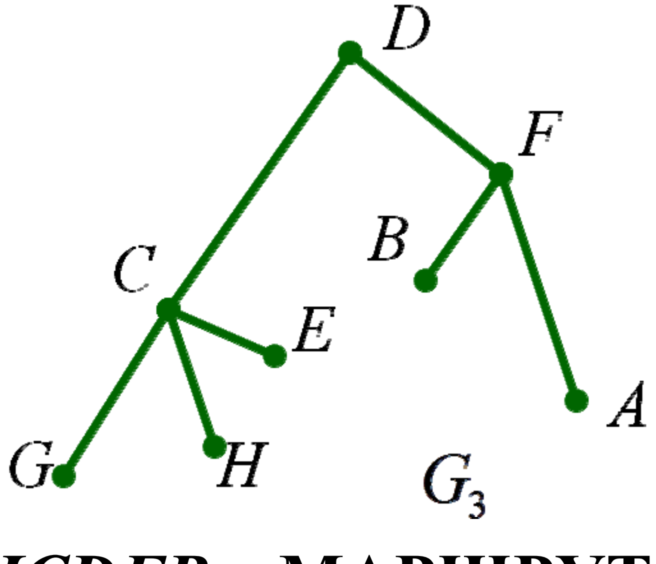
$$\deg_-(C) = 1$$

МАРШРУТЫ. ЦЕПИ. ПУТИ. ЦИКЛЫ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ ВТОРАЯ ВЕРШИНА ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С ПЕРВОЙ ВЕРШИНОЙ СЛЕДУЮЩЕГО, НАЗЫВАЕТСЯ МАРШРУТОМ.

ЧИСЛО РЕБЕР МАРШРУТА НАЗЫВАЕТСЯ ДЛИНОЙ МАРШРУТА.

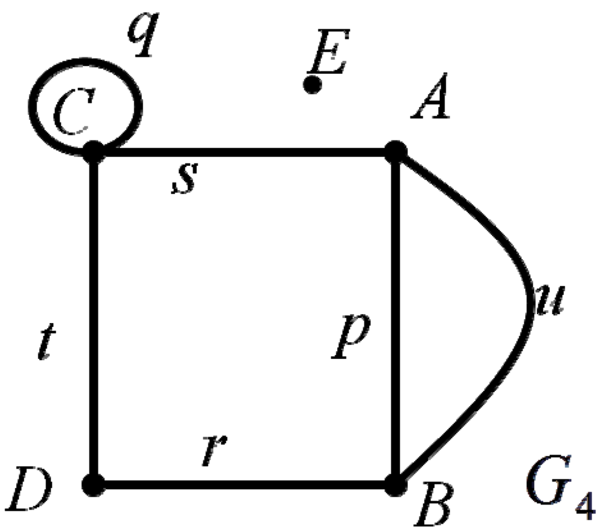
ПРИМЕР:



HCDFB **– МАРШРУТ ДЛИНОЙ 4.**

ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ ВЕРШИНА МАРШРУТА СОВПАДАЕТ С КОНЕЧНОЙ, ТО ТАКОЙ МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ ЗАМКНУТЫМ ИЛИ ЦИКЛОМ.

ПРИМЕР:



(t, s, p, r) – 4-цикл
(t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-цикл
петля (q) – 1-цикл

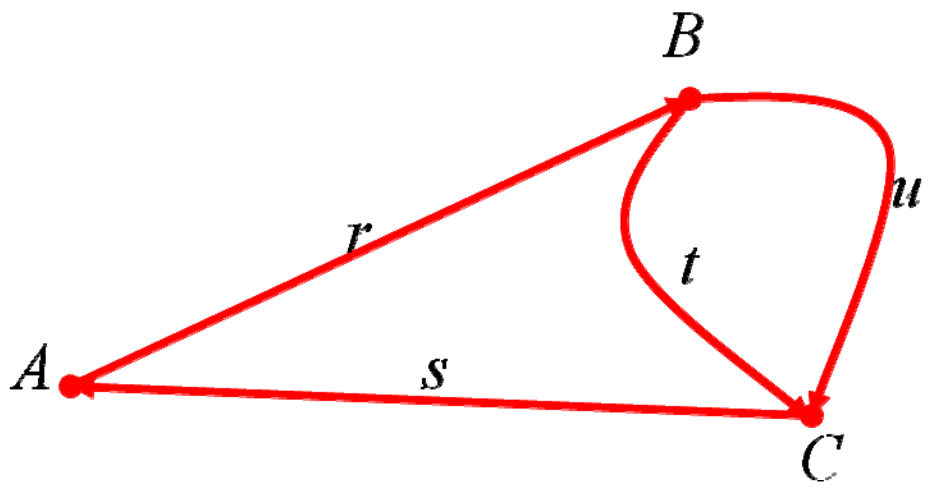
ЕСЛИ РЕБРО ВСТРЕТИЛОСЬ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ, ТО МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ ЦЕПЬЮ.

(t, s, p) – 3-цепь

ПУТЬ – УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ КОНЕЦ ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С НАЧАЛОМ СЛЕДУЮЩЕГО И ВСЕ РЕБРА ЕДИНСТВЕННЫ.

ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

ПРИМЕР:



(u, s, r, t) **– 4-путь**
(r, u) **– 2-путь**
(s, r, t) **и** ***(u, s, r)*** **– 3-циклы**

ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ ПРОСТЫМИ, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ СВЯЗНЫМ, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

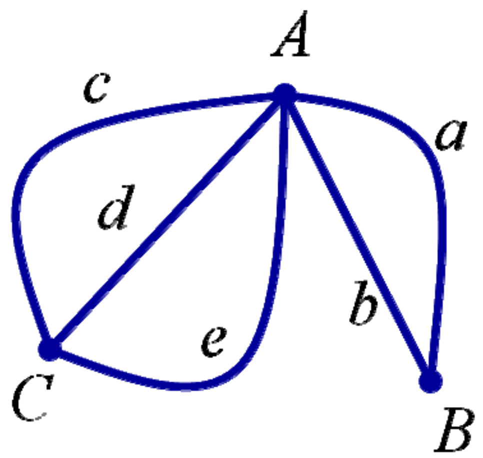
ТЕОРЕМА:

ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ, РАВНУЮ 2.

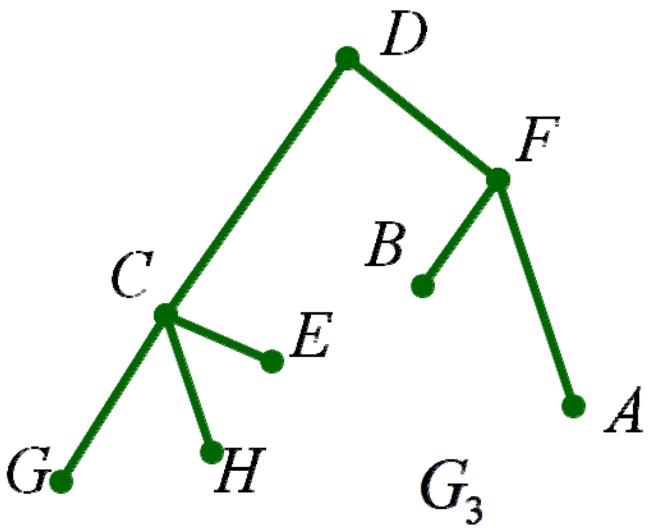
ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ <u>ПЛАНАРНЫМ (ПЛОСКИМ)</u>, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G' , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.

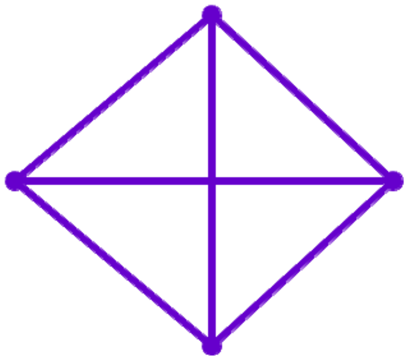
<u>ПРИМЕР:</u>

Планарные графы:

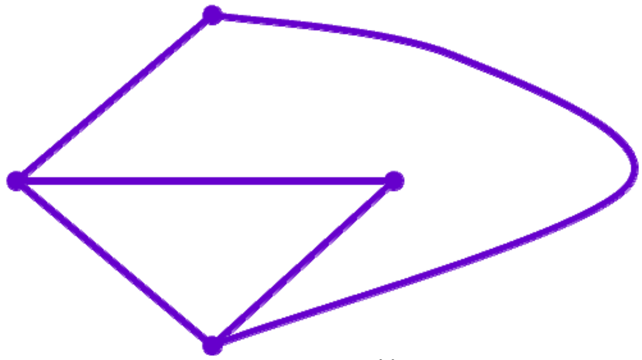


G_1





ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ



ИЗОБРАЖЕННЫЙ ИНАЧЕ

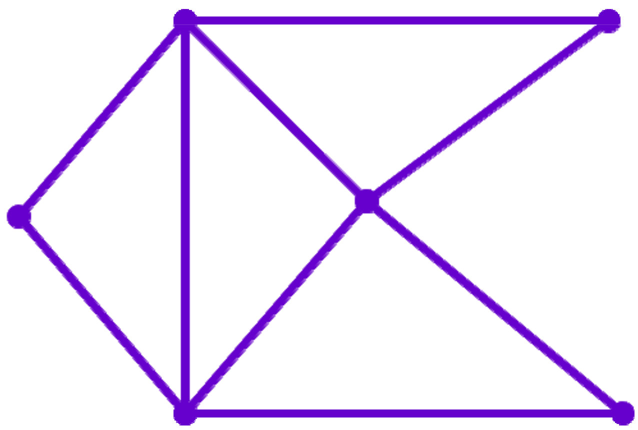
ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) **ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ (ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.**

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ.

ТЕОРЕМА:

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.

ПРИМЕР:



ЭЙЛЕРОВЫЙ ГРАФ

ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ (ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ ГАМИЛЬТОНОВЫМ.

МАТРИЦЫ ГРАФОВ

МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ **ГРАФА *G* НАЗЫВАЮТ МАТРИЦУ, СОСТОЯЩУЮ ИЗ *n* СТРОК (ВЕРШИНЫ) И *m* СТОЛБЦОВ (РЕБРА), В КОТОРОЙ:**

- **ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$\boxed{b_{ij} = 1}$

ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i **ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ** X_j

$\boxed{b_{ij} = 0}$

ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i **НЕ ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ** X_j

- **ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$\boxed{b_{ij} = 1}$

ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i **ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ** X_j

$\boxed{b_{ij} = 0}$

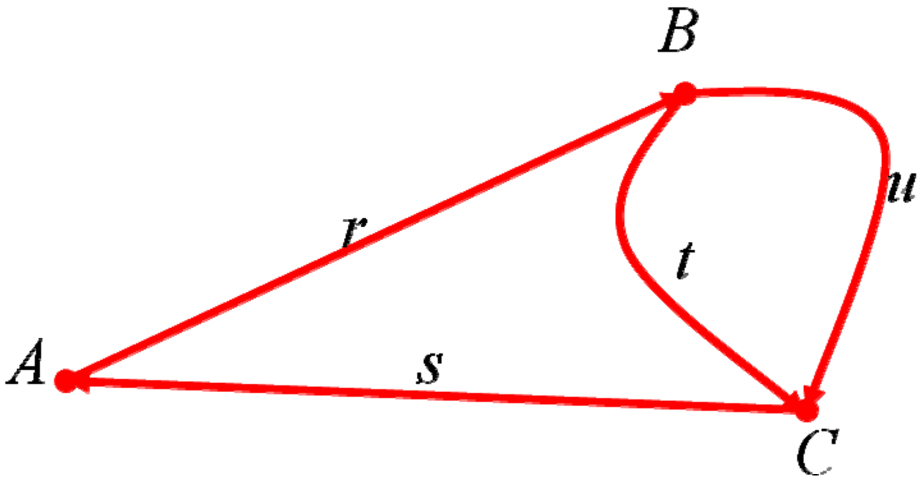
ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i **НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ** X_j

$\boxed{b_{ij} = -1}$

ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i **ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ** X_j

ПРИМЕР:

ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ



	r	*s*	*t*	*u*
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ГРАФА G НАЗЫВАЮТ МАТРИЦУ, СОСТОЯЩУЮ ИЗ n СТРОК (ВЕРШИНЫ) И n СТОЛБЦОВ, В КОТОРОЙ:

- **ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$$\boxed{b_{ij} = 1}$$

ЕСЛИ ВЕРШИНЫ V_i И V_j СОЕДИНЕНЫ РЕБРОМ

$$\boxed{b_{ij} = 0}$$

ЕСЛИ ВЕРШИНЫ V_i И V_j НЕ СОЕДИНЕНЫ РЕБРОМ

- **ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$\boxed{b_{ij} = 1}$

ЕСЛИ ИЗ ВЕРШИНЫ V_i **В ВЕРШИНУ** V_j **ВЫХОДИТ РЕБРО.**

$\boxed{b_{ij} = 0}$

ЕСЛИ ИЗ ВЕРШИНЫ V_i **В ВЕРШИНУ** V_j **НЕ ВЫХОДИТ РЕБРО.**

ПРИМЕР:

ИЗОРАЗИТЕ НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ ПО МАТРИЦЕ СМЕЖНОСТИ.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	0	0	0