Практическое занятие 3

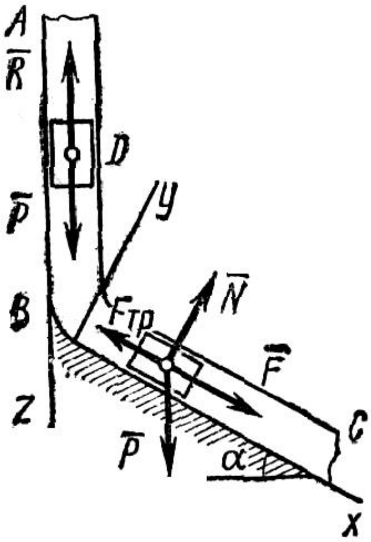

Рис. Д1

На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действует сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; движение от точки A, где $\upsilon_0=0$, до точки B длится t_1 с. На наклонном участке BC на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен f) и переменная сила $F=F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m=8кг, $R=\mu\upsilon^2$, где μ=0,2 кг/м, $\upsilon_0=0$, t_1=2с, f=0.2, $F_x=16\sin(4t)$, $\alpha=30^\circ$.

Определить: $x=f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P}=m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\upsilon_z}{dt}=\sum F_{kz} \text{ или } m\frac{d\upsilon_z}{dt}=P_z+R_z. \tag{1}$$

Далее находим $P_z=P=mg$, $R_z=-R=-\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\upsilon_z=\upsilon$, получим

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=mg-\mu\upsilon^2 \text{ или } \frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu}-\upsilon^2\right). \tag{2}$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2=\frac{mg}{\mu}=400 \qquad (n=20\text{ м/с}), \tag{3}$$

где при подсчете принято $g\approx 10$ м/с^2. Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{d\upsilon}{n^2-\upsilon^2}=\frac{\mu}{m}dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n}\ln\frac{n+\upsilon}{n-\upsilon}=\frac{\mu}{m}t+C_1. \tag{4}$$

По начальным условиям при $t=0$ $\upsilon=\upsilon_0=0$, что дает $C_1=(1/2n)\cdot\ln 1=0$. Введя еще одно обозначение

$$k=n\frac{\mu}{m}=0{,}5c^{-1}, \tag{5}$$

получим из (4)

$$\ln\frac{n+\upsilon}{n-\upsilon}=2kt \quad \text{и} \quad \frac{n+\upsilon}{n-\upsilon}=e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$\upsilon=n\frac{e^{2kt}-1}{e^{2kt}+1}. \tag{6}$$

Полагая здесь $t=t_1=2$ с и заменяя n и k их значениями (3) и (5), определим скорость υ_B груза в точке B (число e=2,7):

$$\upsilon_B = 20\frac{e^2-1}{e^2+1} = 15{,}2 \text{ м/с}. \quad (7)$$

2. Рассмотрим движение груза на участке *BC*; найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0 = \upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}, \overline{N}, \overline{F}_{TP}, \overline{F}$. Проведем из точки *B* оси *Bx* и *By* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Bx*:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = Px + Nx + F_{TPX} + F_X \text{ или}$$

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{TP} + F_x, \quad (8)$$

где $F_{TP}=fN$. Для определения *N* составим уравнение в проекции на ось *By*. Так как $a_y=0$, получим $0=N-mgcos\alpha$, откуда $N=mgcos\alpha$. Следовательно, $Fmp=fmgcos\alpha$; кроме того, $F_x=16sin(4t)$ и управление (8) примет вид

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \quad (9)$$

Разделив обе части равенства на *m*, вычислим
$g(sin\alpha - f\cos\alpha)=g(sin30^\circ-0{,}2cos30^\circ)=3{,}2$; $16/m=2$ и поставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3{,}2 + 2\sin(4t). \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3{,}2t - \frac{1}{2}\cos(4t) + C_2. \quad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B*, считая в этот момент $t=0$. Тогда при $t=0$ $\upsilon=\upsilon_0=\upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = \upsilon_B + 0{,}5\cos 0 = 15{,}2 + 0{,}5 = 15{,}7.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 0{,}5\cos(4t) + 15{,}7. \quad (12)$$

Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

$$x=1{,}6t^2-0.13sin(4t)+15{,}7t+C_3. \quad (13)$$

Так как при $t=0$ $x=0$, то $C_3=0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 15{,}7t - 0{,}13\,sin(4t), \quad (14)$$

где *x* – в метрах, *t* – в секундах.