Г. Н. БЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2016

ББК 22.161я73
Б 50

Берман Г. Н.

Б 50 Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 492 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0657-9

Настоящий сборник содержит систематически подобранные задачи и упражнения к основным разделам курса математического анализа.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих математический анализ в объеме программы для высших технических учебных заведений.

ББК 22.161я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К 22-му ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник задач предлагается студентам, изучающим математический анализ в объеме программы для высших учебных заведений. «Сборник» содержит систематически подобранные задачи и упражнения к основным разделам курса математического анализа.

Теоретические справки о необходимых формулах в задачнике не помещены; имеется в виду, что читатель найдет их в соответствующих разделах учебника. Большинство параграфов для удобства подразделено на части, причем группам задач с однородным содержанием предшествует общее указание. Перед задачами физического содержания даются нужные справки по физике. Для более трудных задач указания к решению даны в разделе «Ответы»; такие задачи отмечены звездочкой.

Первое издание сборника вышло в 1947 г. За прошедшие годы ряд разделов математического анализа, изучавшихся ранее в вузах, были включены в программу средней школы. Задачи, относящиеся к таким разделам, редакторы двадцать второго издания сочли возможным исключить. Нумерация задач, однако, для удобства использования осталась такой же, как и в семнадцатом издании (1977 г.).

Глава 1

ФУНКЦИЯ

§ 1.1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИИ

1.1.1. Функции и способы их задания

Пусть $X \subset \mathbf{R}$. Если каждому $x \in X$ соответствует единственное число $y \in \mathbf{R}$, мы говорим, что задана *функция* на множестве X и пишем $y = f(x)$. Множество точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$ называется *графиком* функции $f(x)$.

1. Сумма внутренних углов плоского выпуклого многоугольника является функцией числа его сторон. Задать аналитически эту функцию. Какие значения может принимать аргумент?

4. Функция задана графиком, изображенным на рис. 1.1. По графику ответить на следующие вопросы:

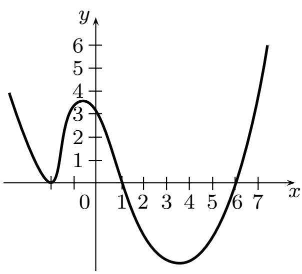

Рис. 1.1

1) При каких значениях независимой переменной функция обращается в нуль?
2) При каких значениях независимой переменной функция положительна?
3) При каких значениях независимой переменной функция отрицательна?

6. Записать функцию, выражающую зависимость радиуса r цилиндра от его высоты h при данном объеме $V = 1$. Вычислить значения r при следующих значениях h: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Построить график функции.

7. Выразить площадь равнобочной трапеции с основаниями a и b как функцию угла α при основании a. Построить график функции при $a = 2$, $b = 1$.

8. Выразить зависимость длины b одного катета прямоугольного треугольника от длины a другого при постоянной гипотенузе $c = 5$. Построить график этой функции.

9. Даны функции: 1) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; 2) $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$. Найти: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. Существует ли $f(-1)$; $\varphi(-1)$?

10. Дана функция: $f(u) = u^3 - 1$. Найти: $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Даны функции: $F(z) = 2^{z-2}$ и $\varphi(z) = 2^{|z|-2}$.

Найти: $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$ и $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1) + F(1)$.

12. Дана функция: $\psi(t) = ta^t$.

Найти: $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t) = t^3 + 1$. Найти $\varphi(t^2)$ и $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. Доказать, что $F(a) = F(-a)$.

15. $\Phi(z) = z^3 - 5z$. Доказать, что $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

16. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$. Доказать, что $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

17°. $f(x) = \sin x - \cos x$. Доказать, что $f(1) > 0$.

18. $\psi(x) = \lg x$. Доказать, что $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

19. $F(z) = a^z$.

1) Доказать, что при любом z справедливо соотношение $F(-z)F(z) - 1 = 0$.
2) Доказать, что $F(x)F(y) = F(x + y)$.

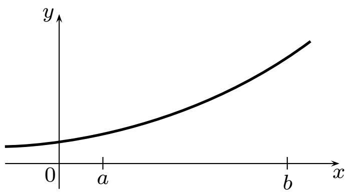

Рис. 1.2

20. Даны график функции $y = f(x)$ и значения a и b независимой переменной x (рис. 1.2). Построить на чертеже $f(a)$ и $f(b)$. Каков геометрический смысл отношения $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

21. Показать, что если любая хорда графика функции $y = f(x)$ лежит выше стягиваемой ею дуги, то для всех $x_1 \neq x_2$ имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

22. Дано: $f(x)=x^2-2x+3$. Найти все корни уравнения:
1) $f(x) = f(0)$;
2) $f(x) = f(-1)$.

23°. Дано: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Найти все корни уравнения $f(x) = f(-2)$.

25. Указать два корня уравнения $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, если известно, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[-5, 5]$. Найти все корни данного уравнения для случая, когда $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

26. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Найти все корни уравнения $F(x) = |\varphi(x)|$.

27°. $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Решить уравнение

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

28. Найти значения a и b в выражении функции $f(x) = ax^2 + bx + 5$, для которых справедливо тождество $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

29°. Пусть $f(x) = a\cos(bx+c)$. При каких значениях постоянных a, b и c выполняется тождество $f(x+1)-f(x) \equiv \sin x$.

1.1.2. Сложные и неявно заданные функции

Если $u = f(x)$, $y = g(u)$, то функция $y = g(f(x))$ называется *сложной функцией* или *суперпозицией* функций f и g.

33. Дано: $y = \sin x$; $\nu = \lg y$; $u = \sqrt{1 + \nu^2}$. Выразить u как функцию x.

34. Дано: $y = 1 + x$; $z = \cos y$; $v = \sqrt{1 - z^2}$. Выразить v как функцию x.

35. Следующие сложные функции представить с помощью цепочек, составленных из основных элементарных функций:
1) $y = \sin^3 x$;
2) $y = \sqrt[3]{(1 + x)^2}$;
3) $y = \lg \operatorname{tg} x$;
4) $y = \sin^3(2x + 1)$;
5)° $y = 5^{(3x+1)^2}$.

36. $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \sin 2x$. Найти:
1) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$;
2) $\varphi[f(1)]$;
3) $\varphi[f(2)]$;
4) $f[\varphi(x)]$;
5) $f[f(x)]$;
6) $f\{f[f(1)]\}$;
7) $\varphi[\varphi(x)]$.

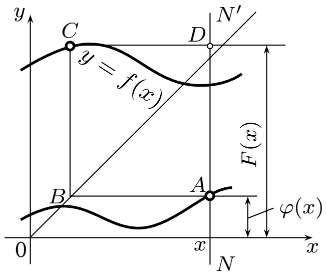

Рис. 1.3

37°. Доказать справедливость следующего способа построения графика сложной функции $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ по известным графикам составляющих функций: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Из точки A графика функции $\varphi(x)$ (рис. 1.3), соответствующей данному значению независимой переменной x, проводится прямая, параллельная оси Ox, до пересечения в точке B с биссектрисой первого и третьего координатных углов; из точки B проводится прямая, параллельная оси Oy, до пересечения с графиком функции $f(x)$ в точке C. Если из точки C провести прямую, параллельную оси Ox, то точка D ее пересечения с прямой NN' будет точкой графика функции $F(x)$, соответствующей взятому значению x.

38. Написать в явном виде функцию y, не явно заданную следующим уравнением:

1) $x^2 + y^2 = 1$;
2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
3) $x^3 + y^3 = a^3$;
4) $xy = C$;
5) $2^{xy} = 5$;
6) $\lg x + \lg(y+1) = 4$;
7) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$;
8) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$.

* **39.** Показать, что при $x > 0$ уравнение $y + |y| - x - |x| = 0$ определяет функцию, графиком которой является биссектриса первого координатного угла, а при $x \leqslant 0$ данному уравнению удовлетворяют координаты всех точек третьего координатного угла (включая и его граничные точки).

§ 1.2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1.2.1. Область определения функции

Если функция задана формулой, наибольшее множество, для всех элементов которого эта формула имеет смысл, называется *(естественной) областью определения* данной функции. Область определения функции f обозначается D_f. Множество значений функции обозначается E_f.

40. Составить таблицу значений функции целочисленного аргумента $y = \frac{1}{x!}$ для $1 \leqslant x \leqslant 6$.

41. Значение функции целочисленного аргумента $u = \varphi(n)$ равно количеству простых чисел, не превосходящих n. Составить таблицу значений u для $1 \leqslant n \leqslant 20$.

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \leqslant n \leqslant 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 1.4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

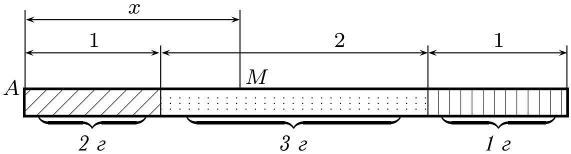

Рис. 1.4

44°. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре — полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47.

1) $y = 1 - \lg x$;
2) $y = \lg(x+3)$;
3) $y = \sqrt{5-2x}$;
4) $y = \sqrt{-px}$ $(p>0)$;
5) $y = \frac{1}{x^2-1}$;
6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
7) $y = \frac{1}{x^3-x}$;
8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$;
9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;
10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;
11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$;
12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;
13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$;
14) $y = \arcsin(x-2)$;
15) $y = \arccos(1-2x)$;
16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;
17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$;
18) $y = \sqrt{1-|x|}$;
19)° $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;
20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;
21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;
22) $y = \lg\sin x$;
23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$;
24) $y = \log_x 2$.

48.

1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$;
2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;
3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$;
4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;
5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$;
6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;
7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$;
8)° $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;
9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$;
10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;
11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$;
12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;
13) $y = (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$;
14) $y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$;
15) $y = \lg[1 - \lg(x^2-5x+16)]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;
3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$;
4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \leqslant x \leqslant 2$;
2) определенной только в интервале $-x < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;
3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2)° $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

1.2.2. Элементы поведения функции

Функция $y = f(x)$, определенная на симметричном относительно 0 множестве X, называется *четной*, если для любого $x \in X$ $f(-x) = f(x)$, *нечетной*, если для любого $x \in X$ $f(-x) = -f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое $T > 0$, что для любого $x \in D_f$ $x \pm T \in D_f$ и $f(x+T) = f(X)$. Число T называется *периодом* f.

52. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; указать область определения функции $f(x)$ и убедиться, что эта функция неотрицательна.

53. Найти интервалы знакопостоянства и корни функции:

1) $y = 3x - 6$;
2) $y = x^2 - 5x + 6$;
3) $y = 2^{x-1}$;
4) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$;
5) $y = |x|$.

54. Какие из указанных ниже функций четны, какие нечетны, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = x^4 - 2x^2$;
2) $y = x - x^2$;
3) $y = \cos x$;
4) $y = 2^x$;
5) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$;
6) $y = \sin x$;
7) $y = \sin x - \cos x$;
8) $y = 1 - x^2$;
9) $y = \operatorname{tg} x$;
10) $y = 2^{-x^2}$;
11) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$;
12) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$;
13) $y = \frac{x}{a^x - 1}$;
14) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$;
15)° $y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;
16) $y = 2^{x - x^4}$;
17) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$?

55. Каждую из следующих функций представить в виде суммы четной и нечетной функций:

1) $y = x^2 + 3x + 2$;
2) $y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$;
3) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$.

56. Доказать, что $f(x)+f(-x)$ — четная функция, а $f(x)-f(-x)$ — нечетная функция.

57. Представить в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

1) $y = a^x$;
2) $y = (1+x)^{100}$ (см. задачу 56).

58. Доказать, что произведение двух четных функций есть четная функция, произведение двух нечетных функций — четная функция, произведение четной и нечетной функции — нечетная функция.

59. Какие из нижеследующих функций будут периодическими:

1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \sin x^2$;
3) $y = x \cdot \cos x$;
4) $y = \sin \frac{1}{x}$;
5) $y = 1 + \operatorname{tg} x$;
6) $y = 5$;
7) $y = [x]$;
8) $y = x - [x]$?

(Функция $[x]$ определяется так: если x — целое число, то $[x] - x$. Если x не есть целое число, то $[x]$ равно наибольшему целому числу, меньшему x. Так, $[2] - 2$; $[3{,}25] = 3$; $[-1{,}37] = -2$.)

60. Построить график такой периодической функции с периодом $T = 1$, которая на полуинтервале $[0, 1)$ задана формулой:

1) $y = x$;
2) $y = x^2$.

61. Указать интервалы возрастания и убывания и интервалы постоянства функций:

1) $y = |x|$;
2) $y = |x| - x$.

62. Указать наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \cos x^3$;
3) $y = 1 - \sin x$;
4) $y = 2^{x^2}$.

64. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции:

1) $y = |f(x)|$;
2)° $y = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$;
3) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$.

§ 1.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Если для любых $x_1, x_2 \in D_f$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, функция называется *обратимой*. В этом случае можно определить *обратную функцию* f^{-1} на множестве E_f, эта функция сопоставляет $y \in E_f$ единственный $x \in D_f$: $y = f(x)$. Для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x, убедиться в единственности решения, а затем переобозначить переменные.

65. Дано, что при напряжении $E = 2{,}4$ В сила тока $I = 0{,}8$ А. Выразить аналитически, используя закон Ома, зависимость между силой тока и напряжением; построить график найденной функции.

66. В сосуд произвольной формы налита жидкость. На глубине $h = 25{,}3$ см давление этой жидкости $p = 1{,}84 \cdot 10^3$ Па.

1) Составить функцию, выражающую зависимость давления от глубины.
2) Определить давление на глубине $h = 14{,}5$ см.
3) На какой глубине давление станет равным $2{,}65 \cdot 10^3$ Па?

67. Тело движется прямолинейно под действием силы F. Исходя из закона Ньютона, написать функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением w, если известно, что если тело движется с ускорением 12 м/c^2, то на пути $s =$ $= 15$ м производится работа $A = 32$ Дж.

68. Определить линейную функцию $y = ax + b$ по следующим данным:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
–1,6	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

69. Некоторое количество газа занимало при 20°C объем 107 см^3, при 40°C объем стал равным 114 см^3.

1) Составить, исходя из закона Гей-Люссака, функцию, выражающую зависимость объема V газа от температуры t.
2) Каков будет объем при 0°C?

70. Равномерно движущаяся по прямой точка через 12 с после начала движения находилась на расстоянии +32,7 см от некоторой точки этой прямой; через 20 с после начала движения расстояние стало равным +43,4 см. Выразить расстояние s как функцию времени t.

71. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно (по линейному закону). В начале опыта напряжение было равно 12 В, а по окончании опыта, длившегося 8 с, напряжение упало до 6,4 В. Выразить напряжение V как функцию времени t и построить график этой функции.

72. Найти приращение линейной функции $y = 2x - 7$ при переходе независимой переменной x от значения $x_1 = 3$ к значению $x_2 = 6$.

73. Найти приращение линейной функции $y = -3 + 1$, соответствующее приращению независимой переменной $\Delta x = 2$.

74. Функция $y = 2{,}5x + 4$ получила приращение $\Delta y = 10$. Найти приращение аргумента.

75°. Даны функция $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ и начальное значение независимой переменной $x_1 = a - b$. При каком конечном значении x_2 независимой переменной x приращение $\Delta y = \frac{1}{a-b}$?

76. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = \frac{x}{2} + 2$ при $-\infty < x \leqslant 2$; $\varphi(x) = 5 - x$ при $2 \leqslant x < +\infty$. Найти корни уравнения $\varphi(x) = 2x - 4$ аналитически и графически.

77. Построить график функции:

1) $y = |x+1| + |x-1|$;
2) $y = |x+1| - |x-1|$;
3) $y = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$.

***78.** Для каких значений x справедливо неравенство

$$|f(x) + \varphi(x)| < |f(x)| + |\varphi(x)|,$$

если $f(x) = x - 3$, а $\varphi(x) = 4 - x$.

79. Для каких значений x справедливо неравенство $|f(x) - \varphi(x)| > |f(x)| - |\varphi(x)|$, если $f(x) = x$, а $\varphi(x) = x - 2$.

80. Функция $f(x)$ определена так: в каждом из интервалов $n \leqslant x < n + 1$, где n — целое положительное число, $f(x)$ меняется линейно, причем $f(n) = -1$, $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$. Построить график этой функции.

81. Построить график и указать интервалы возрастания и убывания данной функции:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$;
2) $y = x^2 - 1$;
3) $y = |x^2 - 1|$;
4) $y = 1 - x^2$;
5) $y = x^2 - x + 4$;
6) $y = x - x^2$;
7) $y = |x - x^2|$;
8) $y = 2x^2 + 3$;
9) $y = 2x^2 - 6x + 4$;
10) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
11) $y = |-3x^2 + 6x - 1|$;
12) $y = -x|x|$.

82°. Написать аналитическое выражение однозначной функции, определенной на полуинтервале $(-\infty, 6]$, если известно, что график ее состоит из точек оси Ox с абсциссами, меньшими числа -3, из точек параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $A(-3, 0)$, $B(0, 5)$, и из точек отрезка CD с концами $C(3, 0)$ и $D(6, 2)$.

83. Найти наибольшее значение функции:

1) $y = 2x^2 + x - 1$;
2) $y = -x^2 - 3x + 2$;
3) $y = 5 - x^2$;
4) $y = -2x^2 + ax - a^2$;
5) $y = a^2x - b^2x^2$.

84. Найти наименьшее значение функции:

1) $y = x^2 + 4x - 2$;
2) $y = 2x^2 - 1{,}5x + 0{,}6$;
3) $y = 1 - 3x + 6x^2$;
4) $y = a^2x^2 + a^4$;
5) $y = (ax + b)(ax - 2b)$.

85. Представить число a в виде суммы двух слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

86. Представить число a в виде суммы двух чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

87. Около каменной стенки нужно сделать деревянный забор, чтобы огородить прямоугольный участок земли. Общая длина забора равна 8 м. Какова должна быть длина части забора, параллельной стенке, для того, чтобы забор охватил наибольшую площадь?

88. В треугольнике сумма сторон, заключающих данный угол, равна 100 см. Чему должны быть равны эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

89. Какой из цилиндров с данным периметром осевого сечения $P = 100$ см. Чему должны быть равны эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

90. Какой из конусов, периметр осевого сечения которых равен P, имеет наибольшую боковую поверхность?

91°. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, на который поставлен конус (с тем же основанием). Угол при вершине конуса 60°. Периметр осевого сечения тела 100 см. Каков должен быть радиус цилиндра, для того чтобы боковая поверхность тела была наибольшей?

93. В данный прямой конус вписан цилиндр так, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. При каком отношении радиусов оснований цилиндра и конуса цилиндр будет иметь наибольшую боковую поверхность?

94. Дан прямой круговой конус, радиус основания которого равен R, а высота H. В конус вписан цилиндр так, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. Каким должен быть радиус цилиндра для того, чтобы полная поверхность цилиндра имела наибольшую величину? Рассмотреть случаи $H > 2R$ и $H \leqslant 2R$.

95°. Каков должен быть радиус круга для того чтобы сектор, периметр которого равен данному числу P, имел наибольшую площадь?

96. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна P. Каково должно быть основание a прямоугольника для того, чтобы окно имело наибольшую площадь?

97. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается полукругом. Каково должно быть основание прямоугольника для того, чтобы при периметре, равном 2 м, окно имело наибольшую площадь?

99. Из проволоки длиной 120 см нужно сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Какова должна быть сторона основания для того, чтобы полная поверхность параллелепипеда была наибольшей?

100. Кусок проволоки длиной a нужно разрезать на две части; из одной сделать квадрат, из другой — правильный треугольник. Как нужно разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных таким образом фигур была наименьшей?

101. Найти на прямой $y = x$ точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $(-a, 0)$, $(a, 0)$ и $(0, b)$ была бы наименьшей.

102°. Найти на прямой $y = x + 2$ точку, сумма квадратов расстояний которой до прямых $3x - 4y + 8 = 0$ и $3x - y - 1 = 0$ была бы наименьшей.

104. Построить параболу $y = x^2$ и использовать ее для графического решения следующих уравнений:

1)	$x^2 - x - 2{,}25 - 0;$	4)	$4x^2 - 12x + 9 = 0;$
2)	$2x^2 - 3x - 5 = 0;$	5)	$3x^2 - 8x + 7 = 0.$
3)	$3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0;$		

105. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ при $-\infty < x \leqslant \frac{11}{3}$; $\varphi(x) = 1 + x$ при $\frac{11}{3} \leqslant x < +\infty$. Найти аналитически и графически все действительные корни уравнения $[\varphi(x)]^2 = 7x + 25$.

106. Указать область определения функции

$$y = \lg(ax^2 + bx + c).$$

107°. Найти $f(x+1)$, если дано, что $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

***108.** Показать, что функция $f(x) = \frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ принимает любое действительное значение, если $0 < c \leqslant 1$.

109. Исходя из закона Бойля–Мариотта, найти функцию, выражающую зависимость объема газа от давления при $t = \mathrm{const}$, если известно, что при давлении 10^5 Па объем газа равен 2,3 л. Построить график этой функции.

110. Переменная x обратно пропорциональна y, y обратно пропорциональна z, z в свою очередь обратно пропорциональна v. В какой зависимости находятся x и v?

111. Переменная x обратно пропорциональна y, y прямо пропорциональна z, z прямо пропорциональна u, u обратно пропорциональна v. В какой зависимости находятся x и v?

112°. При электролизе количество выделяющегося на электроде вещества пропорционально силе тока, сила тока пропорциональна проводимости электролита, проводимость пропорциональна концентрации электролита, концентрация при данном количестве вещества обратно пропорциональна объему растворителя. Как количество выделяющегося на электроде вещества зависит от объема растворителя?

113. Построить график дробно-линейной функции:

1)	$y = \frac{x-1}{x-2};$	3)	$y = \frac{2x-5}{3x-7{,}5};$	5)	$y = \frac{4-3x}{3-2{,}25x}.$
2)	$y = \frac{2x}{3-x};$	4)	$y = \frac{x}{1-\frac{1}{2}x};$		

114. Найти по графику наибольшее и наименьшее значения дробно-линейной функции на данном отрезке:

1) $y = \frac{4}{x}$ $[1, 5]$;
2) $y = \frac{x}{2x-5}$ $[-1, 2]$;
3) $y = \frac{1-x}{1+x}$ $[0, 4]$.

116. С помощью графического сложения построить график функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

117. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = x$;
2) $y = 2x$;
3) $y = 1 - 3x$;
4) $y = x^2 + 1$;
5) $y = \frac{1}{x}$;
6) $y = \frac{1}{1-x}$;
7) $y = x^2 - 2x$;
8) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$;
9) $y = 10^{x+1}$;
10) $y = 1 + \lg(x + 2)$;
11) $y = \log_x 2$;
12) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$;
13)° $y = \frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}} + 1$;
14) $y = 2\sin 3x$;
15) $y = 1 + 2\sin\frac{x-1}{x+1}$;
16) $y = 4\arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

118. Доказать, что функция, обратная к дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (считаем, что $ad - bc \neq 0$), также дробно-линейная.

119. При каком условии дробно-линейная функция задачи 118 совпадает со своей обратной?

120. Показать, что если $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$, $x > 0$, то $f[f(x)] = x$. Найти функцию, обратную $f(x)$.

121. Какова особенность графика функции, тождественной со своей обратной?

122.° Функция y от x задана уравнением $y^2 - 1 + \log_2(x - 1) = 0$. Найти область определения данной функции и записать функцию, обратную данной.

123. Функция y от x задана уравнением $y^2 + \sin^3 x - y + 2 = 0$. Найти функцию, обратную данной.

124. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{3}x^3$;
2) $y = -\frac{1}{2}x^3$;
3) $y = x^3 + 3x^2$;
4) $y = x^3 - x + 1$;
5) $y = -x^3 + 2x - 2$;
6) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$;
7) $y = \frac{1}{2}x^{\frac{5}{4}}$;
8) $y = x^{0,3}$;
9) $y = x^{2,1}$;
10) $y = x^{0,62}$;

11) $y = \frac{1}{2}x^{-0,2}$;
12) $y = 5x^{-2,5}$;
13) $y = 1 - \sqrt{|x|}$.

125. Графически найти приближенные значения действительных корней уравнения $x + 3 = 4\sqrt[3]{x^2}$.

***126.** Начертить кубическую параболу $y = x^3$ и использовать ее для графического решения уравнения:

1) $x^3 + x - 4 = 0$;
2) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$;
3) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;
4) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$.

127. По данному условию составить уравнение и решить его графически.

1) Квадрат какого числа равен самому числу, сложенному с его обратной величиной?
2)° Деревянный шар с радиусом, равным 10 см, и плотностью, равной 0,8 г/см^2, плавает на поверхности воды. Найти высоту сегмента, погруженного в воду.
3) Общая масса деревянного куба и пирамиды с квадратным основанием равна 0,8 кг. Ребро куба равно стороне основания пирамиды, высота пирамиды 45 см. Найти ребро куба. Плотность дерева 0,8 г/см^2.

128. Дана функция $y = x^n$, $x > 0$. При каких значениях x эта функция имеет значения, бо́льшие значений обратной функции, и при каких — меньшие?

129. Построить график функции:

1) $y = -2^x$;
2) $y = 2^{x+3}$;
3) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$;
4) $y = 1 - 3^{x-3}$;
5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;
6) $y = 2^{-x^2}$.

130. Используя график функции $y = 2^x$, построить без дальнейших вычислений график функции:

1) $y = 2^{x-1}$;
2) $y = \frac{1}{12} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$;
3) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} + 1$.

131°. Показать, что графиком функции $y = k \cdot a^x$ $(k > 0)$ является та же линия, что и для функции $y = a^x$, только сдвинутая параллельно оси абсцисс.

132. С помощью графического сложения построить график функции:

1) $y = x^2 + 2^x$;
2) $y = x^2 - 2^x$.

133. Графически решить уравнение $2^x - 2x = 0$.

134. Построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2^x$, $y = \frac{1+x}{x}$ и $x = 3$. По графику найти приближенно координаты точек пересечения данных линий.

135. Найти наибольшее возможное значение n, при котором $2^x > x^n$ для всех $x \geqslant 100$ (n — целое).

136. Доказать, что $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{th} x$ — нечетные функции, а $y = \operatorname{ch} x$ — четная функция. Являются ли эти функции периодическими?

137. Доказать справедливость следующих равенств:

1)° $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;
2) $\operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;
3) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$;
4) $\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha$;
5) $\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$;
6) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
7) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

138. Построить график функции:

1) $y = -\log_2 x$;
2) $y = \lg \frac{10}{x}$;
3) $y = |\lg x|$;
4) $y = \log_2 |x|$;
5) $y = 1 + \lg(x + 2)$;
6) $y = \log_2 |1 - x|$;
7) $y = a^{\log_a x}$;
8) $y = \log_x 2$.

139. Используя график функции $y = \lg x$, построить график функции:

1) $y = \frac{1}{2} \lg(x + 1)$;
2) $y = 2 \lg \left(\frac{x+1}{2}\right)$.

140. Дана функция $y = x + \lg \frac{1}{x}$. С помощью графического сложения построить график данной функции и по графику найти наименьшее значение этой функции в полуинтервале $(0, 2]$.

141.° Показать, что график функции $y = \log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ симметричен относительно начала координат. Найти обратную функцию.

142. Доказать, что ордината графика функции $y = \log_a x$ равна соответствующей ординате графика функции $y = \log_{a^n} x$, умноженной на n.

143. Указать амплитуду и период гармоники:

1) $y = 2 \sin(3x + 5)$;
2) $y = -\cos \frac{x-1}{2}$;
3) $y = \frac{1}{3} \sin 2\pi \left(\omega - \frac{1}{6}\right)$;
4) $y = \sin \frac{2t+3}{6\pi}$.

144. Построить график функции:

1) $y = -\sin x$;
2) $y = 1 - \sin x$;
3) $y = 1 - \cos x$;
4) $y = \sin 2x$;
5) $y = \sin \frac{x}{2}$;
6) $y = -2\sin \frac{x}{3}$;
7) $y = \cos 2x$;
8) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
9) $y = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$;
10) $y = \frac{1}{2}\sin(2\pi x - 1{,}2)$;
11) $y = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;
12) $y = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$;
13) $y = |\sin x|$;
14) $y = |\cos x|$;
15) $y = |\operatorname{tg} x|$;
16) $y = |\operatorname{ctg} x|$;
17) $y = \sec x$;
18) $y = \operatorname{cosec} x$;

$$19)\quad y = \begin{cases} \cos x & \text{для } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{для } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{для } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}.$$

146. Стороны треугольника равны 1 см и 2 см. Построить график площади треугольника как функции угла x, заключенного между данными сторонами. Найти область определения этой функции и то значение аргумента x, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

147°. Точка движется равномерно по окружности радиуса R с центром в начале координат против часовой стрелки с линейной скоростью v см/с. В начальный момент времени абсцисса этой точки была a. Составить уравнение гармонического колебания абсциссы точки.

148. Точка равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = 1$. В момент t_0 ее ордината была y_0, в момент t_1 ордината равнялась y_1. Найти зависимость ординаты точки от времени, период и начальную фазу колебания.

150. С помощью графического сложения построить график функции:

1) $y = \sin x + \cos x$;
2) $y = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x$;
3) $y = 2\sin\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{3}$;
4) $y = x + \sin x$;
5) $y = x - \sin x$;
6) $y = -2^x + \cos x$.

151. Графически решить уравнение:

1) $x = 2\sin x$;
2) $x = \operatorname{tg} x$;
3) $x - \cos x = 0$;
4) $4\sin x = 4 - x$;
5) $2^{-x} = \cos x$.

152. Найти период сложной гармоники:

1)° $y = 2\sin 3x + 3\sin 2x$;

2) $y = \sin t + \cos 2t$;

3) $y = \sin\frac{\pi t}{3} + \sin\frac{\pi t}{4}$;

4) $y = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin 5\pi t$.

153. Представить одной простой гармоникой:

1) $y = \sin x + \cos x$;

2) $y = \sin x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

* **155.** Указать период функции и построить ее график:

1) $y = |\sin x| + |\cos x|$;

2) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x} + \frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$.

156. Найти область определения и выяснить вид графика функции:

1) $y = \lg\sin x$;

2) $y = \sqrt{\lg\sin x}$;

3) $y = \sqrt{\lg\frac{1}{|\sin x|}}$.

157. Построить график функции

1) $y = \operatorname{arcctg} x$;

2) $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$;

3) $y = 1 + \operatorname{arctg} 2x$;

4) $y = \frac{\pi}{2} - \arccos 2x$;

5) $y = \arcsin\frac{1-x}{x}$.

158. Круговой сектор с центральным углом α свертывается в конус. Найти зависимость угла ω при вершине конуса от угла α и построить график.

159.° Картина высотой a висит на стене наклонно, образуя со стеной двугранный угол φ. Нижний край картины на b выше уровня глаз наблюдателя, который стоит на расстоянии l от стены. Найти зависимость между углом γ, под которым наблюдатель видит картину, и углом φ.

161. Выяснить, для какого интервала изменения x справедливо тождество:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

3)° $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$;

4) $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$;

5) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$;

6) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi$;

7) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$;

8) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = -2\operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$;
10) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

162. Пользуясь тождествами задачи 161, найти область определения и построить график функции?
1) $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$;
2) $y = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x}$;
3) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
4) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

***163.** Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$. Доказать, что эта функция периодична и найти ее период.

164. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

165. Построить график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

166. Построить график функции:
1) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;
2) $y = x - \arcsin(\sin x)$;
3) $y = x \arcsin(\sin x)$;
4) $y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x)$.

Глава 2

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1.1. Функции целочисленного аргумента

Функция целочисленного аргумента называется *последовательностью*. Число A называется *пределом последовательности* a_n ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$) если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что при $n > N$ $|a_n - A| < \varepsilon$.

176. Функция целочисленного аргумента принимает значения

$$u_1 = 0{,}9;\quad u_2 = 0{,}99;\quad u_3 = 0{,}999;\quad \ldots;$$
$$\ldots;\quad u_n = \underbrace{0{,}999\ldots 9}_{n \text{ раз}};\quad \ldots$$

Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? Каково должно быть n, для того чтобы абсолютная величина разности между u_n и ее пределом была не больше 0,0001?

177°. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = 1;\quad u_2 = \frac{1}{4};\quad u_3 = \frac{1}{9};\quad \ldots;\quad u_n = \frac{1}{n^2};\quad \ldots$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Каково должно быть n, для того чтобы разность между u_n и ее пределом была меньше заданного положительного числа ε?

178. Доказать, что $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ стремится к 1 при неограниченном возрастании n. Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и 1 не превосходит 10^{-4}?

179. Функция v_n принимает значения

$$v_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1};\ v_2 = \frac{\cos\pi}{2};\ v_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3};\ \ldots;\ v_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n};\ \ldots$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Каково должно быть n, для того чтобы абсолютная величина разности между v_n и ее пределом не превосходила 0,001? Принимает ли v_n значение своего предела?

180. Общий член u_n последовательности $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{7}{8}$, $u_4 = \frac{17}{16}$, ... имеет вид $\frac{2^n-1}{2^n}$, если n — нечетное число, и $\frac{2^n+1}{2^n}$, если n — четное число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Каково должно быть n, для того чтобы разность между u_n и ее пределом по абсолютной величине не превосходила 10^{-4}; данного положительного числа ε?

181. Доказать, что последовательность $u_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу, равному $\frac{4}{3}$ монотонно возрастая. Начиная с какого n величина $\frac{4}{3} - u_n$ не превосходит данного положительного числа ε?

182. Доказать, что $u_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ при неограниченном возрастании n имеет предел 1. Начиная с какого n величина $|1 - u_n|$ не превосходит данного положительного числа ε? Какой характер имеет предельное изменение переменной u_n?

183°. Функция v_n принимает значения биномиальных коэффициентов: $v_1 = m$, $v_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $v_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$, $v_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}, \ldots$, где m — целое положительное число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

184. Доказать, что последовательность $u_n = 1 + (-1)^n$ не имеет предела при неограниченном возрастании n.

185°. Доказать, что при неограниченном возрастании n последовательность $u_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ не имеет предела, а последовательность $v_n = \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$ имеет предел. Чему он равен?

186. Имеет ли предел последовательность:

1) $u_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$;

2) $u_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\lg n}$ $(n > 1)$?

187. Доказать теорему: если последовательности u_1, u_2, ..., u_n, ... и v_1, v_2, ..., v_n, ... стремятся к общему пределу a, то к тому же пределу стремится и последовательность u_1, v_2, u_2, v_2, ..., u_n, v_n, ...

188°. Доказать теорему: если последовательность u_1, u_2, ..., u_n, ... стремится к пределу a, то к тому же пределу стремится любая ее бесконечная подпоследовательность (например, u_1, u_3, u_5, ...).

189. Последовательность $u_1, u_2, ,\ldots, u_n, \ldots$ имеет предел $a \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Что можно сказать об этом пределе, если $a = 0$? (Привести примеры.)

2.1.2. Функции непрерывного аргумента

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$ ($\lim\limits_{x\to a} = A$), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное δ, что при $0 < |x-a| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$.

190. Дано $y = x^2$. Когда $x \to 2$, то $y \to 4$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $|y-4| < \varepsilon = 0{,}001$?

191°. Пусть $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. При $x \to 2$ имеем $y \to \frac{3}{5}$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $|y - \frac{3}{5}| < 0{,}1$?

192. Пусть $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$, При $x \to 3$ имеем $y \to \frac{1}{4}$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-3| < \delta$ следовало $|\frac{1}{4} - y| < 0{,}01$?

193°. Доказать, что $\sin x$ стремится к единице при $x \to \frac{\pi}{2}$. Каким условиям должен удовлетворять x в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$, чтобы имело место неравенство $1 - \sin x < 0{,}01$?

194. При неограниченном возрастании x функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Каково должно быть N, чтобы из $|x| > N$ следовало $y < \varepsilon$?

195°. Если $x \to +\infty$, то $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Каково должно быть N, чтобы из $|x| > N$ следовало $|y-1| < \varepsilon$?

§ 2.2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА

2.2.1. Бесконечные величины

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$) если $\forall \mathrm{E} > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < a \Rightarrow |f(x)| > \mathrm{E}$. Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 : \forall x \in D_f$ $|f(x)| \leqslant M$. Бесконечно большая функция неограничена, обратное верно не всегда. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

196. Функция u_n принимает значения $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7, \ldots, u_n = 2n+1, \ldots$ Доказать, что u_n — бесконечно большая величина при $n \to \infty$. Начиная с какого n величина u_n становится больше N?

197. Доказать, что общий член u_n любой арифметической прогрессии есть величина бесконечно большая при $n \to \infty$. (Когда она будет положительной и когда отрицательной?) Справедливо ли это утверждение для произвольной геометрической прогрессии?

198°. При $x \to 0$ имеем $y = \frac{1+2x}{x} \to \infty$. Каким условиям должен удовлетворять x, чтобы имело место неравенство $|y| > 10^4$?

199. Доказать, что функция $y = \frac{x}{x-3}$ бесконечно велика при $x \to 3$. Каким должен быть x, чтобы величина $|y|$ была больше 1000?

200. Когда x стремится к 1, функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ неограниченно возрастает. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-1| < \delta$ следовало $\frac{1}{(x-1)^2} > N = 10^4$?

201. Функция $y = \frac{1}{2^x-1}$ бесконечно велика при $x \to 0$. Каким неравенствам должен удовлетворять x, чтобы $|y|$ было больше 100?

202. При $x \to +\infty$ имеем: $y = \lg x \to +\infty$. Каково должно быть M, чтобы из $x > M$ следовало $y > N = 100$?

203. Какие из основных элементарных функций являются ограниченными во всей области их определения?

204. Доказать, что функция $y = \frac{x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси.

205°. Будет ли функция $y = \frac{x^2}{1+x^5}$ ограничена на всей числовой оси? Будет ли она ограничена в интервале $(0, +\infty)$?

206. Является ли функция $y = \lg \sin x$ ограниченной во всей области ее существования? Тот же вопрос относительно функции $y = \lg \cos x$?

207.

1) Доказать, что функции $y = x \sin x$ и $y = x \cos x$ не ограничены при $x \to \infty$ (указать для каждой из них хотя бы по одной такой последовательности x_n, для которой $y_n \to \infty$).
2) Будут ли указанные функции бесконечно большими?
3) Построить графики этих функций.

208. Построить графики функций $f(x) = 2^{x \sin x}$ и $f(x) = 2^{-x \sin x}$. Для каждой из этих функций указать такие две последовательности x_n и x'_n значений x, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} (x'_n) = 0$.

209. При каких значениях a функция $y = a^x \sin x$ будет не ограничена при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$?

210. Будет ли бесконечно большой неограниченная функция:

1)° $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ при $x \to 0$;
2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ при $x \to \infty$;
3) $f(x) = 2^x \arcsin(\sin x)$ при $x \to +\infty$;
4) $f(x) = (2 + \sin x) \lg x$ при $x \to +\infty$;
5) $f(x) = (1 + \sin x) \lg x$ при $x \to +\infty$?

211. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{3}{4}, \quad u_3 = \frac{4}{9}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad \ldots$$

Доказать, что u_n — бесконечно малая величина при $n \to \infty$.

212. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = -7, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{27}, \quad u_4 = \frac{1}{8}, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad u_n = \frac{n^2 - 8}{n^3}, \quad \ldots$$

Доказать, что u_n — бесконечно малая величина при $n \to \infty$.

213. Доказать, что $y = \frac{x}{x+1} \to 0$ при $x \to 0$. Каким условиям должен удовлетворять x, чтобы имело место неравенство $|y| < 10^{-4}$?

214°. Показать, что при $x \to +\infty$ функция $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ стремится к нулю. Каким должно быть N, чтобы при $x > N$ было $y < \varepsilon$?

215. Доказать, что если предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ равен a, то $f(x)$ можно представить в виде суммы $f(x) = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to \infty$.

Представить в виде такой суммы следующие функции:

$$1)\ y = \frac{x^3}{x^3 - 1}; \qquad 2)\ y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}; \qquad 3)\ y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

2.2.2. Признаки существования предела

****216.** Функция u_n принимает значения

$$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \quad \ldots,$$
$$u_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}, \quad \ldots$$

Доказать, что u_n стремится к некоторому пределу при $n \to \infty$.

217°. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}, \quad u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}, \quad \ldots$$

Доказать, что u_n стремится к некоторому пределу при $n \to \infty$.

218°. Доказать теорему:

Если разность между двумя функциями при одном и том же изменении независимой переменной бесконечно мала, причем одна из функций возрастает, другая убывает, то обе стремятся к одному и тому же пределу.

219. Даны два числа u_0 и v_0 $(u_0 < v_0)$. Члены последовательностей u_n и v_n задаются формулами

$$u_1 = \frac{u_0+v_0}{2}, \; v_1 = \frac{u_0+2v_0}{3}, \; u_2 = \frac{u_1+v_1}{2}, \; v_2 = \frac{u_1+2v_1}{3},$$

вообще $u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$, $v_n = \frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}$.

Доказать на основе теоремы, приведенной в предыдущей задаче, что обе последовательности u_n и v_n стремятся к одному и тому же пределу, заключенному между u_0 и v_0.

220°. Дана последовательность чисел u_n:

$$u_1 = \sqrt{6}, \quad u_2 = \sqrt{6+u_1}, \quad \ldots, \quad u_n = \sqrt{6+u_{n-1}}, \quad \ldots$$

Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

§ 2.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*. Точка разрыва *первого рода*, если односторонние пределы слева и справа существуют и конечны, в остальных случаях точка разрыва *второго рода.* Теорема о промежуточном значении: *если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она принимает на $[a, b]$ все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.*

221. Функция y определена следующим образом:

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{при } x < 0; \\ y = x & \text{при } 0 \leqslant x < 1; \\ y = -x^2 + 4x - 2 & \text{при } 1 \leqslant x < 3; \\ y = 4 - x & \text{при } x \geqslant 3. \end{array}$$

Будет ли эта функция непрерывной?

222. Три цилиндра, радиусы оснований которых соответственно равны 3, 2 и 1 м, а высоты одинаковы и равны 5 м, поставлены друг на друга. Выразить площадь поперечного сечения получившегося тела как функцию расстояния сечения от нижнего основания нижнего цилиндра. Будет ли эта функция непрерывной? Построить ее график.

223. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 3 - ax^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной? (Построить ее график.)

224°. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{если } x \leqslant -\pi/2, \\ A\sin x + B, & \text{если } -\pi/2 < x << \pi/2, \\ \cos x, & \text{если} x \geqslant \pi/2. \end{cases}$$

Подобрать числа A и B так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; построить ее график.

225. В каких точках терпят разрывы функции $y = \frac{1}{x-2}$ и $y = \frac{1}{(x+2)^2}$? Построить графики обеих функций. Выяснить разницу в поведении этих функций вблизи точек разрыва.

226. Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ не определена при $x = 1$. Каким должно быть значение $f(1)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной при $x = 1$?

227. Какого рода разрывы имеют функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и $y = \frac{\cos x}{x}$ при $x = 0$? Указать характер графиков этих функций в окрестностях точки $x = 0$.

228. Исследовать непрерывность функции, заданной так: $y = \frac{|x|}{x}$ при $x \neq 0$, $y = 0$ при $x = 0$. Построить график этой функции.

229°. Сколько точек разрыва (и какого рода) имеет функция $y = \frac{1}{\lg|x|}$? Построить ее график.

230. Функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Можно ли так доопределить функцию $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы функция стала непрерывной в этой точке? Построить график этой функции.

231. Исследовать непрерывность функции, определенной так:

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{2x} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

Построить график этой функции.

232. Построить график функции $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$. Какое значение должно иметь $f(0)$, чтобы функция $f(x)$ была везде непрерывной?

233°. Доказать, что функция $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Построить схематично график этой функции в окрестности точки $x = 0$.

234. Исследовать характер разрыва функции $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ в точке $x = 1$. Можно ли так определить y при $x = 1$, чтобы функция стала непрерывной при $x = 1$?

235. Исследовать характер разрыва функции $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ в точке $x = 0$.

236°. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = (x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} \quad \text{при} \quad x \neq 0 \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

Доказать, что в интервале $-2 \leqslant x \leqslant 2$ функция $f(x)$ принимает все без исключения значения, содержащиеся между $f(-2)$ и $f(2)$, и что она все же разрывна (в какой точке?). Построить ее график.

237. Исследовать непрерывность функции $y = \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. Выяснить характер ее графика.

238. Функция определена так: если x — рациональное число, то $f(x) = 0$; если x — иррациональное число, то $f(x) = x$. При каком значении x эта функция непрерывна?

239. Исследовать непрерывность и построить график функции:

$$1)\ y = x - [x]; \qquad 2)\ y = \frac{1}{x-|x|}4; \qquad 3)\ y = (-1)^{[x]}.$$

[Функция $[x]$ равна наибольшему целому числу, не превосходящему x (см. задачу 59.]

240. Используя свойства непрерывных функций, убедиться в том, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет по меньшей мере один корень, заключенный между 1 и 2.

***241.** Показать, что: 1) многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень; 2) многочлен четной степени имеет по меньшей мере два действительных корня, если он принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту при его старшем члене.

242. Показать, что уравнение $x \cdot 2^x = 1$ имеет по меньшей мере один положительный корень, не превосходящий 1.

243°. Показать, что уравнение $x = a\sin x + b$, где $a > 0$, $b > 0$, имеет по меньшей мере один положительный корень и притом не превосходящий $b + a$.

***244.** Показать, что уравнение $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ и $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, имеет два действительных корня, заключенных в интервалах (λ_1, λ_2) и (λ_2, λ_3).

§ 2.4. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

2.4.1. Функции целочисленного аргумента

При нахождении предела отношения двух многочленов при $n \to \infty$ полезно разделить числитель и знаменатель на n^k, где k — наибольшая из степеней двух многочленов. Часто этот прием можно применять и для иррациональных выражений.

В задачах 245–267 найти пределы.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$.

247°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$.

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

257°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262°. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

***264.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

2.4.2. Функция непрерывного аргумента

При нахождении предела отношения двух многочленов

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ при } P(a)=Q(a)=0$$

дробь нужно один или несколько раз сократить на $x-a$. При вычислении предела иррациональных выражений бывает полезно избавиться от иррациональности в числителе или знаменателе путем умножения на сопряженное выражение. Используются также «замечательные» пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

В задачах 268–304 найти пределы.

268. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

270. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

271°. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273°. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}4$.

274. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

275. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

276. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

277. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

278. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$.

279. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280°. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — целые числа).

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3 3}{1+x^2+3x^3}$.

285°. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

286. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291°. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295°. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim h\to 0\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n и m — целые числа).

* **303.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305°. Как изменяются корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда b и c сохраняют постоянные значения $(b\neq0)$, а величина a стремится к нулю?

В задачах 306–378 найти пределы.

306. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.*

309°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

---

*В примерах, где указано $x\to\pm\infty$, следует отдельно рассматривать случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right).$

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}).$

312. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$

313. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}).$

314. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}.$

315. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}.$

316°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}.$

317. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}.$

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$ (n и m — целые положительные числа.)

319. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}.$

320. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}.$

321°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$

322. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}.$

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}.$

324. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}.$

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}.$

327. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$

328. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}.$

329°. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}.$

330. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\cos 2x}.$

331. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x.$

332. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\frac{\sin\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}.$

333. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}.$

334. $\lim\limits_{y\to a}\left(\sin\frac{y-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}\right).$

335. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}.$

336°. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}.$

337. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to\beta} \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343°. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg}a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348°. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}3x}-\sqrt{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}2x}}$.

* **350.** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

351°. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$.

355°. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$.

* **372.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{th} x$.

В задачах 379–401 найти пределы.

379. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^n}{x^2+A}$. Отдельно рассмотреть случаи, когда n есть:

1) целое положительное число;
2) целое отрицательное число;
3) нуль.

380°. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385°. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

387°. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)$.

389°. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

***390.** $\lim\limits_{h\to \infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

392°. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

***393.** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$.

***395.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x$ $(n>0)$.

***397.** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ 4.

400°. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

401. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

2.4.3. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x\to a$ и существует $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$. Если $0<|C|<+\infty$, α и β называются *бесконечно малыми одного порядка,* если $C=1$, α *эквивалентна* β $(\alpha\sim\beta)$, если $C=0$, α *бесконечно малая более высокого порядка, чем* β $(\alpha=o(\beta))$. Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=C$, $0<|C|<+\infty$, α называется *бесконечно малой порядка* n относительно β.

402. Бесконечно малая величина u_n принимает значения

$$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3},\quad \ldots,\quad u_n=\frac{1}{n},\quad \ldots,$$

а бесконечно малая величина v_n — соответственно значения

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{1}{2!}, \quad v_3 = \frac{1}{3!}, \quad \ldots, \quad v_n = \frac{1}{n!}, \quad \ldots$$

Сравнить u_n и v_n; какая из них высшего порядка малости?

403. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{3}{8}, \quad u_3 = \frac{8}{27}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{n^2-1}{n^3}, \quad \ldots,$$

а функция v_n — соответственно значения

$$v_1 = 2, \quad v_2 = \frac{5}{8}, \quad v_3 = \frac{10}{27}, \quad \ldots, \quad v_n = \frac{n^2+1}{n^3}, \quad \ldots$$

Сравнить эти бесконечно малые величины.

404°. Бесконечно малая величина u_n принимает значения

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{4}, \quad u_3 = \frac{2}{9}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{n-1}{n^2}, \quad \ldots,$$

а бесконечно малая величина v_n — соответственно значения

$$v_1 = 3, \quad v_2 = \frac{5}{4}, \quad v_3 = \frac{7}{9}, \quad \ldots, \quad v_n = \frac{2n+1}{n^2}, \quad \ldots$$

Убедиться в том, что u_n и v_n — бесконечно малые одного порядка, но неэквивалентные.

405. При $x \to 1$ функции $y = \frac{1-x}{1+x}$ и $y = 1-\sqrt{x}$ бесконечно малы. Которая из них высшего порядка малости?

406. Дана функция $y = x^3$. Показать, что Δy и Δx при $\Delta x \to 0$ и при $x \neq 0$ являются бесконечно малыми одного порядка. Проверить, что при $x = 0$ величина Δy бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. При каком значении x приращения Δx и Δy будут эквивалентными?

407. Убедиться в том, что при $x \to 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентными?

408°. Пусть $x \to 0$. Тогда $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a}$ $(a > 0)$ будет бесконечно малой величиной. Определить порядок ее относительно x.

409. Определить порядок относительно x функции, бесконечно малой при $x \to 0$:

1) $x^3 + 1000x^2$;
2) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$;
3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$;
4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410°. Доказать, что приращения функций $u = a\sqrt{x}$ и $v = bx^2$ при $x > 0$ и при общем приращении $\Delta x \to 0$ будут одного порядка малости. При каком значении x они будут эквивалентными (a и b отличны от нуля)?

411. Показать, что при $x \to 1$ бесконечно малые величины $1 - x$ и $a(1 - \sqrt[k]{x})$, где $a \neq 0$ и k — целое положительное число, будут одного порядка малости. При каком значении a они будут эквивалентными?

412. Доказать, что при $x \to \frac{\pi}{2}$ функции $\sec x - \operatorname{tg} x$ и $\pi - 2x$ будут бесконечно малыми одного порядка. Будут ли они эквивалентными?

413. Доказать, что при $x \to 0$ бесконечно малые величины $e^{2x} - e^x$ и $\sin 2x - \sin x$ будут эквивалентными.

414. Определить порядок относительно x функции, бесконечно малой при $x \to 0$:

1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$;
2) $\sqrt{1 + 2x} - 1 - \sqrt{x}$;
3) $e^{\sqrt{x}} - 1$;
4) $e^{\sin x} - 1$;
5) $\ln(1 + \sqrt{x \sin x})$;
6) $\sqrt{1 + x^2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
7) $e^x - \cos x$;
8) $e^{x^2} - \cos x$;
9) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$;
10) $\sin(\sqrt{1 + x} - 1)$;
11) $\ln(1 + x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$;
12) $\arcsin(\sqrt{4 + x^2} - 2)$.

2.4.4. Некоторые геометрические задачи

415°. Дан правильный треугольник со стороной a; из трех высот его строится новый правильный треугольник и так n раз. Найти предел суммы площадей всех треугольников при $n \to \infty$.

416. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг опять вписан квадрат и так n раз. Найти предел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей всех квадратов при $n \to \infty$.

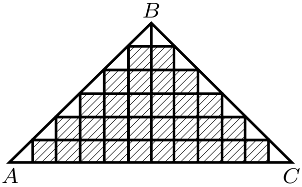

Рис. 2.1

417. В равнобедренный прямоугольный треугольник, основание которого разбито на $2n$ равных частей, вписана ступенчатая фигура (рис. 2.1). Доказать, что при неограниченно возрастающем n разность между площадью треугольника и площадью ступенчатой фигуры бесконечно мала.

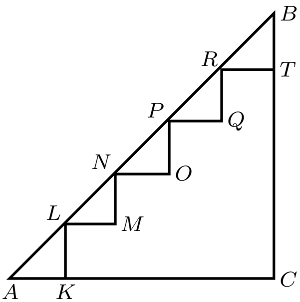

Рис. 2.2

418. В равнобедренном прямоугольном треугольнике, катет которого равен a, гипотенуза разделена на n равных частей и из точек деления проведены прямые, параллельные катетам. При этом получается ломаная $AKLMNOPQRTB$ (рис. 2.2). Длина этой ломаной при любом n равна $2a$, значит и предел ее длины равен $2a$. Но, с другой стороны, при неограниченном возрастании n ломаная неограниченно приближается к гипотенузе треугольника, следовательно, длина гипотенузы равна сумме длин катетов. Найти ошибку в рассуждении.

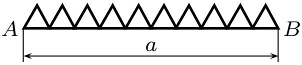

Рис. 2.3

419°. Отрезок AB длины a разделен n точками на равные части, и из этих точек проведены лучи под углами $\frac{\pi}{2n}$ (рис. 2.3). Найти предел длины получившейся ломаной линии при неограниченном возрастании n. Сравнить с результатом предыдущей задачи.

420. Отрезок AB длины a разделен на n равных частей. На каждом частичном отрезке построена дуга окружности, равная $\frac{\pi}{n}$ радиан (рис. 2.4). Найти предел длины получившейся линии при $n \to \infty$. Как изменится результат, если на каждом частичном отрезке будет строиться полуокружность?

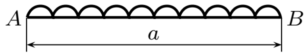

Рис. 2.4

421. Окружность радиуса R разделена n точками M_1, M_2, ..., M_n на равные части. Из каждой такой точки проведена дуга окружности радиуса r до пересечения с дугами, построенными в соседних точках (рис. 2.5). Найти предел длины получившейся замкнутой линии при неограниченном возрастании n.

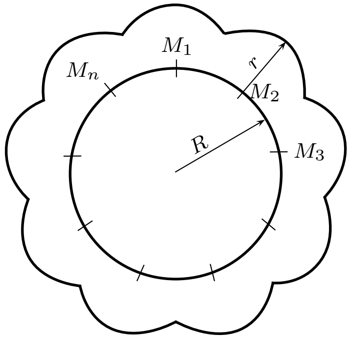

Рис. 2.5

422. Два круга с радиусами R и r ($R > r$) касаются в начале координат оси OY и расположены правее ее (рис. 2.6). Какого порядка, относительно x при $x \to 0$ будут бесконечно малый отрезок MM' и бесконечно малый угол α?

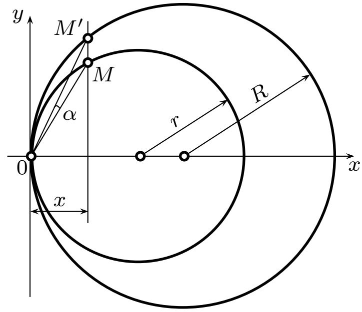

Рис. 2.6

423°. Центр окружности соединен отрезком прямой OP с точкой P, лежащей вне окружности. Из точки P проведена касательная PT к окружности и из точки T опущен перпендикуляр TN на прямую OP. Доказать, что отрезки AP и AN, где A — точка пересечения прямой OP с окружностью, — эквивалентные бесконечно малые при $P \to A$.

424. В конечных и в средней точках дуги AB окружности проведены касательные и точки A и B соединены хордой. Доказать, что отношение площадей образовавшихся при этом двух треугольников стремится к 4 при неограниченном уменьшении дуги AB.

2.4.5. Вычислительные задачи

425. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$, вычислить приближенно:

1) $\sqrt{105}$;	4) $\sqrt{1632}$;
2) $\sqrt{912}$;	5) $\sqrt{0{,}31}$;
3) $\sqrt{260}$;	6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Показать, что при $x \to 0$ функции $\sqrt[n]{1+x}-1$ и $\frac{x}{n}$ — эквивалентные бесконечно малые. Воспользоваться этим для приближенного вычисления корней:

1) $\sqrt[3]{1047}$;	3) $\sqrt[5]{1{,}1}$;
2) $\sqrt[3]{8144}$;	4) $\sqrt[5]{1080}$.

427. Использовать эквивалентность $\ln(1+x)$ и x при $x \to 0$ для приближенного вычисления натуральных логарифмов следующих чисел: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2.

Глава 3

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 3.1. ПРОИЗВОДНАЯ. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента в некоторой точке при стремлении приращения аргумента к нулю называется *производной* функции в этой точке и обозначается $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3.1.1. Некоторые задачи физики

428. Дано уравнение прямолинейного движения точки: $s = 5t + 6$. Определить среднюю скорость движения:

1) за первые 6 секунд;
2) за промежуток времени от конца 3-й до конца 6-й секунды.

429. Точка M удаляется от неподвижной точки A так, что расстояние AM растет пропорционально квадрату времени. По истечении 2 мин от начала движения расстояние AM равнялось 12 м. Найти среднюю скорость движения:

1) за первые 5 мин;
2) за промежуток времени от $t = 4$ мин до $t = 7$ мин;
3) за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$.

430. Дано уравнение прямолинейного движения: $s = t^3 + \frac{3}{t}$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 4$ до $t = 4 + \Delta t$, полагая $\Delta t = 2$; 1; 0,1; 0,03.

431°. Свободно падающее тело движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, где g ($= 9{,}8$ м/с^2) есть ускорение силы тяжести. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 5$ с до $(t + \Delta t)$ с, полагая $\Delta t = 1$ с; 0,1 с; 0,05 с; 0,001 с;

найти скорость падающего тела в конце 5-й секунды, в конце 10-й секунды. Получить формулу для скорости падающего тела для любого момента времени t.

432. Имеется тонкий неоднородный стержень AB. Длина его $L = 20$ см. Масса отрезка AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A, причем известно, что масса отрезка $AM = 2$ см равна 8 г. Найти:

1) среднюю линейную плотность отрезка стержня $AM = 2$ см;
2) среднюю линейную плотность всего стержня;
3) плотность стержня в точке M.

433. В тонком неоднородном стержне AB длиной 30 см масса (в граммах) распределена по закону $m = 3l^2 + 5l$, где l — длина части стержня, отсчитываемая от точки A. Найти:

1) среднюю линейную плотность стержня;
2) линейную плотность: а) в точке, отстоящей от точки A на расстоянии $l = 5$ см; б) в самой точке A; в) в конце стержня.

434. Количество тепла Q (в джоулях), необходимого для нагревания 1 кг воды от 0 до $t°$C , определяется формулой

$$Q = 4186{,}8(t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3).$$

Вычислить теплоемкость воды для $t = 30°$, $t = 100°$.

***435.** Угловую скорость равномерного вращения определяют как отношение угла поворота к соответствующему промежутку времени. Дать определение угловой скорости неравномерного вращения.

436. Если бы процесс радиоактивного распада протекал равномерно, то под скоростью распада следовало бы понимать количество вещества, разложившегося в единицу времени. На самом деле процесс протекает неравномерно. Дать определение скорости радиоактивного распада.

437. Сила постоянного тока определяется как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дать определение силы переменного тока.

438. Термическим коэффициентом линейного расширения стержня называют приращение единицы его длины при повышении температуры на 1°C , если предположить равномерность теплового расширения. На самом же деле процесс протекает неравномерно. Пусть $l = f(t)$, где l — длина стержня, t — температура. Дать определение коэффициента линейного расширения.

439. Коэффициентом растяжения пружины называют приращение единицы длины пружины под действием единичной силы, действующей на каждый квадратный сантиметр сечения пружины. При этом предполагается пропорциональность растяжения действующему усилию (закон Гука). Дать определение коэффициента растяжения k в случае уклонения от закона Гука. (Пусть l — длина пружины, S — площадь поперечного сечения, P — растягивающая сила и $l = \varphi(P)$.)

3.1.2. Производная функция

440. Найти приращение функции $y = x^3$ в точке $x_1 = 2$, полагая приращение Δx независимой переменной равным:

1) 2;
2) 1;
3) 0,5;
4) 0,1.

441. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ при $x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$;
2) $y = \frac{1}{x}$ при $x = 2$; $\Delta x = 0{,}01$;
3)° $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$; $\Delta x = 0{,}4$.

Показать, что при $\Delta x \to 0$ предел этого отношения в первом случае равен 4, во втором равен $-\frac{1}{4}$, в третьем равен $\frac{1}{4}$.

442. Дана функция $y = x^2$. Найти приближенные значения производной в точке $x = 3$, полагая последовательно Δx равным:

1) 0,5;
2) 0,1;
3) 0,01;
4) 0,001.

443. $f(x) = x^2$; найти $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x) = x^3$; найти $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(-\sqrt{2})$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x) = x^2$. В какой точке $f(x) = f'(x)$?

446. Проверить, что для функции $f(x) = x^2$ справедливо соотношение $f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$, Будет ли это тождество справедливым для функции $f(x) = x^3$?

447. Найти производную функции $y = \sin x$ при $x = 0$.

448. Найти производную функции $y = \lg x$ при $x = 1$.

449. Найти производную функции $y = 10^x$ при $x = 0$.

450. Известно, что $f(0) = 0$ и существует предел выражения $\frac{f(x)}{x}$ при $x \to 0$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

451. Доказать теорему: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x = 0$ равны нулю $[f(0) = 0,\ \varphi(0) = 0]$ и имеют производные при $x = 0$, причем $\varphi'(0) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

452. Доказать, что если $f(x)$ иметь производную при $x = a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

453. Доказать, что производная четной функции есть нечетная функция, а производная нечетной функции — четная функция.

3.1.3. Геометрический смысл производной

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0, y_0) $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) $y - y_0 = {y'}_0(x - x_0)$, уравнение нормали в этой точке $y - y_0 = -\frac{1}{{y'}_0}(x - x_0)$, где ${y'}_0 = f'(x_0)$.

О подкасательной и поднормали см. указания к п. 3.2.11.

454. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$:

1) в начале координат;
2) в точке $(3; 9)$;
3) в точке $(-2; 4)$;
4) в точках пересечения ее с прямой $y = 3x - 2$.

455. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y = x^3$ равен 3?

456. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$:

1) параллельна оси Ox;
2) образует с осью Ox угол $45°$?

457. Может ли касательная к кубической параболе $y = x^3$ составлять с осью Ox тупой угол?

458°. Под какими углами пересекаются парабола $y = x^2$ и прямая $3x - y - 2 = 0$?

459. Под какими углами пересекаются параболы $y = x^2$ и $y^2 = x$?

460. Под каким углом пересекается гипербола $y = \frac{1}{x}$ с параболой $y = \sqrt{x}$?

461°. Написать уравнения касательной к нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2. Найти подкасательную и поднормаль.

462. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

463. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$:

1) параллельна прямой $y = 4x - 5$;
2) перпендикулярна к прямой $2x - 6y + 5 = 0$;
3) образует с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол $45°$?

464°. Доказать, что подкасательная, соответствующая любой точке параболы $y = ax^2$, равна половине абсциссы точки касания. Используя это обстоятельство, дать способ построения касательной к параболе в данной ее точке.

465. Доказать, что нормаль к параболе в любой ее точке служит биссектрисой угла, составленного фокальным радиусом точки и прямой, параллельной оси параболы и проходящей через данную точку.

§ 3.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Таблица производных основных функций

1) $C' = 0$
2) $(x^p)' = px^{p-1}$ $(p \in \mathbf{R})$
3) $(\sin x)' = \cos x$
4) $(\cos x)' = -\sin x$
5) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$
8) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$
9) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
10) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
11) $(a^x)' = a^x \ln a$
12) $(e^x)' = e^x$
13) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a>0, x>0)$
14) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$
15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
17) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
18) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Основные правила дифференцирования

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3) $(uv)' = u'v + uv'$;
2) $(Cu)' = Cu'$; 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Правило дифференцирования сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$, то

$$y'_x = y'_u u'_x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

3.2.1. Степенные функции

В задачах этого раздела x, y, z, t, u, v, s — независимые переменные; a, b, c, d, m, n, p, q — постоянные.

466. Продифференцировать функцию:

1) $3x^2 - 5x + 1$;
2) $x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$;
3) $ax^2 + bx + c$;
4) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$;
5)° $2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$;
6) $0{,}8\sqrt[4]{y} - \frac{y^3}{0{,}3} + \frac{1}{5y^2}$;
7) $\frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$;
8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}} + \frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{p\sqrt{x}}{x}$;
9) $\frac{mz^2 + nz + 4p}{p + q}$;
10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}} - \frac{5{,}2}{t^{1{,}4}} + \frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$;
11) $(x - 0{,}5)^2$;
12) $\sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$;
13) $(v + 1)^2(v - 1)$;
14) $0{,}5 - 3(a - x)^2$;
15) $\frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a + b)x}$;
16) $\left(\frac{mu + n}{p}\right)^3$.

467. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$; найти $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$; найти $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$; найти $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^5$. Показать, что $f'(a) = f'(-a)$.

В задачах 471–489 продифференцировать указанные функции.

471.

1) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;
2) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$;
3) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$;

4) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;
5) $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$;
6) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;
7) $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$.

472. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

473. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

474. $s = \frac{3t^2+1}{t-1}$.

475. $u = \frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

477°. $z = \frac{x^2+1}{3(x^2-1)} + (x^2 - 1)(1 - x)$.

478. $u = \frac{v^5}{v^3-2}$.

479. $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y = \frac{2}{x^3-1}$.

481. $u = \frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

483. $z = \frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s = \frac{1}{t^2-3t+6}$.

485. $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}$.

487. $y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

488. $y = \frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$.

489. $y = \frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x) = x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; найти $f'(0)$ и $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; найти $F'(0)$, $F'(1)$ и $F'(2)$.

492. $F(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$; найти $F'(0)$ и $F'(-1)$.

493. $s(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}$; найти $s'(0)$ и $s'(2)$.

494. $y(x) = (1 + x^3)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$; найти $y'(1)$ и $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi) = \frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; найти $\rho'(2)$ и $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z) = \frac{a-z}{1+z}$; найти $v'(1)$.

497. $z(t) = (\sqrt{t^3} + 1)t$; найти $z'(0)$.

В задачах 498–513 продифференцировать данные функции.

498.

1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$;
2) $(x^2+1)^4$;
3) $(1-x)^{20}$;
4) $(1+2x)^{30}$;
5) $(1-x^2)^{10}$;
6) $(5x^3+x^2-4)^5$;
7) $(x^3-x)^6$;
8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$;
9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$;
10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;
11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;
12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$.

500. $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

501. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

502°. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

503. $y=\sqrt{1-x^2}$.

504. $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$.

506. $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

508. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

510. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

512. $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513°. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v)=(v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; найти $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; найти $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; найти $y'(0)$.

3.2.2. Тригонометрические функции

В задачах 517–546 продифференцировать данные функции.

517. $y=\sin x+\cos x$.

518. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

519. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

520. $\rho = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$.

521. $z = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\sin\alpha}$.

522. $s = \frac{\sin t}{1+\cos t}$.

523. $y = \frac{x}{\sin x+\cos x}$.

524. $y = \frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

525. $y = \cos^2 x$.

526. $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$.

528. $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$.

529°. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

530. $y = x\sec^2 x - \operatorname{tg} x$.

531. $y = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$.

532. $y = \sin 3x$.

533. $y = a\cos\frac{x}{3}$.

534. $y = 3\sin(3x+5)$.

535. $y = \operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$.

536. $y = \sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

537. $y = \sin\frac{1}{x}$.

538. $y = \sin(\sin x)$.

539. $y = \cos^3 4x$.

540. $y = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$.

542. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y = (1+\sin^2 x)^4$.

544. $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y = \cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

546. $y = \sin^2(\cos 3x)$.

547°. Вывести формулы:

$$(\sin^n x\cos nx)' = n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x;$$
$$(\sin^n x\sin nx)' = n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x;$$
$$(\cos^n x\sin nx)' = n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x;$$
$$(\cos^n x\cos nx)' = -n\cos^{n-1} x\sin(n+1)x.$$

3.2.3. Обратные тригонометрические функции

В задачах 548–572 продифференцировать функции.

548. $y = x \arcsin x$.
549. $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.
550. $y = (\arcsin x)^2$.
551°. $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.
552. $y = \frac{1}{\arcsin x}$.
553. $y = x \sin x \operatorname{arctg} x$.
554. $y = \frac{\arccos x}{x}$.
555. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$.
556. $y = (\arccos x + \arcsin x)^n$.
557. $y = \operatorname{arcsec} x$.
558. $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.
559. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
560. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.
561. $y = \arcsin(x - 1)$.
562. $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
563. $y = \operatorname{arctg} x^2$.
564. $y = \arcsin \frac{2}{x}$.
565°. $y = \arcsin(\sin x)$.
566. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$.
567. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.
568°. $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
569. $y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2 + 2x}}$.
570. $y = \arcsin \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \sin x}$.
571. $y = \arccos \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$.
572. $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$.

3.2.4. Логарифмические функции

В задачах 573–597 продифференцировать функции.

573. $y = x^2 \log_3 x$.
574. $y = \ln^2 x$.
575. $y = x \lg x$.
576. $y = \sqrt{\ln x}$.
577. $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$.
578. $y = x \sin x \ln x$.
579. $y = \frac{1}{\ln x}$.

580. $y = \frac{\ln x}{x^n}$.
581°. $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.
582. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.
583. $y = x^n \ln x$.
584. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.
585. $y = \ln(1-2x)$.
586. $y = \ln(x^2-4x)$.
587. $y = \ln\sin x$.
588. $y = \log_3(x^2-1)$.
589. $y = \ln\operatorname{tg} x$.
590. $y = \ln\arccos 2x$.
591. $y = \ln^4\sin x$.
592. $y = \operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.
593. $y = (1+\ln\sin x)^n$.
594. $y = \log_2[\log_3(\log_5 x)]$.
595. $y = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.
596. $y = \arcsin^2[\ln(a^3+x^3)]$.
597°. $y = \sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$.

3.2.5. Показательные функции

В задачах 598–633 продифференцировать данные функции.

598. $y = 2^x$.
599. $y = 10^x$.
600. $y = \frac{1}{3^x}$.
601. $y = \frac{x}{4^x}$.
602. $y = x\cdot 10^x$.
603. $y = xe^x$.
604. $y = \frac{x}{e^x}$.
605. $y = \frac{x^3+2^x}{e^x}$.
606. $y = e^x\cos x$.
607. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.
608. $y = \frac{\cos x}{e^x}$.
609°. $y = \frac{x}{2^{\ln x}}$.
610. $y = x^3 - 3^x$.
611. $y = \sqrt{1+e^x}$.
612. $y - (x^2-2x+3)e^x$.
613. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.
614. $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$.

615. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$.
616°. $y = xe^x(\cos x + \sin x)$.
617. $y = e^{-x}$.
618. $y = 10^{2x-3}$.
619. $y = e^{\sqrt{x+1}}$.
620. $y = \sin(2^x)$.
621. $y = 3^{\sin x}$.
622. $y = a^{\sin^3 x}$.
623. $y = e^{\arcsin 2x}$.
624. $y = 2^{3^x}$.
625. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.
626. $y = \sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$.
627. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.
628. $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.
629°. $y = \ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.
630. $y = ae^{-b^2x^2}$.
631. $y = x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.
632. $y = Ae^{-k^2x}\sin(\omega x + \alpha)$.
633. $y = a^x x^a$.

3.2.6. Гиперболические функции

В задачах 634–649 продифференцировать данные функции.

634. $y = \operatorname{sh}^3 x$.
635. $y = \ln\operatorname{ch} x$.
636°. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.
637. $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$.
638. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.
639. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.
640. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.
641. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.
642. $y = \operatorname{th}(\ln x)$.
643. $y = x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.
644. $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$.
645. $y = \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$.
646. $y = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

647°. $y = \frac{1}{2}\operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

648. $y = \frac{1}{x}\operatorname{ch} 2x + \sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$.

649. $y = x^2 e^{3x}\operatorname{csch} x$.

3.2.7. Логарифмическое дифференцирование

Если функция $y = f(x)$ упрощается при логарифмировании, используем формулу $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, отсюда $y' = y(\ln y)'$. В частности, для степенно-показательной функции $y = u^v$ получаем $\ln y = v\ln u$, $(\ln y)' = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$, $y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right)$.

В задачах 650–666 продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования.

650. $y = x^{x^2}$.

651°. $y = x^{x^x}$.

652. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

653. $y = (\ln x)^x$.

654. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$.

655. $y = x^3 e^{x^2}\sin 2x$.

656. $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

657. $y = x^{\ln x}$.

658. $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659°. $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

660. $y = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

661. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

662. $y = x^{\sin x}$.

663. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

664. $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

665. $y = (x^2+1)^{\sin x}$.

666. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

3.2.8. Разные функции

В задачах 667–770 продифференцировать данные функции.

667. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$.

668. $y = a\operatorname{tg}\left(\frac{x}{k}+b\right)$.

669. $y = \sqrt{1+\sqrt{2px}}$.

670. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)$.
671. $y = \lg(x - \cos x)$.
672°. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.
673. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.
674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.
675. $y = \sin\frac{x}{2}\sin 2x$.
676. $y = \sin e^{\cos x}$.
677. $y = x^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$.
678. $y = e^{-x^2}\ln x$.
679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.
680. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.
681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.
682. $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.
683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.
684. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.
685. $y = \sin^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.
686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$.
687°. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.
688. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.
689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.
690. $y = \cos 2x\ln x$.
691°. $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.
692. $y = \arcsin(n\sin x)$.
693. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$.
694. $y = \frac{1}{18}\sin^6 3x - \frac{1}{24}\sin^8 3x$.
695. $y = x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.
696. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$.
697°. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.
698. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$.
699. $y = \sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.
700. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.
701. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
702. $y = \ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.
703°. $y = x\arcsin(\ln x)$.
704. $y = \operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.
706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \sin 0{,}8x\right)^2$.
707. $y = x\cdot 10^{\sqrt{x}}$.
708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.
709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.
710. $y = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.
711. $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.
712. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.
713. $y = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
714. $y = x^3\operatorname{arctg} x^3$.
715. $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.
716. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
717. $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$.
718. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.
719. $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$.
720. $y = 10^{x\operatorname{tg} x}$.
721°. $y = \sin^2 x\sin x^2$.
722. $y = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
723. $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.
724°. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.
725. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.
726. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.
727. $y = \frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$.
728. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.
729°. $y = \sqrt{a^2-x^2} - a\arccos\frac{x}{a}$.
730. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.
731. $y = \frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.
732°. $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
733. $y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$.
734°. $y = xe^{1-\cos x}$.
735. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.
736. $y = e^x(\sin 3x - 3\cos 3x)$.
737°. $y = 3x^3\arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.
738. $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y = 2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

740°. $y = \ln(e^x\cos x + e^{-x}\sin x)$.

741. $y = \frac{1+x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$.

742. $y = \frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y = e^x\sin x\cos^3 x$.

744. $y = \sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746°. $y = e^{\mathrm{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $y = \frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y = \ln\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - \mathrm{ctg}\,x\ln(1+\sin x) - x$.

749. $y = 2\ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}) - 6\arcsin 2x$.

750. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arctg}\,x$.

751°. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y = \ln(x\sin x\sqrt{1-x^2})$.

753. $y = x\sqrt{1+x^2}\sin x$.

754. $x = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

755. $y = \sqrt{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$.

756°. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

757. $y = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$.

758. $y = \frac{xe^x\,\mathrm{arctg}\,x}{\ln^5 x}$.

759. $y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760°. $y = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

761°. $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

762. $y = \ln\cos\mathrm{arctg}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

763. $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\,\mathrm{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

765°. $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $y = (\mathrm{tg}\,2x)^{\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}}$.

767. $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

768. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

769. $y = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n+1}}$.

770. $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{2-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Доказать, что функция $y = \ln\frac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению $xy' + 1 = e^y$.

772°. Доказать, что функция

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

удовлетворяет соотношению $2y = xy' + \ln y'$.

773. Доказать, что функция $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y' - xy = 1$.

774. Вычислить суммы:

1) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

2) $2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$.

3.2.9. Обратные функции

Если $y = f(x)$ — обратимая функция и $x = f^{-1}(y)$ — обратная функция, то при условии $y'_x \neq 0$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

775. Допустим, что правило дифференцирования степенно́й функции установлено только для целого положительного показателя. Вывести формулу дифференцирования корня, используя правило дифференцирования обратной функции.

776°. $x = e^{\arcsin y}$; найти выражение для $\frac{dy}{dx}$ через y; через x.

777. $t = 2 - 3s + s^3$; выразить $\frac{ds}{dt}$ через s.

778. $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; проверить соотношение $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du} = 1$.

779. Зная, что функции $\arcsin\sqrt{x}$ и $\sin^2 x$ — взаимно обратные функции и что $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, найти $(\arcsin\sqrt{x})'$.

780°. Обозначим функцию, обратную степенно-показательной функции $y = x^x$, символом $\alpha(x)$, т. е. положим, что из $y = x^x$ следует $x = \alpha(y)$. Найти формулу для производной от функции $y = \alpha(x)$.

781. Функции, обратные гиперболическим, обозначаются символами $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arth} x$. Найти производные этих функций.

782. $s = te^{-t}$; найти $\frac{dt}{ds}$.

783°. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Выразить $\frac{dx}{dy}$ через x; через y. Показать справедливость соотношения $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$.

784. $x = y^3 - 4y + 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

785. t=arcsin 2^s. Найти выражение для $\frac{ds}{dt}$ через s; через t.

786. Проверить справедливость соотношения $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, если x и y связаны зависимостью:

1) $y = x^2 + ax + b$;
2) $y = x^{-n}$;
3) $y = \ln(x^2 - 1)$.

3.2.10. Функции, заданные неявно

Если зависимость между x и y задана в форме $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной $y'_x = y'$ следует продифференцировать уравнение $F(x, y) = 0$ по x, считая y функцией от x, и решить полученное уравнение относительно y'.

787. Убедиться дифференцированием в том, что производные от обеих частей равенства $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ тождественно равны между собой.

788. Убедиться дифференцированием в том, что производные от обеих частей равенства

$$\frac{2\sin^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x.$$

тождественно равны друг другу.

789. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к эллипсу $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $(1, \sqrt{2})$?

790. Чему равен угловой коэффициент касательной к гиперболе $xy = a$ $(a \neq 0)$, проведенной в точке $(a, 1)$?

791. Чему равен угловой коэффициент касательной к окружности $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$, проведенной в точке (2,1)?

В задачах 792–812 найти производные функций y, заданных неявно.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

793. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

794°. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

795. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$.

797. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

799. $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800°. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$.

801. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$.

803. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

804°. $x^y = y^x$.

805. $y = \cos(x + y)$.

806. $\cos(xy) = x$.

807. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$.

809. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810°. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

811. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813°. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет также соотношению

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

3.2.11. Применения производной

Пусть в точке $M(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ проведены касательная и нормаль (см. "Геометрический смысл производной"), $y'_0 = f'(x_0)$. Пусть $K(x_0, 0)$, T и N — точки пересечения с осью Ox, соответственно, касательной и нормали. Следующие отрезки называются: $t = TM$ — *отрезок касательной*, $S_t = TK$ — *подкасательная*, $n = NM$ — *отрезок нормали*, $S_n = KN$ — *поднормаль*. Их длины: $t = \left| \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$, $n = \left| y_0 \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$, $S_t = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right|$, $S_n = |y_0 y'_0|$.

814. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

815°. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная к оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

816. Составить уравнение касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$. Найти подкасательную и поднормаль.

817. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

818°. Показать, что для гиперболы $xy = a$ площадь треугольника, образованного любой касательной и координатными осями, равна квадрату полуоси гиперболы.

819. Точка движется по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

1) В какие моменты точка была в начальном пункте?
2) В какие моменты ее скорость равна нулю?

820°. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$; s выражено в сантиметрах, t — в секундах. Определить кинетическую энергию $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ тела через 5 с после начала движения.

821. Угол α поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Найти угловую скорость при $t = 5$ с.

822. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω через 32 с после начала движения.

823. Угол θ, на который поворачивается колесо через t с, равен $\theta = at^2 - bt + c$, где a, b, c — положительные постоянные. Найти угловую скорость ω движения колеса. В какой момент времени угловая скорость будет равна нулю?

824. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \text{ (Кл)}.$$

Найти силу тока в конце пятой секунды.

825°. На линии $y = x^2(x - 2)^2$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

826. Показать, что линия $y = x^5 + 5x - 12$ во всех своих точках наклонена к оси Ox под острым углом.

827. В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

828. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

829°. Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярной к прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

В задачах 830–833 составить уравнения касательной и нормали к данным линиям.

830. $y = \sin x$ в точке $M(x_0, y_0)$.

831. $y = \ln x$ в точке $M(x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ в точке с абсциссой $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (циссоида) в точке $M(x_0, y_0)$.

834. Показать, что подкасательная к параболе n-го порядка $y = x^n$ равна $\frac{1}{n}$-й части абсциссы точки касания. Дать способ построения касательной к линии $y = x^n$.

835°. Найти подкасательные и поднормали к линии $y = x^3$; $y^2 = x^3$; $xy^2 = 1$. Дать способы построения касательных к этим линиям.

836. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $x^2 = 4ay$ в ее точке (x_0, y_0); показать, что касательная в точке с абсциссой $x_0 = 2am$ имеет уравнение $x = \frac{y}{m} + am$.

837°. Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

838. Составить уравнение нормали к линии $y = \frac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x = 3$.

839. Составить уравнение нормали к линии $y = -\sqrt{x} + 2$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

840°. Составить уравнение нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

841. Показать, что нормали к линии $y = x^2 - x + 1$, проведенные в точках с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = \frac{5}{2}$, пересекаются в одной точке.

842°. В точках пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и параболы $y = x^2 - 4x + 5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

843. Показать, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

844°. Провести касательную к гиперболе $y = \frac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат.

845. На линии $y = \frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

846°. Найти уравнение касательной к линии $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ в начале координат.

847. Доказать, что касательные к линии $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведенные в точках, для которых $y = 1$, пересекаются в начале координат.

848. Провести нормаль к линии $y = x\ln x$ параллельно прямой $2x - 2y + 3 = 0$.

849°. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y = e^{2x} + x^2$, проведенной в точке $x = 0$.

850. Построить график функции $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ и найти точку пересечения касательных к графику, проведенных в точках с абсциссой $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{5\pi}{12}$,

851. Показать, что у линии $y = ae^{bx}$ (a и b — постоянные) подкасательная во всех точках имеет постоянную длину.

852°. Показать, что поднормаль линии $y = x\ln(cx)$ (c — произвольная константа) в любой точке данной линии есть четвертая пропорциональная к абсциссе, ординате и сумме абсциссы и ординаты этой точке.

853. Показать, что любая касательная к линии $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$ пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

854°. Показать, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

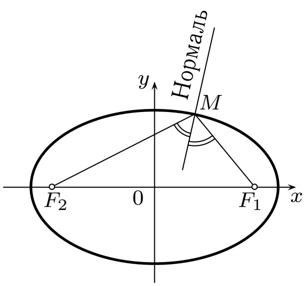

Рис. 3.1

855. Показать, что касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

856. Доказать, что нормаль к эллипсу в любой его точке делит пополам угол между фокальными радиусами (рис. 3.1) этой точки. Вывести отсюда способ построения касательной и нормали к эллипсу.

857. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярных к прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

858. Через начало координат проведена прямая, параллельная касательной к кривой в произвольной ее точке M. Найти геометрическое место точек P пересечения этой прямой с прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку M.

Найти такие геометрические места для:

1) параболы $y^2 = 2px$;
2) логарифмики $y = \log_b x$;
3) окружности $x^2 + y^2 = a^2$;
4)° трактрисы $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

В задачах 859–864 найти углы, под которыми пересекаются данные линии.

859.
1) $y = \frac{x+1}{x+2}$ и $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$;
2) $y = (x-2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$.

860.
1) $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$;
2) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ и $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

861. $x^2 - y^2 = 5$ и $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

862°. $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

863°. $x^2 = 4ay$ и $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

865. Составить уравнение касательной и нормали к линии

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$$

в точке с абсциссой, равна a.

866°. Доказать, что сумма отрезков на осях координат, образуемых касательной к кривой

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},$$

для всех ее точек равна a.

867. Показать, что отрезок касательной к астроиде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную a.

868°. Доказать, что отрезок касательной к трактрисе

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.

869. Показать, что для любой точки $M(x_0, y_0)$ равнобочной гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

отрезок нормали от точки M до точки пересечения с осью абсцисс равен полярному радиусу точки M.

870°. Показать, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной в произвольной точке кривой

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1,$$

пропорционален кубу абсциссы точки касания.

871. Доказать, что ордината любой точки линии

$$2x^2y^2 - x^4 = c$$

(c — постоянная) есть средняя пропорциональная между абсциссой и разностью абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

872°. Доказать, что у эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которых ось $2a$ — общая, а оси $2b$ различны (рис. 3.2), касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются в одной точке, лежащей на оси абсцисс. Воспользовавшись этим, указать простой прием построения касательной к эллипсу.

873. Показать, что линия $y = e^{kx} \sin mx$, касается каждой из линий $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ во всех общих с ними точках.

874. Для построения касательной к цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ употребляется следующий способ: на ординате MN точки M, как на диаметре, строится полуокружность (рис. 3.3) и откладывается хорда $NP = a$; прямая MP будет искомой касательной. Доказать это.

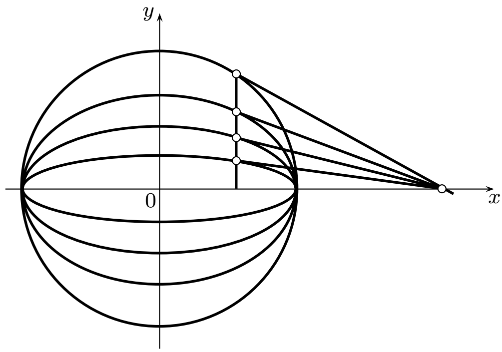

Рис. 3.2

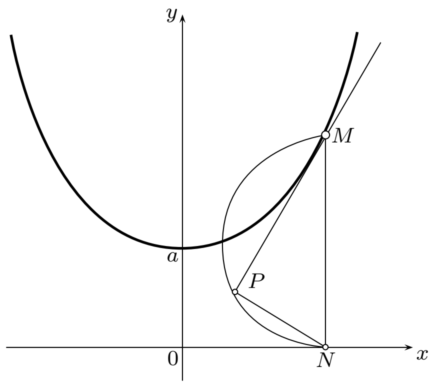

Рис. 3.3

§ 3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее *приращение* в этой точке $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = k\Delta x + o(\Delta x).$$

Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$. В этом случае $k = f'(x_0)$. Главная часть приращения дифференцируемой функции, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом* функции dy. Дифференциалом независимой переменной является ее приращение ($dx = \Delta x$).

$$dy = y'dx,$$

отсюда

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Геометрический смысл дифференциала: dy равен приращению ординаты касательной к графику функции $f(x)$. При приближенных вычислениях полагаем $\Delta y \approx dy$, при этом абсолютная и относительная погрешности этого приближенного равенства стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$. Свойство инвариантности формы дифференциала: если $y = f(u)$, $u = g(x)$, то $dy = f(g(x))'dx = f'(u)du$.

3.3.1. Дифференциал

877°. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy, если $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$. Какова будет погрешность (абсолютная и относительная) значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

878. Найти приращение Δv объема v шара при изменении радиуса $R = 2$ на ΔR. Вычислить Δv, если $\Delta R = 0{,}5$; $0{,}1$, $0{,}01$. Какова будет погрешность значения Δv, если ограничиться членом, содержащим ΔR в первой степени?

879. Дана функция $y = x^3 + 2x$. Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующие изменению x от $x = 2$ до $x = 2{,}1$.

880. Какое приращение получает функция $y = 3x^2 - x$ при переходе независимой переменной от значения $x = 1$ к значению $x = 1{,}02$? Каково значение соответствующей линейной главной части? Найти отношение второй величины к первой.

881. Дана функция $y = f(x)$. В некоторой точке x дано приращение $\Delta x = 0{,}2$; соответствующая главная часть приращения функции оказалась равной $0{,}8$. Найти производную в точке x.

882°. Дана функция $f(x) = x^2$. Известно, что в некоторой точке приращению независимой переменной $\Delta x = 0{,}2$ соответствует главная часть приращения функции $df(x) = -0{,}8$. Найти начальное значение независимой переменной.

883. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения дифференциалом. Сделать чертеж.

884. Найти приращение и дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}41$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности. Сделать чертеж.

885. $y = x^3 - x$. При $x = 2$ вычислить Δy и dy, давая Δx значения $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Найти соответствующие значения относительной погрешности $\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

886. Найти графически (сделав чертеж на миллиметровой бумаге в большом масштабе) приращение, дифференциал и вычислить абсолютную и относительную погрешности при замене приращения дифференциалом для функции $y = 2^x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}4$.

887. Сторона квадрата равна 8 см. Насколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на:

1)° 1 см;
2) 0,5 см;
3) 0,1 см.

Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата и оценить относительную погрешность (в процентах) при замене приращения его главной частью.

888. Известно, что при увеличении сторон данного квадрата на 0,3 см линейная главная часть приращения площади составляет 2,4 см^2. Найти линейную главную часть приращения площади, соответствующую приращению каждой стороны на:

1) 0,6 см;
2) 0,75 см;
3) 1,2 см.

889. Найти дифференциал функции:

1) $0,25\sqrt{x}$;
2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$;
3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$;
4) $\frac{1}{4x^4}$;
5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;
6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$;
7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$;
8) $\frac{p}{q^x}$;
9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$;
10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$;

11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$;
12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$;
13) $\frac{1}{1-t^2}$;
14) $(1+x-x^2)^3$;
15) $\operatorname{tg}^2 x$;
16) $5^{\ln\operatorname{tg} x}$;
17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$;
18)° $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$;
19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$;
20) $\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;
21) $3\arcsin x-4\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\arccos x-\frac{7}{2}\operatorname{arctg} x$;
22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

890. Вычислить значение дифференциала функции:
1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ при изменении независимой переменной от $x=\frac{\pi}{6}$ до $x=\frac{61\pi}{360}$;
2) $y=\cos^2\varphi$ при изменении φ от $60°$ до $60°30'$;
3) $y=\sin 2\varphi$ при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$;
4) $y=\sin 3\varphi$ при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$;
5) $y=\sin\frac{\theta}{3}$ при изменении θ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$.

891. Найти приближенное значение приращения функции $y=\sin x$ при изменении x от $30°$ до $30°1'$. Чему равен $\sin 30°1'$?

892°. Найти приближенное значение приращения функции $y=\operatorname{tg} x$ при изменении x от $45°$ до $45°10'$.

893. Найти приближенное значение приращения функции $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ при изменении x от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

894. $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$; найти $d\rho$.

895. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Вычислить dy при $x=1$ и $dx=0{,}2$.

896. Вычислить приближенно $\sin 60°3'$, $\sin 60°18'$. Сопоставить полученные результаты с табличными значениями.

897. Проверить, что функция $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

898. Проверить, что функция y, определенная уравнением $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет соотношению $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

899. $f(x)=e^{0{,}1x(1-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1{,}05)$.

900°. Вычислить $\operatorname{arctg} 1{,}02$; $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

901. Вычислить приближенно $\sqrt{\frac{2{,}037^2-3}{2{,}037^2+5}}$.

902. Вычислить приближенно $\arcsin 0{,}4983$.

903°. Если длина тяжелой нити (провода, цепи) (рис. 3.4) равна $2s$, полупролет l, а стрелка провеса f, то имеет место приближенное равенство $s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$.

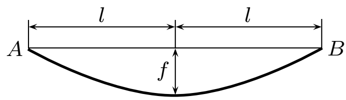

Рис. 3.4

1) Подсчитать, какое изменение произойдет в длине нити при изменении ее стрелки провеса f на величину df.
2) Если учесть изменение длины провода ds (например, от изменения температуры или нагрузки), то как изменится при этом стрелка провеса?

904. Сравнить погрешности при нахождении угла по его тангенсу и по его синусу с помощью логарифмических таблиц, т. е. сопоставить точность нахождения угла x по формулам $\lg\sin x = y$ и $\lg\operatorname{tg} x = z$, если y и z даны с одинаковыми погрешностями.

905. При технических расчетах часто сокращают π и $\sqrt{g}$ (g — ускорение силы тяжести), когда одно из этих чисел стоит в числителе, а другое в знаменателе. Какую относительную погрешность делают при этом?

906. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$, $x = t^3 + 2t + 1$;
2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2-1}{4}$;
3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$;
4) $v = 3^{-\frac{1}{x}}$, $x = \ln\operatorname{tg} s$;
5) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2}\ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$;
6) $y = \ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2x$.

3.3.2. Дифференцируемость функций

907°. Функция $y = |x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x = 0$ она недифференцируема.

908. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = |x^3|$ при $x = 0$.

909. Функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x) = 1 + x$ для $x \leqslant 0$; $f(x) = x$ для $0 < x < 1$; $f(x) = 2 - x$ для $1 \leqslant x \leqslant 2$ и $f(x) = 3x - x^2$ для $x > 2$. Исследовать непрерывность $f(x)$ и выяснить существование и непрерывность $f'(x)$.

910. Функция $y = |\sin x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x = 0$ она недифференцируема. Имеются ли другие значения независимой переменной, при которых функция недифференцируема?

911. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = e^{-|x|}$ при $x = 0$.

912°. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ дифференцируемой при $x = 0$?

913. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x = 0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что при $x = 1$ из приращения функции нельзя выделить линейную главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x = 1$ не имеет производной. Истолковать результат геометрически.

915°. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x = 0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолковать результат геометрически.

916°. $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x = 0$ непрерывной, дифференцируемой?

§ 3.4. ПРОИЗВОДНАЯ КАК СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ (ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ)

3.4.1. Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho = a\varphi$. Найти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно полярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho = e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось служит осью абсцисс, полюс — началом системы декартовых координат.

919°. Точка движется по окружности $\rho = 2r\cos\varphi$. Найти скорость изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось служит осью абсцисс, полюс — началом системы декартовых координат.

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прямой. Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти скорости изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащей на границе круга.

921°. Барометрическое давление p изменяется с высотой h в соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0} = ch$, где через p_0 обозначено нормальное давление, а c — постоянная. На высоте 5540 м давление достигает половины нормального; найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

922. y связан с x соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?

923. Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?

924°. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

925. Сторона квадрата увеличивается со скоростью v. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a?

926. Радиус круга изменяется со скоростью v. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r?

927°. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

928. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

929. При каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла одинаковы?

930°. Скорость роста синуса увеличилась в n раз. Во сколько раз при этом изменилась скорость роста тангенса?

931. Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.

3.4.2. Функции, заданные параметрически

Если функция задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

932. Проверить, лежит ли заданная декартовыми координатами точка на линии, уравнение которой дано в параметрической форме.

1) Лежит ли точка $(5, 1)$ на окружности $x = 2 + 5\cos t$, $y = -3 + 5\sin t$?
2) Лежит ли точка $(2, \sqrt{3})$ на окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$?

933. Построить графики функций, заданных параметрически:

1) $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$;
2) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;
3) $x = \cos t$, $y = t + 2\sin t$;
4) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

934. Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$;
2) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;
3) $t^3 + 1$, $y = t^2$;
4) $x = \varphi - \sin\varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$;
5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2\cos 2t$.

935. Найти значение параметра, соответствующее заданным координатам точки на линии, уравнение которой дано в параметрической форме:

1)° $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\sin t - \sin 2t)$; $(-9, 0)$;
2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;
3) $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$; $(2, 2)$;
4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0, 0)$.

В задачах 936–945 найти производные от y по x.

936. $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$.

937.° $x = a\cos^2\varphi$, $y = b\sin^2\varphi$.

938. $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$.
939. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$.
940. $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.
941°. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.
942. $x = \varphi(1 - \sin\varphi)$, $y = \varphi\cos\varphi$.
943. $x = \frac{1+t^2}{t^2-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.
944. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.
945°. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

В задачах 946–949 найти угловые коэффициенты касательных к данным линиям.

946. $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ в точке $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.
947. $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ в точке $(0, 0)$.
948. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$ в точке $(1, 1)$.
949. $x = 2\cos t$, $4y = \sin t$ в точке $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

950. Для линии, заданной в параметрической форме, указать связь между параметром t и углом α, образованным касательной к линии с осью абсцисс:

1) $x = \cos t + t\sin t - \frac{t^2}{2}\cos t$, $y = \sin t - t\cos t - \frac{t^2}{3}\sin t$;
2)° $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;
3) $x = a\cos t\sqrt{2\cos 2t}$, $y = a\sin t\sqrt{2\cos t}$.

951. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$, удовлетворяет соотношению $y = y'^2 + 2y'^3$ (штрихом обозначено дифференцирование по x, т. е. $y' = \frac{dy}{dx}$).

952°. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$, удовлетворяет соотношению $xy'^3 = 1 + y'$ $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

953. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \operatorname{ch} 2t$, $y = \operatorname{sh} 2t$, удовлетворяет соотношению

$$yy' - x = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

954. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$, $y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, удовлетворяет соотношению

$$y\sqrt{1 + y'^2} = y' \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

955. Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \frac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \frac{3+2\ln t}{t}$, удовлетворяет соотношению $yy' = 2xy'^2 + 1$ $(y' = \frac{dy}{dx})$.

956. Найти углы, под которыми пересекаются линии:

1)° $y = x^2$ и $x = \frac{5}{3}\cos t$, $y = \frac{5}{4}\sin t$;

2) $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ и $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$.

957.° Показать, что при любом положении производящего круга циклоиды касательная и нормаль в соответствующей точке циклоиды проходят через его высшую и низшую точки.

958. Найти длины касательной, нормали, подкасательной и поднормали к кардиоиде $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - - \sin 2t)$ в произвольной ее точке.

959. Найти длины касательной, нормали, подкасательной и поднормали к астроиде $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ в произвольной ее точке.

960.° Доказать, что касательная к окружности $x^2+y^2= =a^2$ служит нормалью к эвольвенте окружности $x = a(\cos t + + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

961. Найти длины касательной, нормали, подкасательной и поднормали эвольвенты окружности (см. уравнения последней в предыдущей задаче).

962.° Доказать, что отрезок нормали к кривой $x = 2a\sin t + + a\sin t\cos^2 t$, $y = -a\cos^3 t$, заключенный между осями координат, равен $2a$.

В задачах 963–966 составить уравнения касательной и нормали к данным линиям в указанных точках.

963. $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$ при $t = 0$.

964. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ при $t = \frac{\pi}{6}$.

965. $x = 2\ln\operatorname{ctg} t + 1$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

966.

1)° $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ при $t = 2$;

2) $x = t(t\cos t - 2\sin t)$, $y = t(t\sin t + 2\cos t)$ при $t = \frac{\pi}{4}$;

3) $x = \sin t$, $y = a^t$ при $t = 0$.

967. Показать, что в двух точках кардиоиды (см. задачу 958), соответствующих значениям параметра t, отличающимся на $\frac{2}{3}\pi$, касательные параллельны.

968.° Доказать, что если OT и ON — перпендикуляры, опущенные из начала координат на касательную и нормаль к астроиде в любой ее точке (см. задачу 959), то

$$4 \cdot OT^2 + ON^2 = a^2.$$

969. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к линии

$$2x = a(3\cos t + \cos 3t), \qquad 2y = a(3\sin t + \sin 3t).$$

Показать, что $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$, где ρ — полярный радиус данной точки, а p — длина указанного перпендикуляра.

3.4.3. Скорость изменения полярного радиуса

970°. Дана окружность $\rho = 2r\sin\varphi$. Найти угол θ между полярным радиусом и касательной и угол α между полярной осью и касательной.

971. Доказать, что у параболы $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ сумма углов, образованных касательной с полярным радиусом и с полярной осью, равна двум прямым. Использовать это свойство для построения касательной к параболе.

972°. Дана линия $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (конхоида); показать, что $\alpha = 4\theta$ (обозначения те же, что в задаче 970).

973. Показать, что две параболы $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ и $\rho = b\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ пересекаются под прямым углом.

974. Найти тангенс угла между полярной осью и касательной к линии $\rho = \sec^2\varphi$ в точках, в которых $\rho = 2a$.

975. Найти тангенс угла между полярной осью и касательной в начале координат:

1) к линии $\rho = \sin^3\varphi$,
2) к линии $\rho = \sin 3\varphi$.

976°. Показать, что две кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ и $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ пересекаются под прямым углом.

977°. Уравнение линии в полярных координатах задано параметрически: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Выразить тангенс угла θ между касательной и полярным радиусом в виде функции t.

978. Линия задана уравнениями $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Найти угол между полярным радиусом и касательной.

979. Дан эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Выразить полярный радиус ρ и полярный угол φ как функции параметра t. Использовать полученную форму задания эллипса для вычисления угла между касательной и полярным радиусом.

Полярной подкасательной называется проекция отрезка касательной от точки касания до ее пересечения с перпендикуляром, восставленным к полярному радиусу в полюсе, на этот перпендикуляр. Аналогично определяется полярная поднормаль. Учитывая это, решить задачи 980–984.

980°. Вывести формулу для полярной подкасательной и полярной поднормали линии $\rho = f(\varphi)$.

981°. Показать, что длина полярной подкасательной гиперболической спирали $\rho = \frac{a}{\varphi}$ постоянна.

982. Показать, что длина полярной поднормали архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ постоянна.

983. Найти длину полярной подкасательной логарифмической спирали $\rho = a^{\varphi}$.

984°. Найти длину полярной поднормали логарифмической спирали $\rho = a^{\varphi}$.

3.4.4. Скорость изменения длины

Если кривая задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

и на кривой выбрана начальная точка $M(x_0, y_0)$, то длина дуги s от точки M до переменной точки $X(x,y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ является функцией от t. Дифференциал этой функции $ds = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt$; если $y = f(x)$, $ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx$.

В задачах 985–999 через s обозначена длина дуги соответствующей линии.

985. Прямая $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. Окружность $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987°. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. Парабола $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. Полукубическая парабола $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990°. Синусоида $y = \sin x$; $ds = ?$

991. Цепная линия $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$; $\frac{ds}{dx} = ?$

992. Окружность $x = r\cos t$, $y = r\sin t$; $\frac{ds}{dt} = ?$

993°. Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{ds}{dt} = ?$

994. Астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $ds = ?$

995. Архимедова спираль $x = at\sin t$, $y = at\cos t$; $ds = ?$

996°. Кардиоида $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$; $ds = ?$

997. Трактриса $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$; $ds = ?$

998°. Развертка окружности

$$x = a(\cos t + t\sin t), \qquad y = a(\sin t - t\cos t); \qquad \frac{ds}{dt} = ?$$

999. Гипербола $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$; $ds = ?$

3.4.5. Скорость движения

1000°. Лестница длиной 10 м одним концом прислонена к вертикальной стене, а другим — опирается о пол. Нижний конец отодвигается от стены со скоростью 2 м/мин. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы, когда основание ее отстоит от стены на 6 м? Как направлен вектор скорости?

1001. Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью 10 км/ч. С какой скоростью они удаляются друг от друга? Как направлен вектор скорости?

1002. Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 3 м, со скоростью $6,34$ км/ч. С какой скоростью перемещается тень его головы?

1003°. Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 км/ч. В центре окружности находится фонарь, а по касательной к окружности в точке, откуда лошадь начинает бег, расположен забор. С какой скоростью перемещается тень лошади вдоль забора в момент, когда она пробежит 1/8 окружности?

§ 3.5. ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

3.5.1. Функции, заданные в явном виде

Производная от производной функции $y = f(x)$ называется *второй производной* функции y и обозначается y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$. *Производная n-го порядка* определяется по индукции: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

1006. $y = x^2 - 3x + 2$; $y'' = ?$

1007. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$

1008. $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$

1009°. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{\mathrm{IV}}(1) = ?$
1010. $y = (x^2+1)^3$; $y'' = ?$
1011°. $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$
1012. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$
1013. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$
1014. $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f^{\mathrm{V}}(x) = ?$
1015°. $y = x^3 \ln x$; $y^{\mathrm{IV}} = ?$
1016. $f(x) = \frac{a}{x^n}$; $f''(x) = ?$
1017. $\rho = a \sin 2\varphi$; $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4} = ?$
1018°. $y = \frac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

В задачах 1019–1028 найти вторые производные от функций.

1019. $y = xe^{x^2}$.
1020. $y = \frac{1}{1+x^3}$.
1021°. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.
1022. $y = \sqrt{a^2 - x^2}4$.
1023. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
1024. $y = \frac{1}{a+\sqrt{x}}$.
1025°. $y = e^{\sqrt{x}}$.
1026. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.
1027°. $y = \arcsin(a \sin x)$.
1028. $y = x^x$.

В задачах 1029–1040 найти общие выражения для производных порядка n от функций:

1029. $y = e^{ax}$.
1030. $y = e^{-x}$.
1031°. $y = \sin ax + \cos bx$.
1032. $y = \sin^2 x$.
1033°. $y = xe^x$.
1034. $y = x \ln x$.
1035. $y = \frac{1}{ax+b}$.
1036°. $y = \ln(ax+b)$.
1037. $y = \log_a x$.
1038°. $y = \frac{x}{x^2-1}$.
1039. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.
1040°. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1041°. Доказать, что функция $y = (x^2-1)^n$ удовлетворяет соотношению $(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0$.

1042. Доказать, что функция $y = e^x \sin x$ удовлетворяет соотношению $y'' - 2y' + 2y = 0$, а функция $y = e^{-x} \sin x$ — соотношению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1043. Доказать, что функция $y = \frac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет соотношению $2y'^2 = (y-1)y''$.

1044°. Доказать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ удовлетворяет соотношению $y^3 y'' + 1 = 0$.

1045. Доказать, что функция $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ удовлетворяет соотношению $y''' - 13y' - 12y = 0$.

1046. Доказать, что функция $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ удовлетворяет соотношению $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

1047. Доказать, что функция $y = \cos e^x + \sin e^x$ удовлетворяет соотношению $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

1048. Доказать, что функция $y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B\cos(\omega t + \omega_0)$ (A, B, ω, ω_0 — постоянные) удовлетворяет соотношению $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

1049. Доказать, что функция $a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx} + a_3 \cos nx + a_4 \sin nx$ (a_1, a_2, a_3, a_4, n — постоянные) удовлетворяет соотношению $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 y$.

1050°. Доказать, что функция $y = \sin(n \arcsin x)$ удовлетворяет соотношению $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

1051. Доказать, что функция $e^{\alpha \arcsin x}$ удовлетворяет соотношению $(1 - x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$.

1052. Доказать, что функция $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$ удовлетворяет соотношению $(1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$.

1053°. Доказать, что выражение $S = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ не изменится, если заменить y на $\frac{1}{y}$, т. е. если положить $y = \frac{1}{y_1}$, то

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2 = S.$$

1054. Дано $y = f(x)$. Выразить $\frac{d^2x}{dy^2}$ через $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$. Показать, что формулу $R = \frac{1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ можно преобразовать к виду

$$R^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055°. Дано: $F(x) = f(x)\varphi(x)$, при этом $f'(x)\varphi'(x) = C$. Доказать, что $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2C}{f\cdot\varphi}$ и $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}$.

3.5.2. Функции, заданные в неявном виде

1056. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1057°. $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1058. $y = \operatorname{tg}(x + y)$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1059. $s = 1 + te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2} = ?$

1060. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; $y'' = ?$

1061. $y = \sin(x + y)$; $y'' = ?$

1062°. $e^{x+y} = xy$; $y'' = ?$

1063°. Вывести формулу для второй производной функции, обратной данной $y = f(x)$.

1064. $e^y + xy = e$; найти $y''(x)$ при $x = 0$.

1065°. $y^2 = 2px$; определить выражение $k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Убедиться в том, что из $y^2+x^2 = R^2$ следует $k = \frac{1}{R}$, где $k = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Доказать, что если

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0, \qquad \text{то}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by + g}{bx + cy + f} \qquad \text{и} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{(bx + cy + f)^3},$$

где A — постоянная (не зависящая от x и y).

1068°. Доказать, что если $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, то

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

3.5.3. Функции, заданные параметрически

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{x'_ty''_{tt} - x''_{tt}y't}{(x'_t)^3}.$$

1069. $x = at^2$, $y = bt^3$; $\frac{d^2x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1071°. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1073.

1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

2) $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1074.

1) $x = \ln t$, $y = t^2 - 1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2)° $x = \arcsin t$, $y = \ln(1 - t^2)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at\cos t$, $y = at\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1076°. Доказать, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями $y = e^t\cos t$, $x = e^t\sin t$, удовлетворяет соотношению $y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Доказать, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$, удовлетворяет соотношению $36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3$.

1078. Доказать, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \sin t$, $y = \sin kt$, удовлетворяет соотношению

$$(1 - x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

1079°. Доказать, что если

$$x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t, \quad y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t, \qquad \text{то}$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[f(t) + f''(t)\right]^2\,dt^2.$$

3.5.4. Ускорение движения

1080. Точка движется прямолинейно, причем $s = \frac{4}{5}t^3 - t + 5$. Найти ускорение a в конце второй секунды (s выражено в метрах, t — в секундах).

1081. Прямолинейное движение происходит в соответствии с формулой $s = t^2 - 4t + 1$. Найти скорость и ускорение движения.

1082. Точка движется прямолинейно, причем $s = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + s_0$. Найти ускорение в конце первой секунды (s выражено в сантиметрах, t — в секундах).

1083°. Точка движется прямолинейно, причем $s = \sqrt{t}$. Доказать, что движение замедленное и что ускорение a пропорционально кубу скорости v.

1084. Тяжелую балку длиной 13 м спускают на землю так, что нижний ее конец прикреплен к вагонетке (рис. 3.5), а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от точки O?

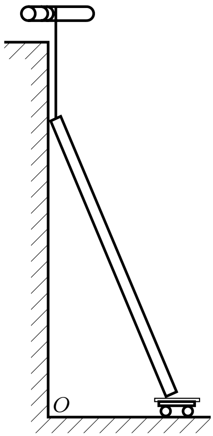

Рис. 3.5

1085°. Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот со скоростью 2 м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 8 м (по горизонтали).

1086. Точка движется прямолинейно так, что скорость ее изменяется пропорционально квадратному корню из пройденного пути. Показать, что движение происходит по действием постоянной силы.

1087°. Дано, что сила, действующая на материальную точку, обратно пропорциональна скорости движения точки. Доказать, что кинетическая энергия точки является линейной функцией времени.

3.5.5. Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \\ + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.$$

1088. Применить формулу Лейбница для вычисления производной:

1)° $\left[(x^2+1)\sin x\right]^{(20)}$; 2) $(e^x \sin x)^{(n)}$; 3) $(x^3 \sin\alpha x)^{(n)}$.

1089. Показать, что если $y = (1-x)^{-\alpha}e^{-\alpha x}$, то

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = \alpha xy.$$

Применив формулу Лейбница, показать, что

$$(1-x)y^{(n+1)} - (n+\alpha)x)y^{(n)} - n\alpha y^{(n-1)} = 0.$$

1090°. Функция $y = e^{\alpha \arcsin x}$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$ (см. задачу 1051).

Применив формулу Лейбница и дифференцируя это равенство n раз, показать, что

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - (n^2+\alpha^2)y^{(n)} = 0.$$

1091°. Показать, что $(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Используя формулу Лейбница, получить следующие формулы:

$$r^n \cos n\varphi = a^n - C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^4 a^{n-4}b^4 - \ldots,$$
$$r^n \sin n\varphi = C_n^1 a^{n-1}b - C_n^3 a^{n-3}b^3 + C_n^5 a^{n-5}b^5 \ldots$$

1092°. Доказать, что $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

1093. Доказать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y'' = xy'$. Применяя к обеим частям этого уравнения формулу Лейбница, найти $y^{(n)}(0)$ $(n \geqslant 2)$.

1094. Применяя формулу Лейбница n раз, показать, что функция $y = \cos(m \arcsin x)$ удовлетворяет соотношению

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + (m^2-n^2)y^{(n)} = 0.$$

1095°. Если $y = (\arcsin x)^2$, то

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} + (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0.$$

Найти $y'(0)$, $y''(0)$, $\ldots$, $y^{(n)}(0)$.

3.5.6. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от первого дифференциала называется *дифференциалом второго порядка*: $d^2y = d(dy)$; аналогично $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Для дифференциалов порядка больше первого инвариантность формы нарушается: $d^2y = y''(dx)^2$, $d^3y = y'''(dx)^3 \ldots$, если x — независимая переменная, но $d^2y = y''_{uu}(du)^2 + y'_u d^2u$, где $u = \varphi(x)$.

1096. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $d^2y = ?$

1097. $y = x^m$; $d^3y = ?$

1098. $y = (x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y = ?$

1099. $y = 4^{-x^2}$; $d^2y = ?$

1100°. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$; $d^2y = ?$

1101. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; $d^2y = ?$

1102. $y = \sin^2 x$; $d^3y = ?$

1103°. $\rho^2\cos^3\varphi - a^2\sin^3\varphi = 0$; $d^2\rho = ?$

1104. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y = ?$

1105. $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; выразить d^2y через:

1) x и dx;
2) t и dt.

1106. $y = \sin z$; $z = a^x$; $x = t^3$; выразить d^2y через:

1) z и dz;
2) x и dx;
3) t и dt.

Глава 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

§ 4.1. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ

Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $a < x < b$, то функция возрастает (убывает) на $[a, b]$. Если в некоторой окрестности точки x_0 для всякого $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$), x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$. Точки максимума и минимума называются точками *экстремума*. Если x_0 — точка экстремума, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует (такие точки называются *критическими*). Это — необходимое условие экстремума, не являющееся достаточным. Если в некоторой окрестности x_0 $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, x_0 является точкой минимума, аналогично если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, x_0 — точка максимума. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$ нужно сравнить значения функции в критических точках, лежащих на отрезке, и на концах отрезка.

1107. Показать, что точка $x = 0$ есть точка минимума функции $y = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1$.

1108°. Исходя непосредственно из определения возрастающей и убывающей функции и точек максимума и минимума, показать, что функция $y = x^3 - 3x + 2$ возрастает в точке $x_1 = 2$, убывает в точке $x_2 = 0$, достигает максимума в точке $x_3 = -1$ и минимума в точке $x_4 = 1$.

1109. Так же, как в задаче 1108, показать, что функция $y = \cos 2x$ возрастает в точке $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, убывает в точке $x_2 = \frac{\pi}{6}$, достигает максимума в точке $x_3 = 0$ и минимума в точке $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

1110. Не пользуясь понятием производной, выяснить поведение данной функции в точке $x = 0$:

1) $y = 1 - x^4$;
2) $y = x^4 - x^3$;
3) $y = \sqrt[3]{x}$;
4) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$;
6) $y = |\operatorname{tg} x|$;
7) $y = |\ln(x+1)|$;
8) $y = e^{-|x|}$;
9) $y = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1111. Показать, что функция $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ возрастает в точке $x_1 = 2$, убывает в точке $x_2 = -4$ и не имеет стационарных точек.

1112. Выяснить поведение функции $y = \sin x + \cos x$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ и $x_4 = 2$.

1113°. Выяснить поведение функции $y = x - \ln x$ в точках $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = e$ и $x_4 = 1$ и показать, что если данная функция возрастает в точке $x = a > 0$, то она убывает в точке $\frac{1}{a}$.

1114. Выяснить поведение функции $y = x \operatorname{arctg} x$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 0$.

1115. Выяснить поведение функции

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

в точках $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ и $x_3 = 0$.

§ 4.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

4.2.1. Теоремы Ролля и Лагранжа

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, существует $\xi \in (a, b): \; f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), существует $\xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Отсюда $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ (формула Лагранжа).

1116. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на отрезке $[-1, 2]$.

1117. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

1118°. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = 4^{\sin x}$ на отрезке $[0, \pi]$.

1119. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на отрезке $[1, 2]$.

1120°. Функция $y = \frac{2-x^2}{x^4}$ принимает равные значения на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде на отрезке $[-1, 1]$ в нуль не обращается, и объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.

1121. Функция $y = |x|$ принимает равные значения на концах отрезка $[-a, a]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде на отрезке $[-a, a]$ в нуль не обращается, и объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.

1122. Доказать теорему: если уравнение

$$a_0 x^2 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

имеет положительный корень $x = x_0$, то уравнение

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

также имеет положительный корень и притом меньший x_0.

1123. Дана функция $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, где m и n — целые положительные числа. Не вычисляя производной, показать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, 1)$.

1124. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + c = 0$ не может иметь двух различных корней в интервале $(0, 1)$.

1125°. Не находя производной функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $f'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

1126. Показать, что функция $f(x) = x^n + px + q$ не может иметь более двух действительных корней при четном n и более трех при нечетном n.

1127. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \sin 3x$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

1128. Написать формулу Лагранжа для функции $y = x(1 - \ln x)$ на отрезке $[a, b]$.

1129. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \arcsin 2x$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

1130°. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = x^n$ на отрезке $[0, a]$; $n > 0$, $a > 0$.

1131. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$.

1132. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенства $\frac{a-b}{a} \leqslant \ln \frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}$ при условии $0 \leqslant b \leqslant a$.

1133°. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенства $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \beta} \leqslant \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \alpha}$ при условии $0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1134. Доказать с помощью формулы Лагранжа справедливость при $a \geqslant b$ неравенств $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$, если $n > 1$, и неравенств противоположного смысла, если $n < 1$.

1135. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема при любом x. Напишем для нее формулу Лагранжа на отрезке $[0, x]$: $f(x) - f(0) = x f'(\xi)$ $(0 < \xi < x)$. Будем иметь: $x^2 \sin \frac{1}{x} = x\left(2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}\right)$, откуда $\cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - x \sin \frac{1}{x}$. Заставим теперь x стремиться к нулю, тогда будет стремиться к нулю и ξ, и мы получаем: $\lim\limits_{\xi \to 0} \cos \frac{1}{\xi} = 0$.

Объяснить этот парадоксальный результат.

1136°. Применяя на отрезке $[1; 1{,}1]$ к функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x$, найти приближенное значение $\operatorname{arctg} 1{,}1$.

В задачах 1137–1141, используя формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

вычислить приближенные значения данных выражений.

1137. $\arcsin 0{,}54$.

1138. $\lg 11$. Сравнить с табличным значением.

1139. $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ при $x = 0{,}2$.

1140. $\lg 7$, зная $\lg 2 = 0{,}3010$ и $\lg 3 = 0{,}4771$. Сравнить результат с табличным.

1141. $\lg 61$. Сравнить результат с табличным.

1142. Убедиться в том, что применяя формулу

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

к вычислению логарифма от $N + 0{,}01N$, т. е. полагая

$$\lg(N + 0{,}91N) = \lg N + \frac{0{,}43429}{N + \frac{0{,}01}{2}N} \cdot 0{,}01N = \lg N + \frac{0{,}43429}{100{,}5},$$

допускаем погрешность, меньшую 0,00001, т. е. получаем пять верных цифр после запятой, если только $\lg N$ дан с пятью верными цифрами.

4.2.2. Поведение функций в интервале

1143. Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале $(-2, 1)$.

1144. Показать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в интервале $(0, 1)$ и убывает в интервале $(1, 2)$. Построить график данной функции.

1145. Показать, что функция $y = x^3 + x$ везде возрастает.

1146. Показать, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ везде убывает.

1147. Показать, что функция $y = \frac{x^2-1}{x}$ возрастает в любом интервале, не содержащем точки $x = 0$.

1148°. Показать, что функция $y = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ изменяется монотонно в любом интервале, не содержащем точек разрыва функции.

***1149.** Доказать неравенство $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ при условии

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

1150. Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$$

и построить по точкам ее график в интервале $(-2, 4)$.

1151. Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^4 - 2x^2 - 5.$$

В задачах 1152–1164 найти интервалы монотонности функций.

1152°. $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.
1153. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$.
1154. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.
1155. $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.
1156. $y = x - e^x$.
1157. $y = x^2e^{-x}$.
1158. $y = \frac{1}{\ln x}$.
1159. $y = 2x^2 - \ln x$.
1160°. $y = x - 2\sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.
1161. $y = 2\sin x + \cos 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.
1162. $y = x + \cos x$.
1163. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
1164°. $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

В задачах 1165–1184 найти экстремумы функций.

1165. $y = 2x^3 - 3x^2$.
1166. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.
1167. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.
1168. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8^2}$.
1169. $y = \frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$.
1170°. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$.
1171. $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.
1172. $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.
1173. $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.
1174. $y = \sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$.
1175°. $y = x - \ln(1+x)$.
1176. $y = x - \ln(1+x^2)$.
1177. $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
1178. $y = (x^2-2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.
1179. $y = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{x}$.
1180°. $y = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2})\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$.
1181. $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.
1182. $y = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cos x + \sin x - \frac{x^2-x}{4}$ $(\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.
1183. $y = \frac{2-x}{\pi}\cos\pi(x+3) = \frac{1}{\pi^2}\sin\pi(x+3)$ $(0 < x < 4)$.
1184°. $u = ae^{px} + be^{-px}$.

В задачах 1185–1195 найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных отрезках и в указанных интервалах.

1185. $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2, 2]$.

1186. $y = x + 2\sqrt{x}$; $[0, 4]$.

1187°. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; $[-1, 2]$.

1188. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; $[-1, 1]$.

1189. $y = \sqrt{100 - x^2}$ $(-6 \leqslant x \leqslant 8)$.

1190. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

1191. $y = \frac{x-1}{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

1192. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$ $(0 < x < 1)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

1193. $y = \sin 2x - x$ $\left(-\frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1194°. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ $\left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$.

1195. $y = x^x$ $(0{,}1 \leqslant x < +\infty)$.

1196. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.

1197. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

4.2.3. Неравенства

В задачах 1198–1207 доказать справедливость неравенств.

1198°. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ $(x > 1)$.

1199. $e^x > 1 + x$ $(x \neq 0)$.

1200. $x > \ln(1 + x)$ $(x > 0)$.

1201. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x > 1)$.

1202. $2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$.

1203°. $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$.

1204. $\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$ $(x > 0)$.

1205. $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $(x > 0)$.

1206. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

1207. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$ $(x \neq 0)$.

4.2.4. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

Для решения задач подобного рода нужно выбрать одну из неизвестных величин, определить ее естественную область определения, выразить через эту величину и известные величины, которая должна принять наибольшее (наименьшее) значение (*целевую функцию*), и исследовать ее на наибольшее и наименьшее значение.

1208. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

1209. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

1210°. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

1211. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^2, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

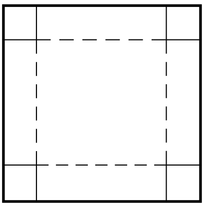

Рис. 4.1

1212. Из углов квадратного листа картона размером 18×18 см^2 нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 4.1), получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?

1213. Разрешить предыдущую задачу для прямоугольного листа размером 8×5 см^2.

1214°. Объем правильной треугольной призмы равен v. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

1215. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме v каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

1216. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

1217. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

1218°. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

1219. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

1220. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

1221. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

1222°. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

1223. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

1224. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B ($AB = a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? (Момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.)

1225. Расходы топлива для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

1226°. Три пункта A, B и C расположены так, что $\angle ABC = 60°$. Из пункта A выходит автомобиль, а одновременно из пункта B — поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд — по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?

1227. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

1228. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

1229. В данный сегмент круга вписать прямоугольник наибольшей площади.

1230. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскость основания цилиндра и конуса должны совпадать).

1231. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

1232°. Найти угол при вершине осевого сечения конуса наименьшей боковой поверхности, описанного около данного шара.

1233. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

1234. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R (центр основания конуса лежит в центре шара).

1235. Какова должна быть высота конуса, вписанного в шар радиуса R, для того чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

1236. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

1237°. Через данную точку $P(1, 4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

1238. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1239. Найти наименьший по площади эллипс, описанный около данного прямоугольника (площадь эллипса с полуосями a и b равна πab).

1240. Через какую точку эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, составленного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

1241. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1, 4)$ и $B(3, 0)$. Найти на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

1242. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка на расстоянии a от вершины. Указать абсциссу x ближайшей к ней точки кривой.

1243°. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

1244. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

1245. Ряд опытов привел к n различным значениям x_1, $x_2, \ldots, x_n$ для исследуемой величины A. Часто принимают в качестве значений A такое значение x, что сумма квадратов отклонений его от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет наименьшее значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию.

1246°. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

1247. Прямо над центром круговой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

1248. На отрезке длиной l, соединяющем два источника света силы I_1 и I_2, найти наименее освещенную точку.

1249. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения был наибольшим)?

1250. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой F. Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. Под каким углом φ к горизонту надо приложить силу F, чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.

1251. Скорость течения воды по круглой трубе прямо пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу R, вычисляемому по формуле $R = \frac{S}{p}$, где S — площадь сечения потока воды в трубе, а p — смоченный (подводный) периметр сечения трубы. Степень заполнения трубы водой характеризуется центральным углом, опирающимся на горизонтальную поверхность текущей воды. При какой степени заполнения трубы скорость течения воды будет наибольшей? (Корни получающегося при решении задачи трансцендентного уравнения найти графически.)

1252°. На странице книги печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

***1253.** Коническая воронка, радиус основания которой R, а высота H, наполнена водой. В воронку опущен тяжелый шар. Каким должен быть радиус шара, чтобы объем воды, вытесненной из воронки погруженной частью шара, был наибольшим?

1254. Вершина параболы лежит на окружности радиуса R, ось параболы направлена по диаметру. Каков должен быть параметр параболы, чтобы площадь сегмента, ограниченного параболой и ее общей с окружностью хордой, была наибольшей? [Площадь симметричного параболического сегмента равна двум третям произведения его основания на «стрелку» (высоту).]

1255. Конус, радиус основания которого R, а высота H, пересечен плоскостью, параллельной образующей. Каково должно быть расстояние между линией пересечения этой плоскости с плоскостью основания конуса и центром основания конуса, для того чтобы площадь сечения была наибольшей? (См. предыдущую задачу.)

1256. Для какой точки P параболы $y^2 = 2px$ отрезок нормали в P, расположенный внутри кривой, имеет наименьшую длину?

1257. Показать, что касательная к эллипсу, отрезок которой между осями имеет наименьшую длину, делится в точке касания на две части, соответственно равные полуосям эллипса.

1258°. Доказать, что в эллипсе расстояние от центра до любой нормали не превосходит разности полуосей. (Удобно воспользоваться параметрическим заданием эллипса.)

1259. В прямоугольной системе координат xOy даны точка (a, b) и кривая $y = f(x)$. Показать, что расстояние между постоянной точкой (a, b) и переменной $(x, f(x))$ может достигнуть экстремума только в направлении нормали к кривой $y = f(x)$.

П е р в о о б р а з н о й функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции: $F'(x) = f(x)$.

В задачах 1260–1261 показать (при помощи дифференцирования и без него), что данные функции являются первообразными одной и той же функции.

1260. $y = \ln ax$ и $y = \ln x$.

1261. $y = 2\sin^2 x$ и $y = -\cos 2x$.

1262. $y = (e^x + e^{-x})^2$ и $y = (e^x - e^{-x})^2$.

***1263.** Показать, что функция

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

есть константа (т. е. не зависит от x). Найти значение этой константы.

1264°. Показать, что функция $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ есть константа при $x \geqslant 1$. Найти значение этой константы.

1265. Показать, что функция

$$y = \arccos\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} - 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

где $0 < b \leqslant a$, есть константа при $x \geqslant 0$. Найти значение этой константы.

1266. Убедиться в том, что функции $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ и $e^x \operatorname{ch} x$ отличаются одна от другой на постоянную величину. Показать, что каждая из данных функций является первообразной для функции e^{2x}.

§ 4.3. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

4.3.1. Экстремумы

Критическая точка x_0, в которой $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), является точкой минимума (максимума).

В задачах 1267–1275 найти экстремумы данных функций, пользуясь второй производной.

1267. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ $(a > 0)$.

1268. $y = x^2(a - x)^2$.

1269°. $y = x + \frac{a^2}{x}$ $(a > 0)$.

1270. $y = x + \sqrt{1 - x}$.

1271. $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

1272. $y = \operatorname{ch} ax$.

1273. $y = x^2e^{-x}$.

1274. $y = \frac{x}{\ln}$.

1275°. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1276. При каком значении a функция $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ имеет экстремум при $x = \frac{\pi}{3}$? Будет ли это максимум или минимум?

1277. Найти значения a и b, при которых функция $y = a\ln x + bx^2 + x$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Показать, что при этих значениях a и b данная функция имеет минимум в точке x_1 и максимум в точке x_2.

4.3.2. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на отрезке $[a, b]$, если для любых x_1, $x_2 \in [a, b]$ дуга графика функции лежит ниже (выше) хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Если $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) < 0$) на интервале (a, b), то $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на этом интервале. В условиях задач данного задачника выпуклая вверх кривая называется *выпуклой*, выпуклая вниз — *вогнутой* (эта терминология не общепринята). Точка, в которой меняется направление выпуклости графика функции, называется *точкой* *перегиба*. В точке перегиба $f''(x)$ равна нулю или не существует. Достаточным условием точки перегиба является изменение знака второй производной.

1278. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ в окрестностях точек $(1, 11)$ и $(3, 3)$.

1279. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = \operatorname{arctg} x$ в окрестностях точек $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

1280°. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = x^2 \ln x$ в окрестностях точек $(1, 0)$ и $\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{2}{e^4}\right)$.

1281. Показать, что график функции $4y = x \operatorname{arctg} x$ везде вогнутый.

1282. Показать, что график функции $y = \ln(x^2 - 1)$ везде выпуклый.

1283. Доказать, что если график функции везде выпуклый или везде вогнутый, то эта функция не может иметь более одного экстремума.

1284°. Пусть $P(x)$ — многочлен с положительными коэффициентами и четными показателями степеней. Показать, что график функции $y = P(x) + ax + b$ везде вогнутый.

1285. Линии $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ вогнуты на интервале (a, b). Доказать, что на данном интервале:

а) линия $y = \varphi(x) + \psi(x)$ вогнута;

б) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и имеют общую точку минимума, то линия $y = \varphi(x)\psi(x)$ вогнута.

1286. Выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале (a, b):

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0;$
2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0;$
3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0;$
4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0.$

В задачах 1287–1300 найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графиков данных функций.

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$

1288. $y = (x + 1)^4 + e^x.$

1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$

1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$

1291°. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$

1292. $y = (x + 2)^6 + 2x + 2.$

1293. $y = \frac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a > 0)$.

1294. $y = a - \sqrt[3]{x-b}$.

1295. $y = e^{\sin x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. $y = \ln(1+x^2)$.

1297. $y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}$ $(a > 0)$.

1298. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$.

1299. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

1300. $y = x^4(12 \ln x - 7)$.

1301°. Показать, что линия $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

1302. Показать, что точки перегиба линии $y = x \sin x$ лежат на линии $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

1303. Показать, что точки перегиба линий $y = \frac{\sin x}{x}$ лежат на линии $y^2(4+x^4) = 4$.

1304. Убедиться в том, что графики функций $y = \pm e^{-x}$ и $y = e^{-x} \sin x$ (кривая затухающих колебаний) имеют общие касательные в точках перегиба линии $y = e^{-x} \sin x$.

1305. При каких значениях a и b точка $(1, 3)$ служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2$?

1306°. Выбрать α и β так, чтобы линия $x^2 y + \alpha x + \beta y = 0$ имела точку $A(2; 2{,}5)$ точкой перегиба. Какие еще точки перегиба она будет иметь?

1307. При каких значениях a график функции $y = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

1308. Доказать, что абсцисса точки перегиба графика функции не может совпадать с точкой экстремума этой функции.

1309. Доказать, что у любой дважды дифференцируемой функции, между двумя точками экстремума лежит по крайней мере одна абсцисса точки перегиба графика функции.

1310. На примере функции $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ проверить, что между абсциссами точек перегиба графика функции может и не быть точек экстремума (ср. с предыдущей задачей).

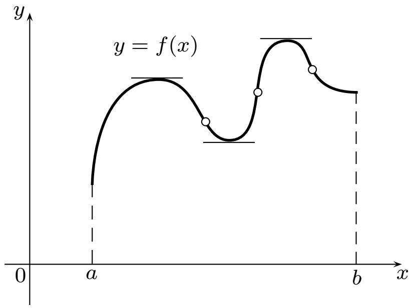

Рис. 4.2

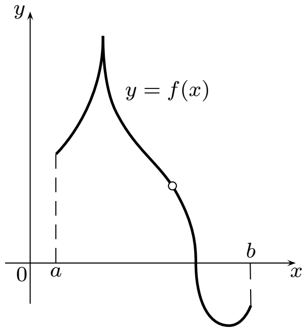

Рис. 4.3

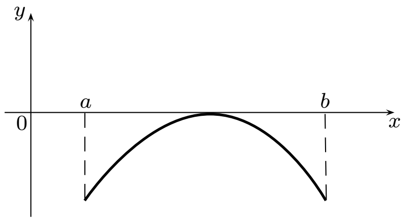

Рис. 4.4

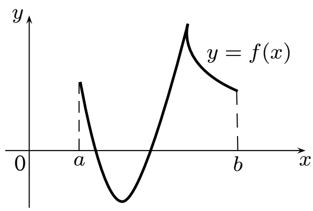

Рис. 4.5

1311. По графику функции (рис. 4.2) выяснить вид графиков ее первой и второй производных.

1312. То же сделать по графику функции (рис. 4.3).

1313. Выяснить вид графика функции по данному графику ее производной (рис. 4.4).

1314. Выяснить вид графика функции по данному графику ее производной (рис. 4.5).

1315. Линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Убедиться в том, что значениям t, при которых выражение $\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{\varphi'}$ меняет знак (штрихом обозначено дифференцирование по t), а $\varphi'(t) \neq 0$, соответствуют точки перегиба линии.

1316. Найти точки перегиба линии $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

1317. Найти точки перегиба линии $x = e^t$, $y = \sin t$.

§ 4.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

4.4.1. Теорема Коши и правило Лопиталя

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $\varphi'(x) \neq 0$ на (a,b), то существует $\xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Правило Лопиталя. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, $\varphi'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

при условии, что последний предел существует. Другие неопределенности ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty, \ldots$) предварительно приводятся к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

1318. Написать формулу Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = \ln x$ на отрезке $[a,b]$, $0 < a < b$.

1319. Написать формулу Коши для функций $f(x) = e^{2x}$ и $\varphi(x) = 1 + e^x$ на отрезке $[a,b]$.

1320. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = x^3$ и $\varphi(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[1,2]$.

1321. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = x + \cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1322. Доказать, что если на отрезке $[a,b]$ имеет место соотношение $|f'(x)| \geqslant |\varphi'(x)|$ и $\varphi'(x)$ не обращается в нуль, то справедливо также соотношение $|\Delta f(x)| \geqslant |\Delta\varphi(x)|$, где $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$, а x и $x + \Delta x$ — произвольные точки отрезка $[a,b]$.

1323. Доказать, что на отрезке $\left[x, \frac{1}{2}\right]$ ($x \geqslant 0$) приращение функции $y = \ln(1+x^2)$ меньше приращения функции $y = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, x\right]$ — наоборот: $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1 + x^2)$. Пользуясь последним соотношением, показать, что на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

В задачах 1324–1364 найти пределы.

1324. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

1325. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

1331. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1337. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a}$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

1339. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$.

1341. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}$.

1342. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^4}{6\sin x-6x+x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

1345. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

1346. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^n e^{-x})$.

1347. $\lim\limits_{x\to\infty} [(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x]$.

1348. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x\sin\frac{a}{x}\right]$.

1349. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$.

1350. $\lim\limits_{\varphi\to a} \left[(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}\right]$.

1351. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

1352. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

1353. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

1354. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[n]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x\right]$.

1355. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right]$.

1357. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1358. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

1362. $\lim\limits_{x\to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$.

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right]$.

1365. Проверить, что $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ существует, но не может быть вычислен по правилу Лопиталя.

1366. Значение какой функции (при достаточно больших значениях x) больше: $a^x x^a$ или x^x?

1367. Значения какой функции (при достаточно больших значениях x) больше: $f(x)$ или $\ln f(x)$, при условии, что $f(x)\to\infty$ при $x\to\infty$.

1368. Пусть $x\to 0$. Доказать, что $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ — бесконечно малая первого порядка относительно x.

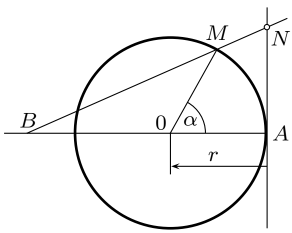

Рис. 4.6

1369. Пусть $x\to 0$. Доказать, что $\ln(1+x) - e\ln\ln(e+x)$ — бесконечно малая второго порядка относительно x.

1370. К окружности радиуса r проведена касательная в точке A (рис. 4.6) и на ней отложен отрезок AN, длина которого равна длине дуги AM. Прямая MN

пересекает продолжение диаметра AO в точке B. Установить, что

$$OB = \frac{r(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha - \alpha},$$

где α — радианная мера центрального угла, соответствующего дуге AM, и показать, что $\lim_{\alpha\to 0} OB = 2r$.

4.4.2. Асимптотическое изменение функций и асимптоты линий

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ *асимптотически равны* друг другу при $x \to \infty$, если $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. При $k \neq 0$ асимптота *наклонная*, при $k = 0$ — *горизонтальная*. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой тогда и только тогда, когда $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой*, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

1371. Проверить, исходя непосредственно из определения, что прямая $y = 2x + 1$ есть асимптота линии $y = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

1372. Проверить, исходя непосредственно из определения, что прямая $x + y = 0$ есть асимптота линии $x^2y + xy^2 = 1$.

1373. Доказать, что линии $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$ и $y = \frac{x^2}{x-1}$ асимптотически приближаются друг к другу при $x \to \pm\infty$.

1374. Доказать, что функции $f(x) = \sqrt{x^6 + 2x^4 + 7x^2 + 1}$ и $\varphi(x) = x^3 + x$ асимптотически равны друг другу при $x \to +\infty$. Воспользоваться этим обстоятельством и вычислить приближенно $f(115)$ и $f(120)$. Какую погрешность сделаем, положив $f(100) = \varphi(100)$?

В задачах 1375–1391 найти асимптоты данных линий.

1375. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1376. $xy = a$.

1377. $y = \frac{1}{x^2-4x+5}$.

1378. $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$.

1379. $2y(x+1)^2 = x^3$.

1380. $y^3 = a^3 - x^3$.

1381. $y^2 = 6x^2 + x^3$.

1382. $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$.

1383. $xy^2 + x^2y = a^3$.

1384. $y(x^2 - 3bx + 2b^2) = x^3 - 3ax^2 + a^3$.

1385. $(y + x + 1)^2 = x^2 + 1$.

1386. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

1387. $y = xe^x$.

1388. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

1389. $y = x \operatorname{arcsec} x$.

1390. $y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

1391. $y = \frac{xf(x)+a}{f(x)}$, где $f(x)$ — многочлен ($a \neq 0$).

1392. Линия задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Доказать, что асимптоты, не параллельные координатным осям, могут быть только при тех значениях $t = t_0$, при которых одновременно

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{t \to t_0} \psi(t) = \infty.$$

При этом, если уравнение асимптоты есть $y = ax + b$, то

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \qquad b = \lim_{t \to t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)].$$

Как найти асимптоты, параллельные координатным осям?

1393. Найти асимптоты линии $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{t}{t+1}$.

1394. Найти асимптоты линии $x = \frac{2e^t}{t-1}$, $y = \frac{te^t}{t-1}$.

1395. Найти асимптоты линии $x = \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Найти асимптоты декартова листа $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Найти асимптоты линии $x = \frac{t-8}{t^2-4}$, $y = \frac{3}{t(t^2-4)}$.

4.4.3. Общее исследование функций и линий

При исследовании функций следует определить:

1) область определения функции;

2) нули функции, точки разрыва, знаки функции;

3) асимптоты;

4) первую производную, интервалы монотонности, точки экстремума;

5) вторую производную, выпуклость, точки перегиба.

В задачах 1398–1464 провести полное исследование данных функций и начертить их графики.

1398. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

1399. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

1400. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y(x-1)(x-2)(x-3) = 1$.

1402. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.
1403. $y = (x^2-1)^3$.
1404. $y = 32x^2(x^2-1)^3$.
1405. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
1406. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
1407. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
1408. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.
1409. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.
1410. $y(x-1) = x^3$.
1411. $y(x^3-1) = x^4$.
1412. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.
1413. $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.
1414. $xy = (x^2-1)(x-2)$.
1415. $(y-x)x^4 + 8 = 0$.
1416. $y = \frac{x}{e^x}$.
1417. $y = x^2e^{-x}$.
1418. $y = \frac{e^x}{x}$.
1419. $y = x - \ln(x+1)$.
1420. $y = \ln(x^2+1)$.
1421. $y = x^2e^{-x^2}$.
1422. $y = x^3e^{-x}$.
1423. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
1424. $y = \frac{1}{e^x-1}$.
1425. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.
1426. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
1427. $y = x + \sin x$.
1428. $y = x\sin x$.
1429. $y = \ln\cos x$.
1430. $y = \cos x - \ln\cos x$.
1431. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.
1432. $y = \frac{1}{e^{x^2-4x+3}}$ (без отыскания точек перегиба).
1433. $y = e^{\sin x} - \sin x$ (без отыскания точек перегиба).
1434. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.
1435. $y^3 = x^2(x^2-4)^3$.
1436. $(3y+x)^3 = 27x$.
1437. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$.
1438. $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$.

1439. $y^3 = 6x^2 - x^3$.
1440. $(y - x)^2 = x^5$.
1441. $(y - x^2)^2 = x^5$.
1442. $y^2 = x^3 + 1$.
1443. $y^2 = x^3 - x$.
1444. $y^2 = x(x - 1)^2$.
1445. $y^2 = x^2(x - 1)$.
1446. $y^2 = \frac{x^3-2}{3x}$.
1447. $x^2y + xy^2 = 2$.
1448. $y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$ (строфоида) $(a > 0)$.
1449. $9y^2 = 4x^3 - x^4$.
1450. $25y^2 = x^2(4 - x^2)^3$.
1451. $y^2 = x^2 - x^4$.
1452. $x^2y^2 = 4(x - 1)$.
1453. $y^2(2a - x) = x^3$ (циссоида) $(a > 0)$.
1454. $x^2y^2 = (x - 1)(x - 2)$.
1455. $x^2y^2 = (a + x)^3(a - x)$ (конхоида) $(a > 0)$.
1456. $16y^2 = (x^2 - 4)^2(1 - x^2)$.
1457. $y^2 = (1 - x^2)^3$.
1458. $y^2x^4 = (x^2 - 1)^3$.
1459. $y^2 = 2exe^{-2x}$.
1460. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.
1461. $y = e^{\operatorname{tg} x}$.
1462. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$.
1463. $y = 1 - xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ при $x \neq 0$, $y = 1$ при $x = 0$.
1464. $y = x^2 - 4|x| + 3$.

В задачах 1465–1469 исследовать функции, заданные параметрически, и начертить их графики.

1465. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.
1466. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.
1467. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.
1468. $x = te^t$, $y = te^{-t}$.
1469. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $4y = 2a\sin t - a\sin 2t$ (кардиоида).

В задачах 1470–1477 исследовать линии, уравнения которых заданы в полярных координатах.

1470. $\rho = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза).
1471. $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$.
1472. $\rho = a(1 + \operatorname{tg}\varphi)$.

1473. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида).

1474. $\rho = a(1+b\cos v)$ $(a>0,\ b>1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (жезл).

1476. $\rho = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

В задачах 1478–1481 исследовать и построить линии, предварительно приведя их уравнения к полярным координатам.

1478. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

1479. $(x^2+y^2)x = a^2y$.

1480. $x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

1481. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2$.

4.4.4. Решение уравнений

1482. Проверить, что уравнение $x^3-x^2-8x+12=0$ имеет один простой корень $x_1=-3$ и один двукратный корень $x_2=2$.

1483. Проверить, что уравнение $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$ имеет два двукратных корня $x_1=1$ и $x_2=-2$.

1484. Убедиться в том, что уравнение $x\arcsin x=0$ имеет только один действительный корень $x=0$ и притом двукратный.

1485. Показать, что корни уравнения $x\sin x=0$ имеют вид $y=k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, причем значению $k=0$ соответствует двукратный корень. Какова кратность остальных корней?

1486. Показать, что уравнение $x^3-3x^2+6x-1=0$ имеет единственный действительный простой корень, принадлежащий интервалу $(0,1)$, и найти этот корень с точностью до 0,1, пользуясь методом проб.

1487. Показать, что уравнение $x^4+3x^2-x-2=0$ имеет два (и только два) действительных простых корня, принадлежащих соответственно интервалам $(-1,0)$ и $(0,1)$. С помощью метода проб найти эти корни с точностью до 0,1.

1488. Показать, что уравнение $f(x)=a\neq0$, где $f(x)$ — многочлен с положительными коэффициентами, показатели степеней всех членов которого нечетны, имеет один и только один действительный корень (который может быть и кратным). Рассмотреть случай, когда $a=0$. Найти с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3+3x-1=0$, комбинируя метод проб с методом хорд.

1489. Доказать теорему: для того чтобы уравнение $x^3 + px + q = 0$ имело три простых действительных корня, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты p и q удовлетворяли неравенству $4p^3 + 27q^2 < 0$. Найти с точностью до 0,01 все корни уравнения $x^3 - 9x + 2 = 0$, комбинируя метод проб с методом хорд.

1490. Показать, что уравнение $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ имеет два (и только два) действительных простых корня, принадлежащих соответственно интервалам (0,1) и $(1, 2)$. Комбинируя метод хорд с методом касательных, найти эти корни с точностью до 0,01.

1491. Показать, что уравнение $x^5 + 5x + 1 = 0$ имеет единственный действительный простой корень, принадлежащий интервалу $(-1, 0)$, и найти этот корень с точностью до 0,01, комбинируя метод хорд с методом касательных.

В задачах 1492–1497 приближенные значения корней уравнения следует считать комбинированием трех методов: метода проб, метода хорд и метода касательных. (При необходимости следует пользоваться таблицами значений функций, входящих в уравнение.)

1492. Показать, что уравнение $xe^x = 2$ имеет только один действительный корень, который принадлежит интервалу (0,1), и найти этот корень с точностью до 0,01.

1493. Показать, что уравнение $x\ln x = a$ не имеет вовсе действительных корней при $a < -\frac{1}{e}$, имеет один действительный двукратный корень при $a = -\frac{1}{e}$, два действительных простых корня при $-\frac{1}{e} < a < 0$ и один действительный простой корень при $a \geqslant 0$. Найти корень уравнения $x\ln x = 0{,}8$ с точностью до 0,01.

1494. Показать, что так называемое уравнение Кеплера $x\ \varepsilon\sin x + a$, где $0 < \varepsilon < 1$, имеет один простой действительный корень, и найти этот корень с точностью до 0,001 при $\varepsilon = 0{,}538$ и $a = 1$.

1495. Показать, что уравнение $a^x = ax$ при $a > 1$ всегда имеет два (и только два) действительных и положительных корня, причем один корень равен 1, а второй корень меньше, больше или равен 1 в зависимости от того, будет ли a больше, меньше или равно e. Найти с точностью до 0,01 второй корень этого уравнения при $a = 3$.

1496. Показать, что уравнение $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, где $a \neq 0$, имеет один действительный корень. Найти с точностью до 0,001 корень этого уравнения при $a = 1$.

1497. При каком основании a системы логарифмов существуют числа, равные своим логарифмам? Сколько таких чисел может быть? Найти такое число (с точностью до 0,01) при $a = \frac{1}{2}$.

§ 4.5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

4.5.1. Формула Тейлора для многочленов

Формула Тейлора: если функция имеет на отрезке $[a, b]$ n производных, то

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \\ + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!},$$

где $0 < \theta < 1$.

При $a = 0$ получаем *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \\ + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!},$$

где $0 < \theta < 1$.

Если $f(x)$ — многочлен степени n, формула Тейлора содержит $n+1$ слагаемое.

1498. Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням двучлена $x - 4$.

1499. Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.

1500. Разложить многочлен $x^{10} - 3x^5 + 1$ по степеням двучлена $x - 1$.

1501. Функцию $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ разложить по степеням x, пользуясь формулой Тейлора.

1502. $f(x)$ — многочлен четвертой степени. Зная, что $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{\mathrm{IV}}(2) = 24$, вычислить $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

4.5.2. Формула Тейлора

1503. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y = \frac{1}{x}$ при $x_0 = -1$.

1504. Написать формулу Тейлора (формулу Маклорена) n-го порядка для функции $y = xe^x$ при $x_0 = 0$.

1505. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

1506. Написать формулу Тейлора $2n$-го порядка для функции $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ при $x_0 = 0$.

1507. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y = x^3 \ln x$ при $x_0 = 1$.

1508. Написать формулу Тейлора $2n$-го порядка для функции $y = \sin^2 x$ при $x_0 = 0$.

1509. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

1510. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 2-й степени.

1511. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ при $x_0 = 0$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

1512. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x_0 = 1$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

* **1513.** Доказать, что число θ в остаточном члене формулы Тейлора 1-го порядка

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)$$

стремится к $\frac{1}{3}$ при $h \to 0$, если $f'''(x)$ непрерывна при $x = a$ и $f'''(a) \neq 0$.

4.5.3. Некоторые применения формулы Тейлора

В задачах 1514–1519 выяснить поведение данных функций в указанных точках.

1514. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ в точке $x = 0$.

1515. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ в точке $x = 0$.

1516. $y = 2\cos x + x^2$ в точке $x = 0$.

1517. $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ в точке $x = 1$.

1518. $y = 6\sin x + x^2$ в точке $x = 0$.

1519. $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4$ в точке $x = 0$.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Найти первые три члена разложения по формуле Тейлора при $x_0 = 1$. Подсчитать приближенно $f(1{,}03)$.

1521. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Найти первые три члена разложения по формуле Тейлора при $x_0 = 2$. Подсчитать приближенно $f(2{,}02)$ и $f(1{,}97)$.

1522. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Найти первые три члена разложения $f(x)$ по степеням $x-1$ и найти приближенно $f(1{,}005)$.

1523. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Найти первые три члена разложения по степеням $x - 2$. Вычислить приближенно $f(2,1)$. Вычислить $f(2,1)$ точно и найти абсолютную и относительную погрешности.

1524. Проверить, что при вычислении значений функции e^x при $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ по приближенной формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ допускаемая погрешность меньше 0,01. Пользуясь этим, найти $\sqrt{e}$ с тремя верными цифрами.

1525. Пользуясь приближенной формулой $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, найти $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ и оценить погрешность.

1526. Проверить, что для углов, меньших 28°, погрешность, которая получится, если вместо $\sin x$ взять выражение $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, будет меньше 0,000001. Пользуясь этим, вычислить $\sin 20^\circ$ с шестью верными цифрами.

1527. Найти $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,001. Убедиться в том, что для достижения указанной точности достаточно взять соответствующую формулу Тейлора 2-го порядка.

1528. Пользуясь приближенной формулой

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

найти $\ln 1{,}5$ и оценить погрешность.

§ 4.6. КРИВИЗНА

Предел отношения угла $\Delta\alpha$ между положительными направлениями касательных к кривой в точках M и N к длине дуги $MN = \Delta s$ называется *кривизной* кривой в точке M:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Формулы для вычисления кривизны: для явного задания функции $y = f(x)$

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

для параметрического задания $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

где все производные берутся по t, в полярных координатах

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Величина $R = \frac{1}{|k|}$ называется *радиусом кривизны*. Предельное положение окружности, проведенной через точки M, P, Q кривой при $P \to M$ и $Q \to M$ называется *окружностью кривизны*. Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны. Центр окружности кривизны (ξ, η) (центр кривизны) лежит на нормали к кривой, проведенной через точку M в сторону вогнутости кривой,

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Кривая, состоящая из всех центров кривизны данной кривой (геометрическое место центров кривизны) называется *эволютой* данной кривой. Исходная кривая называется *эвольвентой* своей эволюты. Если в формулах координат центра кривизны рассматривать ξ и η как координаты точки эволюты, получим параметрическое уравнение эволюты.

В задачах 1529–1536 найти кривизну данных линий.

1529. Гиперболы $xy = 4$ в точках $(2, 2)$.

1530. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в вершинах.

1531. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в начале координат.

1532. $y^2 = 8x$ в точке $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$.

1533. $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$.

1534. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ в начале координат.

1535. $y = \sin x$ в точках, соответствующих экстремальным значениям функции.

1536. Декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ в точке $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$.

В задачах 1537–1542 найти кривизну данных линий в произвольной точке (x, y).

1537. $y = x^3$.
1538. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
1539. $y = \ln\sec x$.
1540. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
1541. $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$.
1542. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

В задачах 1543–1549 найти кривизну данных линий.

1543. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ при $t = 1$.

1544. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при $t = t_1$.

1545. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

1546. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ в произвольной точке.

1547. $\rho = a^{\varphi}$ в точке $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

1548. $\rho = a\varphi$ в произвольной точке.

1549. $\rho = a\varphi^k$ в произвольной точке.

1550. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той его точке, в которой отрезок касательной между осями координат делится точкой касания пополам.

1551. Показать, что радиус кривизны параболы равен удвоенному отрезку нормали, заключенному между точками пересечения нормали с параболой и ее директрисой.

1552. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

1553. Показать, что радиус кривизны лемнискаты $\rho = a^2\cos 2\varphi$ обратно пропорционален соответствующему полярному радиусу.

1554. Найти окружность кривизны параболы $y = x^2$ в точке $(1, 1)$.

1555. Найти окружности кривизны гиперболы $xy = 1$ в точке $(1, 1)$.

1556. Найти окружности кривизны линии $y = e^x$ в точке $(0, 1)$.

1557. Найти окружность кривизны линии $y = \operatorname{tg} x$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

1558. Найти окружность кривизны циссоиды $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ в точке (a, a).

В задачах 1559–1562 найти вершины (точки, в которых кривизна принимает экстремальное значение) данных линий.

1559. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

1560. $y = \ln x$.

1561. $y = e^x$.

1562. $x = a(3\cos t + \cos 3t)$, $y = a(3\sin t + \sin 3t)$.

1563. Найти наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

1564. Показать, что кривизна в точке P линии $y = f(x)$ равна $|y'' \cos^3 \alpha|$, где α — угол, образуемый касательной к линии в точке P с положительным направлением абсцисс.

1565. Показать, что кривизну линии в произвольной точке можно представить выражением $k = \left|\frac{d\sin\alpha}{dx}\right|$, где α имеет то же значение, что и в предыдущей задаче.

1566. Функция $f(x)$ определена так: $f(x) = x^3$ в интервале $-\infty < x \leqslant 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ в интервале $1 < x < +\infty$. Каковы должны быть a, b, c, для того чтобы линия $y = f(x)$ имела везде непрерывную кривизну.

1567. Даны (рис. 4.7): дуга AM окружности с радиусом, равным 5, и с центром в точке $(0, 5)$ и отрезок BC прямой, соединяющей точки $B(1, 3)$ и $C(11, 66)$. Требуется точку M соединить с точкой B дугой параболы так, чтобы линия $AMBC$ имела везде непрерывную кривизну. Найти уравнение искомой параболы (взять параболу 5-го порядка).

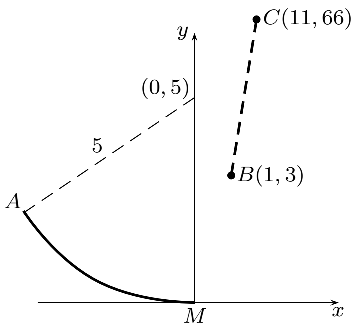

Рис. 4.7

В задачах 1568–1574 найти координаты центра кривизны и уравнение эволюты для данных линий.

1568. Парабола n-го порядка $y = x^n$.

1569. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1570. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1571. Полукубическая парабола $y^3 = ax^2$.

1572. Парабола $x = 3t$, $y = t^2 - 6$.

1573. Циссоида $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

1574. Линия $x = a(1 + \cos^2 t) \sin t$, $y = a \sin^2 t \cos t$.

1575. Показать, что эволюта трактрисы

$$x = -a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \qquad y = a \sin t$$

есть цепная линия.

1576. Показать, что эволюта логарифмической спирали $\rho = a^\varphi$ представляет собой точно такую же спираль, только повернутую на некоторый угол. Можно ли так подобрать a, чтобы эволюта совпала с самой спиралью?

1577. Показать, что любую эвольвенту окружности можно получить путем поворота одной из них на соответствующий угол.

1578. Показать, что расстояние некоторой точки циклоиды от центра кривизны соответствующей точки эволюты равно удвоенному диаметру производящего круга.

1579. Эволютой параболы $y^2 = 4px$ служит полукубическая парабола $py^2 = \frac{4}{27}(x - 2p)^3$. Найти длину дуги полукубической параболы от острия до точки (x, y).

1580. Найти длину эволюты эллипса, полуоси которого равны a и b.

1581. Показать, что эволютой астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ является астроида вдвое бóльших линейных размеров, повернутая на 45°. Воспользовавшись этим, вычислить длину дуги данной астроиды.

***1582.** Показать, что эволюта кардиоиды $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ есть также кардиоида, подобная данной. Воспользовавшись этим, найти длину дуги всей кардиоиды.

***1583.** Доказать теорему: если кривизна дуги некоторой линии либо только возрастает, либо только убывает, то окружности кривизны, соответствующие различным точкам этой дуги, не пересекаются и лежат одна внутри другой.

Глава 5

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 5.1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Конечное множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ называется *разбиением* отрезка $[a, b]$. Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой*. Если существует предел интегральных сумм при стремлении наибольшего Δx_i к нулю, не зависящий ни от разбиения, ни от выбора точек ξ_i, функция называется *интегрируемой*, а предел интегральных сумм называется *определенным интегралом*,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Непрерывная функция на отрезке интегрируема. Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, площадь криволинейной трапеции $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если $f(x) \leqslant 0$, $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если фигура ограничена графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$,

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

1592. Выразить с помощью интеграла площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:
1) осями координат, прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2 + 1$;
2) осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и линией $4y = e^x + 2$ $(b > a)$;
3) осью абсцисс и дугой синусоиды $y = \sin x$, соответствующей первому полупериоду;
4) параболами $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$;
5) параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;
6) линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

1593°**.** Фигура ограничена осью абсцисс и прямыми $y = 2x$, $x = 4$, $x = 6$. Найти площади входящих и выходящих n-ступенчатых фигур («лестниц»), разбивая отрезок $[4, 6]$ на равные части. Убедиться, что оба полученных выражения стремятся при неограниченном возрастании n к одному и тому же пределу S — площади фигуры. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене данной площади площадями входящих и выходящих n-ступенчатых «лестниц».

1594. Криволинейная трапеция с основанием $[2, 3]$ ограничена параболой $y = x^2$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене данной площади площадью входящей 10-ступенчатой «лестницы».

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис. 5.1).

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

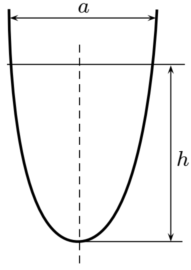

Рис. 5.1

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугами парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600°. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3, 5)$, осью ординат и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v = 2t + 4$ см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Найти путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату времени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен путь, пройденный за первые 10 с?

1605°. Известно, что сила, противодействующая растяжению пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Растягивая пружину на 4 см, произвели работу 10 *Дж*. Какая работа будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произвести работу 20 *Дж*. Насколько можно растянуть пружину, затратив работу 80 *Дж*?

1607. Скорость v радиоактивного распада является заданной функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m радиоактивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 до момента T_1:

1) приближенно — суммой;
2) точно — интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение:

1) приближенно — суммой;
2) точно — интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно — суммой, точно — интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I — тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1:

1) приближенно — суммой;
2) точно — интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ *В* до $E = 40$ *В*. Сопротивление цепи $R = 20$ *Ом*. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612°. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ *В* в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ *В*; сопротивление цепи $R = 60$ *Ом*. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 *В*. Сопротивление цепи равно 100 *Ом*. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку:

1) приближенно — с помощью суммы;
2) точно — с помощью интеграла.

1615.

1) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см.
2) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинаковыми.

5.1.1. Вычисление интегралов суммированием

1616. Непосредственным суммированием и последующим переходом к пределу вычислить интеграл $\int_0^1 e^x\,dx$. (Интервал интегрирования делить на n равных частей.)

1617°. Непосредственным суммированием и последующим переходом к пределу вычислить $\int_a^b x^k\,dx$, где k — целое положительное число (интервал интегрирования делить на части так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию).

1618. При помощи формулы, полученной в предыдущей задаче, вычислить интегралы:

1) $\int_0^{10} x\,dx$;
2) $\int_{a-2}^{a+2} x\,dx$;
3) $\int_{a/2}^{a} x^2\,dx$;
4) $\int_a^{2a} \frac{b^2x^2}{a^2}\,dx$;
5) $\int_0^a (3x^2 - x + 1)\,dx$;
6) $\int_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2}\,dx$;
7) $\int_1^{2,5} (2x+1)^2\,dx$;
8) $\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$;
9) $\int_{-a}^{0} \frac{(a+x)^2}{a}\,dx$;
10) $\int_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2\,dx$;
11) $\int_0^2 x^3\,dx$;
12) $\int_1^3 \frac{x^4}{3}\,dx$;
13) $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right)\,dx$.

***1619.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)$ при $k>0$. Вычислить приближенно $1^5+2^5+\ldots+100^5$.

1620. Непосредственным суммированием и последующим переходом к пределу вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. (Интервал интегрирования делить на части так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию.)

1621°. Для интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ составить интегральную сумму, разбив интервал интегрирования на n равных частей. Сравнив с результатом предыдущей задачи, вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

***1622.** Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{an}\right)$ (a — целое число). Подсчитать приближенно $\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+$ $+\frac{1}{300}$.

***1623.** Непосредственным суммированием и последующим переходом к пределу вычислить интегралы:

1) $\int_0^a xe^x\,dx$; 2) $\int_1^a \ln x\,dx$; 3)° $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$;

[В 1) разбивать интервал интегрирования на равные части, в 2) и 3) — как в задаче 1620.]

§ 5.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

5.2.1. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ на $[a, b]$,

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

1624. Выразить при помощи интеграла площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды, соответствующей интервалу $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, и осью абсцисс.

1625. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = x^3$ и прямой $y = x$.

1626. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 6x - 3$.

1627. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3 - x$ и $y = x^4 - 1$.

5.2.2. Оценка интеграла

1628. Доказать, что интеграл $\int_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ меньше чем $\frac{5}{6}$.

1629. Доказать, что интеграл $\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$ заключен между $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ и $2e^2$.

В задачах 1630–1635 оценить интегралы.

1630. $\int_{1,5}^{3,5} \frac{x^2\,dx}{x-1}$.

1631. $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

1632. $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \sin^2 x)\,dx$.

1633. $\int_{1/2}^{5/2} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

1634. $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1635. $\int_{1/e}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

1636. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

1) $\int_0^1 x^2\,dx$ или $\int_0^1 x^3\,dx$; 2) $\int_1^2 x^2\,dx$ или $\int_1^2 x^3\,dx$?

1637. Выяснить, какой из интегралов больше:

1) $\int_0^1 2^{x^2}\,dx$ или $\int_0^1 2^{x^3}\,dx$;
2) $\int_1^2 2^{x^2}\,dx$ или $\int_1^2 2^{x^3}\,dx$;
3) $\int_1^2 \ln x\,dx$ или $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$;
4) $\int_3^4 \ln x\,dx$ или $\int_3^4 (\ln x)^2\,dx$?

1638.$^\circ$ Доказать, что $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$, воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_1(x)]^2\,dx}\sqrt{\int\limits_a^b [f_2(x)]^2\,dx}.$$

Убедиться, что применение общего правила дает менее точную оценку.

1639. Доказать, исходя из геометрических соображений, следующие предложения:

1) если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ возрастает и имеет вогнутый график, то
$$(b-a)f(a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$
2) если функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ возрастает и имеет выпуклый график, то
$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b).$$

1640. Оценить интеграл $\int_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$, пользуясь результатом задачи 1639.

1641.$^\circ$ Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, пользуясь:

1) основной теоремой об оценке интеграла;
2) результатом задачи 1639;
3) неравенством Коши–Буняковского (см. задачу 1638).

5.2.3. Среднее значение функции

Среднее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$

$$M = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

1642. Вычислить среднее значение линейной функции $y = kx + b$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Найти точку, в которой функция принимает это значение.

1643. Вычислить среднее значение квадратичной функции $4y = ax^2$ на отрезке $[x_1, x_2]$. В скольких точках интервала функция принимает это значение?

1644. Вычислить среднее значение функции $y = 2x^2 + 3x + 3$ на отрезке $[1, 4]$.

1645. Исходя из геометрических соображений, вычислить среднее значение функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ на отрезке $[-a, a]$.

1646. Исходя из геометрических соображений, указать среднее значение непрерывной нечетной функции на интервале, симметричном относительно начала координат.

1647. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его $a = 1$ м, глубина $h = 1{,}5$ м (см. рис. 5.1). Найти среднюю глубину желоба.

1648°. Напряжение электрической цепи в течение минуты равномерно увеличивается от $E_0 = 100$ *В* до $E_1 = 120$ *В*. Найти среднюю силу тока за это время. Сопротивление цепи 10 *Ом*.

1649. Напряжение электрической цепи равномерно падает, убывая на 0,4 *В* в минуту. Начальное напряжение в цепи 100 *В*. Сопротивление в цепи 5 *Ом*. Найти среднюю мощность в течение первого часа работы.

5.2.4. Интеграл с переменным пределом

Если $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, то $F'(x) = f(x)$.

1650. Вычислить интегралы с переменным верхним пределом:

1) $\int_0^x x^2\,dx$;
2) $\int_a^x x^5\,dx$;
3) $\int_1^x \left(\frac{x^3}{5} - \frac{x^4}{4}\right) dx$.

1651. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием s и временем t, если известно, что за первые 3 с тело прошло 18 см, а движение началось в момент $t = 0$.

1652. Сила, действующая на материальную точку, меняется равномерно относительно пройденного пути. В начале пути она равнялась 100 Н, а когда точка переместилась на 10 м, сила возросла до 600 Н. Найти функцию, определяющую зависимость работы от пути.

1653°. Напряжение электрической цепи равномерно меняется. При $t = t_1$ оно равно E_1, при $t = t_2$ оно равно E_2. Сопротивление R постоянно, самоиндукцией и емкостью пренебрегаем. Выразить работу тока как функцию времени t, прошедшего от начала опыта.

1654. Теплоемкость тела зависит от температуры так: $c = c_0 + \alpha t + \beta t^2$. Найти функцию, определяющую зависимость количества тепла, полученного телом при нагревании от нуля до t, от температуры t.

1655. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y = x^2$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значение приращения ΔS и дифференциала dS площади трапеции при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

1656. Криволинейная трапеция ограничена линией $y = \sqrt{x^2 + 16}$, осями координат и подвижной ординатой. Найти значение дифференциала dS площади трапеции при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$.

1657. Криволинейная трапеция ограничена линией $y = x^3$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значение приращения ΔS площади, ее дифференциала dS, абсолютную (α) и относительную $\left(\delta = \frac{\alpha}{\Delta S}\right)$ погрешности, возникающие при замене приращения дифференциалом, если $x = 4$, а Δx принимает значения 1; $0,1$ и $0,01$.

1658. Найти производную от функции $y = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt$ при $x = 1$.

1659. Найти производную от функции $y = \int_0^x \sin x\,dx$ при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

1660. Чему равна производная от интеграла с переменным нижним и постоянным верхним пределом по нижнему пределу?

1661. Найти производную от функции $y = \int_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ при $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}$.

1662°. Найти производную по x от функции $y = \int_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1663. Найти производную по x от функции:

1) $\int_2^{e^x} \frac{\ln z}{z}\, dz$;

2) $\int_{x^2}^{1} \ln x\, dx$.

***1664.** Найти производную по x от функции $\int_x^{2x} \ln^2 x\, dx$.

1665. Найти производную по x от функции y, заданной неявно: $\int_0^y e^t\, dt + \int_0^x \cos t\, dt = 0$.

1666. Найти производную по x от функции y, заданной параметрически:

1) $x = \int_0^t \sin t\, dt,\ y = \int_0^t \cos t\, dt$;

2) $x = \int_1^{t^2} t \ln t\, dt,\ y = \int_{t^2}^1 t^2 \ln t\, dt$.

1667. Найти значение второй производной по z от функции $y = \int_0^{z^3} \frac{dx}{1+x^3}$ при $z = 1$.

1668. При каком значении x функция $I(x) = \int_0^x xe^{-x^2}\, dx$ имеет экстремум? Чему он равен?

1669. Найти кривизну в точке $(0, 0)$ линии, заданной уравнением: $y = \int_0^x (1+t)\ln(1+t)\, dt$.

1670. Найти точки экстремумов и точки перегиба графика функции $y = \int_0^x (x^2 - 3x + 2)\, dx$. Построить график этой функции.

1671. По графикам функций, данным на рис. 5.2 и 5.3, выяснить вид графиков их первообразных.

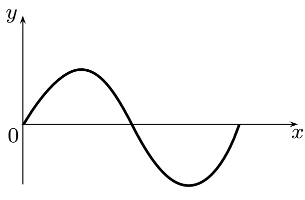

Рис. 5.2

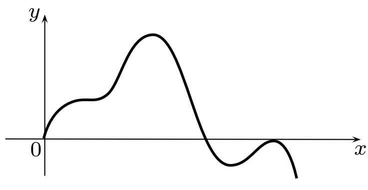

Рис. 5.3

5.2.5. Формула Ньютона–Лейбница

Если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

1672. Вычислить интегралы:
1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$;
2) $\int_4^1 \frac{dx}{x^3}$;
3) $\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx$;
4) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\,dx$;
5) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$;
6) $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$;
7) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{ax}}$;
8) $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$;
9) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ $(a>0,\ b>0)$;
10) $\int_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz$.

1673. Вычислить интегралы:
1) $\int_0^\pi \sin x\,dx$;
2) $\int_0^\pi \cos x\,dx$ (объяснить геометрический смысл полученного результата);
3) $\int_0^3 e^x\,dx$;
4) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$;
5) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;
6) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1674. Функция $f(x)$ имеет равные значения в точках $x{=}a$ и $x{=}b$ и непрерывную производную. Чему равен $\int_a^b f'(x)\,dx$?

1675°. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ составляет с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$ и в точке с абсциссой $x=b$ — угол $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить $\int_a^b f''(x)\,dx$ и $\int_a^b f'(x)f''(x)\,dx$; $f''(x)$ предполагается непрерывной.

Глава 6

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 6.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7. $\int a^x\,dx = a^x \ln a + C$,

   $\int e^x\,dx = e^x + C$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$
13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
14. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
15. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Примечание: Во всех формулах $a > 0$.

Основные правила интегрирования

1) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, A – постоянная.
2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.
3) Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.
   В частности, $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

В задачах 1676–1702, воспользовавшись основной таблицей интегралов и простейшими правилами интегрирования, найти интегралы.

1676. $\int \sqrt{x}\,dx$.
1677. $\sqrt[m]{x^n}\,dx$.
1678. $\int \frac{dx}{x^2}$.
1679. $\int 10^x\,dx$.

1680°. $\int a^x e^x \, dx$.
1681. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$.
1683. $\int 3{,}4x^{-0{,}17} \, dx$.
1684. $\int (1 - 2u) \, du$.
1685. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) \, dx$.
1686°. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} \, dx$.
1687. $\int \left(2x^{-1{,}2} + 3x^{-0{,}8} - 5x^{0{,}38}\right) \, dx$.
1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 \, dz$.
1689. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} \, dx$.
1690. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} \, dx$.
1691. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} \, dx$.
1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.
1693. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} \, dx$.
1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} \, dx$.
1695. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx$.
1696°. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.
1697. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$.
1698. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} \, dx$.
1699. $\int \frac{(1+2x^2) \, dx}{x^2(1+x^2)}$.
1700°. $\int \frac{(1+x)^2 \, dx}{x(1+x^2)}$.
1701. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$.
1702. $\int (\arcsin x + \arccos x) \, dx$.

В задачах 1703–1780 найти интегралы, воспользовавшись теоремой об инвариантности формул интегрирования.

1703. $\int \sin x \, d(\sin x)$.
1704. $\int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x)$.
1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$.
1706. $\int (x+1)^{15} \, dx$.
1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.
1708°. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ $(c \neq 1)$.
1709. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} \, dx$.
1710. $\int \sqrt{8-2x} \, dx$.
1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} \, dx$.

1712. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx.$
1713. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$
1714. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx.$
1715°. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$
1716. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}}.$
1717. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}.$
1718. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}.$
1719. $\int \sin^3 x\cos x\,dx.$
1720. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}.$
1721. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$
1722°. $\int \cos^3 x\sin 2x\,dx.$
1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx.$
1724. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}.$
1725. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}.$
1726. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}.$
1727. $\int \cos 3x\,d(3x).$
1728. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}.$
1729. $\int \cos 3x\,dx.$
1730. $\int(\cos\alpha-\cos 2x)\,dx.$
1731. $\int \sin(2x-3)\,dx.$
1732. $\int \cos(1-2x)\,dx.$
1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}\,dx.$
1734°. $\int e^x\sin(e^x)\,dx.$
1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$
1736. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}.$
1737. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}.$
1738. $\int \frac{dx}{2x-1}.$
1739. $\int \frac{dx}{cx+m}.$
1740. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$
1741°. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}.$
1742. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}.$
1743. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2}.$
1744. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$
1745. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
1746°. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx.$

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx.$

1748. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

1749. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx.$

1751. $\int e^{\sin x}\,d(\sin x).$

1752. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx.$

1753. $\int a^{3x}\,dx.$

1754. $\int a^{-x}\,dx.$

1755. $\int e^{-3x+1}\,dx.$

1756. $\int e^{x^2}x\,dx.$

1757.$^\circ$ $\int e^{-x^3}x^2\,dx.$

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}.$

1759. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

1760. $\int \frac{dx}{1+9x^2}.$

1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1762.$^\circ$ $\int \frac{dx}{2x^2+9}.$

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

1764. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}.$

1765. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}.$

1766. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}.$

1767. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}.$

1768. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}.$

1769.$^\circ$ $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}.$

1770. $\int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a^2+\sin^2\alpha}.$

1771. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx.$

1772. $\int (e^x+1)^3\,dx.$

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1774. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx.$

1775.$^\circ$ $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx.$

1777. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$

1778. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}.$

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1780. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

В задачах 1781–1790 найти интегралы, выделив целую часть подынтегральной дроби.

1781. $\int \frac{x}{x+4}\,dx.$
1782°. $\int \frac{x}{2x+1}\,dx.$
1783. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx.$
1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx.$
1785. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x-2}.$
1786. $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx.$
1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\,dx.$
1788. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx.$
1789°. $\int \frac{x^4}{1-x}\,dx.$
1790. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}.$

В задачах 1791–1807 найти интегралы, использовав прием разложения подынтегрального выражения и прием выделения полного квадрата.

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}.$
1792. $\int \frac{dx}{x(x+1)}.$
1793. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}.$
1794°. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}.$
1795. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx.$
1796. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}.$
1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}.$
1798. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$
1799. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$
1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$
1801. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$
1802°. $\int \frac{dx}{x-x^2-2{,}5}.$
1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$
1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$
1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$
1806. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$
1807°. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$

В задачах 1808–1831 найти интегралы, использовав формулы тригонометрии для преобразования подынтегрального выражения.

1808. $\int \cos^2 x\,dx$.
1809. $\int \sin^2 x\,dx$.
1810. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.
1811. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.
1812°. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$.
1813. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$.
1814. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\,dx$.
1815. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x\cos x}$.
1816. $\int \cos x \sin 3x\,dx$.
1817. $\int \cos 2x \cos 3x\,dx$.
1818. $\int \sin 2x \sin 5x\,dx$.
1819°. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$.
1820. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
1821. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$.
1822. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$.
1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$.
1824°. $\int \frac{\sin^3 \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}\,d\alpha$.
1825. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.
1826. $\int \cos^3 x\,dx$.
1827. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.
1828. $\int \sin^5 x\,dx$.
1829°. $\int \sin^4 x\,dx$.
1830. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.
1831. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

§ 6.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

6.2.1. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

В задачах 1832–1868 найти интегралы.

1832. $\int x \sin 2x\,dx$.

1833. $\int x\cos x\,dx$.
1834. $\int xe^{-x}\,dx$.
1835°. $\int x\cdot 3^x\,dx$.
1836. $\int x^n\ln x\,dx$ $(n\neq -1)$.
1837. $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$.
1838. $\int \arccos x\,dx$.
1839. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.
1840°. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.
1841. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.
1842. $\int x\cos^2 x\,dx$.
1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$.
1844. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
1845. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.
1846°. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.
1847. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.
1848. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.
1849. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.
1850. $\int x^2e^{-x}\,dx$.
1851. $\int x^3e^x\,dx$.
1852°. $\int x^2a^x\,dx$.
1853. $\int x^3\sin x\,dx$.
1854. $\int x^2\cos^2 x\,dx$.
1855. $\int \ln^2 x\,dx$.
1856. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.
1857°. $\int \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$.
1858. $\int (\arcsin x)^2\,dx$.
1859. $\int (\operatorname{arctg}x)^2x\,dx$.
1860. $\int e^x\sin x\,dx$.
1861. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$.
1862. $\int e^{ax}\cos nx\,dx$.
1863°. $\int \sin\ln x\,dx$.
1864. $\int \cos\ln x\,dx$.
* **1865.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
* **1866.** $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.
1867. $\int \frac{x^2e^x\,dx}{(x+2)^2}$.
1868. $\int x^2e^x\sin x\,dx$.

6.2.2. Замена переменной

Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

В задачах 1869–1904 найти интеграл.

1869°. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (подстановка $x+1=z^2$)

1870. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

1871. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx$.

1872. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

1874. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

1875. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$.

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$.

1877. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

1878. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$.

1879°. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (подстановка $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.

1881. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

1882. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1883. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (подстановка $e^x+1=z^4$).

1884°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1885. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$.

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x\,dx$.

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\,dx$.

1888. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

1889. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2-4)^2}$.

1890°. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$, или $x=a\operatorname{tg} z$, или $x=a\operatorname{sh} z$).

1891. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x=a\sin z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$, или $x=\frac{a}{\cos z}$, или $x=a\operatorname{ch} z$).

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$.

1894. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1895. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$

1896°. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

1897. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

1898. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

1899. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$

1900. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

1901°. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$

***1902.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}.$

***1903.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

***1904.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}.$

В задачах 1905–1909 найти интегралы, применив сначала замену переменной, а потом интегрирование по частям.

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1906°. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx.$

1907. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$

1908. $\int \frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

6.2.3. Разные задачи

В задачах 1910–2011 найти интегралы.

1910. $(x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$

1911. $\int(1+e^{3x})^2e^{3x}\,dx.$

1912. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1913°. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx.$

1914. $\int \sqrt{1-e^x}e^x\,dx.$

1915. $\int x\cos x^2\,dx.$

1916. $\int \left(2-3x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{3}}\,dx.$

1917. $\int \frac{2x^4-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$

1918. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}4.$

1919. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

1920. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}4.$

1921°. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1922. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$

1923. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1924. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}.$

1925. $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}.$

1926. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx.$

1927. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx.$

1928. $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$

1929°. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx.$

1930. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^6 x}.$

1931. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\sec^4 x\,dx.$

1932. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2\,dx.$

1933. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}.$

1934. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}.$

1935°. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}.$

1936. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}.$

1937. $\int x\sqrt{a+x}\,dx.$

1938. $\int (\sqrt{x}+\cos x)^2\,dx.$

1939. $\int a^{mx}b^{nx}\,dx.$

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}.$

1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}.$

1942. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$

1943°. $\int \frac{8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$

1944. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}.$

1945. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

1946. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}.$

1947. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1948. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}.$

1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx.$

1950. $\int \frac{(3-4x)\,dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}\,dx.$

1951°. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}.$

1952. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

1953. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}.$

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$.

1955.° $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$.

1956. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1957. $\int x \sin x \cos x\,dx$.

1958. $\int x^2 \cos \omega x\,dx$.

1959. $\int e^{2x} x^3\,dx$.

1960.° $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\,dx$.

1961. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x}\,dx$.

1962. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)^2}$.

1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}\,dx$.

1964. $\int \frac{dx}{1-\sin 3x}$.

1965. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{4-\cos^2 2x}$.

1966.° $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$.

1968. $\int e^{e^x+x}\,dx$.

1969. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$.

1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx$.

1971.° $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1972. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

1973. $\int e^x \sin^2 x\,dx$.

1974. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin 2x}$.

1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$.

1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi}$.

1977.° $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

1978. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{(1+\sin^2 x)}\,dx$.

1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$.

1980. $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$.

1981. $\int x^3 e^{x^2}\,,dx$.

1982.° $\int e^{-x^2} x^5\,dx$.

1983. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1984. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}\,dx$.

1986. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$.

1987. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx$.

1988°. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx.$

1989. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}.$

1990. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}.$

1991. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}.$

1993°. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1994. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx.$

***1995.** $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5}.$

1996. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}.$

1997. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx.$

1998. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}.$

1999°. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}.$

2000. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$

2001. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$

2002. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}.$

2003°. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx.$

2004. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

2005. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx.$

***2006.** $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx.$

2007. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}.$

2008°. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx.$

2009. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

2010. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx.$

2011. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}.$

§ 6.3. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

6.3.1. Дробно-рациональные функции

Приведем функцию, выделяя целую часть, к виду $R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, где степень $P(x)$ меньше, чем степень $Q(x)$. Пусть $Q(x) = (x-a)^k \ldots (x-d)^n \ldots (x^2+px+q)^l \ldots (x^2+rx+s)^m$, причем квадратичные множители не имеют вещественных корней, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots+\frac{B_1}{x-d}+\ldots+\frac{B_n}{(x-d)^n}+\ldots$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\ldots+\frac{R_mx+S_m}{(x^2+rx+s)^m},$$

причем коэффициенты в числителях дробей могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Для этого обе части равенства умножаются на общий знаменатель $Q(x)$, после чего приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях x (первый способ) или подставляются подходящие значения x (второй способ).

В задачах 2012–2067 найти интегралы.

1. *Знаменатель имеет только действительные различные корни.*

2012. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$.

2013°. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$.

2014. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

2015. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

2017. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

2018. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

2019°. $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

2020. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$.

2021. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

2. *Знаменатель имеет только действительные корни; некоторые корни — кратные.*

2022. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$.

2023. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

2024. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

2025°. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

2026. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$.

2027. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

2028. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

2029. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$.

2030. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$.

2031°. $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

2032. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$.

2033. $\int \frac{(7x^3-9)\,dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$.

2035. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

3. *Знаменатель имеет комплексные различные корни.*

2036. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

2037°. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

2038. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

2039. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$.

2040. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

2041. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

2042. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

2043°. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

2044. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

2045. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

2046. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

* **2047.** $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

4. *Знаменатель имеет комплексные кратные корни.*

2048°. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

2049. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

2050. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

2051. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2052. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

2053. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

2054°. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2055. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

5. *Метод Остроградского.*

Если $Q(x)$ имеет кратные корни,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_2(x)$ — произведение всех простых делителей $Q(x)$, $Q_1(x) = Q(x) : Q_2(x)$, $X(x)$ и $Y(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых на единицу меньше соответственно степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Данное тождество дифференцируется, после чего находятся неопределенные коэффициенты многочленов $X(x)$ и $Y(x)$.

2056. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

2057. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

2058. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx$.

2059°. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

2060. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)^3}$.

2061. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

2062. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

2063. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2064. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

2065. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$.

2066. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx$.

2067. $\int \frac{9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}$.

6.3.2. Некоторые иррациональные функции

В задачах 2068–2089 найти интегралы.

1. *Функции вида* $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$.

Данные интегралы находятся с помощью подстановки

$$z^n = \frac{ax+b}{a_1x+b_1},$$

где n — наименьшее общее кратное чисел m, p, ...

2068. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

2069. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

2070°. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}4.$

2071. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

2072. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

2073. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

2074. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

***2075.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

2. *Дифференциальные биномы* $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

По теореме Чебышева, данные интегралы вычисляются в конечном виде только в следующих трех случаях:

1) p — целое число;
2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число, здесь применяется подстановка $a+bx^n=z^s$, где s — знаменатель дроби p;
3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, здесь применяется подстановка $ax^{-n}+b=z^s$, где s имеет тот же смысл, что и в случае 2).

2076. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx.$

2077°. $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\,dx.$

2078. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$

2079. $\int$ ‘$x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

2081. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2082. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$

2083°. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2084. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$

2085. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

2086. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$

2087. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$

2088°. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$

2089. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

6.3.3. Тригонометрические функции

1) Интегралы вида $I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m, n — натуральные числа. Если $m=2k+1$ — нечетное положительное

число, $\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int \sin^{2k} x \cos^n x\, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$, аналогично поступаем, если n — нечетное положительное число. Если m и n — четные положительные числа, используем формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

2) Интегралы вида $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m, n — целые отрицательные числа одинаковой четности, и $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$ вычисляются с помощью подстановки $u = \operatorname{tg} x$, $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = u^2 + 1$.

3) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ могут быть вычислены с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

В задачах 2009–2131 найти интегралы.

2090. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

2091. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$.

2092. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

2093. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx$.

2094. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$.

2095.° $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

2096. $\int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos x)^2}$.

2097. $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^2}$.

2098. $\int \cos^6 x\, dx$.

2099. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

2100. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

2101. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

2102.° $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

2103. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$

2104. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

2105. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

2106. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$.

2107. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$.

2108. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x \cos 3x}$.

2109. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.
2110°. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.
2111. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.
2112. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx$.
2113. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1-\operatorname{tg} x}$.
2114. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$.
2115. $\int \frac{dx}{(\sin x+2\sec x)^2}$.
2116. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.
2117. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.
2118°. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.
2119. $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$.
2120. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.
2121. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$.
2122. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}$.
2123. $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$.
2124°. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x\cos x}\, dx$.
* **2125.** $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\, dx$.
2126. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$.
2127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.
2128. $\int \sqrt{1+\operatorname{cosec} x}\, dx$.
2129. $\int \frac{(\cos 2x-3)\, dx}{\cos^4 x\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$.
2130. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$.
2131°. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

6.3.4. Гиперболические функции

В задачах 2132–2150 найти интегралы.

2132. $\int \operatorname{ch} x\, dx$.
2133. $\int \operatorname{sh} x\, dx$.
2134. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.
2135. $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}$.
2136. $\int (\operatorname{ch}^2 ax\operatorname{sh}^2 ax)\, dx$.
2137°. $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx$.
2138. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx$.

2139. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.
2140. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.
2141. $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx$.
2142. $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.
2143°. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$.
2144. $\int \operatorname{cth}^5 x\,dx$.
2145. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.
2146. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.
2147. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$.
2148. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.
2149°. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.
2150. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

6.3.5. Рациональные функции от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$

В задачах 2151–2174 найти интегралы.

* **2151.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.
2152. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.
2153. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.
2154. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.
2155. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$.
2156°. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.
2157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.
2158. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.
2159. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$.
2160°. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.
2161. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.
2162. $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.
2163. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.
2164. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.
2165. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
2166°. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.
2167. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.
2168. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.
2169. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$.

2170. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.
2171°. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.
2172. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$.
2173. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.
2174. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

6.3.6. Разные функции

В задачах 2175–2230 найти интегралы.

2175°. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{12}}$.
2176. $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.
2177. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$.
2178. $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.
2179. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.
2180. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$.
2181. $\int \frac{dx}{1-x^4}$.
2182. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.
2183°. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$.
2184. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$.
2185. $\int x^2\operatorname{sh} x\,dx$.
2186. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx$.
2187. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$.
2188°. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.
2189. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.
2190. $\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx$.
2191. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$.
2192. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.
2193°. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.
2194. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$.
2195. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.
2196. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$.
2197. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(1+x)^3}}$.
2198. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$.
2199. $\int \frac{x^4\,dx}{x^{15}-1}$.

2200°. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

2201. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

2202. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x}$.

2203. $\int x\ln(1+x^3)\,dx$.

2204. $\int \frac{(\ln x - 1)\,dx}{\ln^2 x}$.

2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$.

2206°. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$.

2207. $\int x e^{x^2}(x^2+1)\,dx$

2208. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

2209. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$.

2210. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

2211. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

2212°. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,dx$.

2213. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

2214. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

2215. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}$.

2216. $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2217. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^4}$.

2218°. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

2219. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\,dx$.

2220. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}$.

2221. $\int \frac{(e^{3x}+e^x)\,dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$.

2222. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

2223°. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$.

2224. $\int \sin^8 x\,dx$.

2225. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^3\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2226. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

2227. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2228°. $\int \frac{(x+\sin x)\,dx}{1+\cos x}$.

* **2229.** $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2230. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

Глава 7

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 7.1. СПОСОБЫ ТОЧНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

7.1.1. Непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

В задачах 2231–2258 вычислить интегралы.

2231. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$.

2232. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

2233°. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

2234. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$.

2235. $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)\,dt$.

2236. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}} - \sqrt{x}$.

2237. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x\,dx$.

2238. $\int_0^{2a} \frac{3\,dx}{2b-x}$ $(b > a > 0)$.

2239. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

2240. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

2241. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\,dx$.

2242. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$.

2243. $\int_0^{\sqrt[n]{a/2}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$.

2244°. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

2245. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$.

2246. $\int_0^{a/2} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}$.

2247. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

2248. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2249. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

2250°. $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2251. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

2252. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\,dx$.

2253. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$.

2254. $\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega x + \varphi_0)\,dx$.

2255. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

2256°. $\int_a^{\pi/4} \operatorname{ctg}^4 \varphi\,d\varphi$.

2257. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

2258. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\,dt$

В задачах 2259–2268 интегрированием по частям найти интегралы:

2259. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

2260. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

2261. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

2262°. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$.

2263. $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

2264. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

2265. $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$.

2266°. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2267. $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$.

2268. $\int_1^e \ln^3 x\,dx$.

2269°. Составить рекуррентные формулы для вычисления интегралов $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ и $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ (n — целое положительное число или нуль) и вычислить интегралы:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$;

2) $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$;

3) $\int_0^{\pi/2} \sin^{11} x\,dx$.

2270. Составить рекуррентную формулу для вычисления интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m и n — целые положительные числа или нули; исследовать частные случаи четных и нечетных значений m и n).

2271. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл $\int_{-1}^{0} x^n e^x\, dx$ (n — целое положительное число).

2272. Доказать рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n — целое положительное число) и вычислить с ее помощью интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2273. Доказать, что если $J_m = \int_1^e \ln^m x\, dx$, то $J_m = e - mJ_{m-1}$ (m — целое положительное число).

***2274.** Найти $\int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$ (p и q — целые положительные числа).

7.1.2. Замена переменной в определенном интеграле

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

В задачах 2275–2295 вычислить интегралы:

2275. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$.

2276. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x}$.

2277°. $\int_3^8 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x}}$.

2278. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$.

2279. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\, dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

2280. $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\, dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

***2281.** $\int_0^\pi \sin^6 \frac{x}{2}\, dx$.

***2282.** $\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\, dx$.

2283. $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^3}$.

2284°. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx.$

2285. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx.$

2286. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

2287. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

2288. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx.$

2289°. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

2290. $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$

2291. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}.$

2292. $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}.$

2293. $\int_{2{,}5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\,dx.$

2294°. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

2295. $\int_{\sqrt{8}/3}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$

7.1.3. Разные задачи

Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется

$$M = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

2296. Вычислить среднее значение функции $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[1,4]$.

2297. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ на отрезке $[1; 1{,}5]$.

2298. Вычислить среднее значение функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $[0,\pi]$.

2299°. Найти среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ на отрезке $[0,2]$.

2300. При каком a среднее значение функции $y = \ln x$ на отрезке $[1,a]$ равно средней скорости изменения функции на этом отрезке?

В задачах 2301–2317 вычислить интегралы:

2301. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$

2302. $\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}.$

2303. $\int_0^{1/2} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}.$

2304°. $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$

2305. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x-1)^3}}$

2306. $\int_{-a}^{a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

2307. $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx$.

2308. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

2309°. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

2310. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

2311. $\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

2312. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$

2313. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$.

2314. $\int_0^1 (\arcsin x)^4\,dx$.

2315°. $\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$.

2316. $\int_0^1 \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}$.

2317. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

2318. Показать, что $\int_0^{\pi/2} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}$, где a и b — любые действительные числа, отличные от нуля.

2319. Решить уравнение $\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

2320°. Решить уравнение $\int_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{\pi}{6}$.

2321. Убедившись в справедливости неравенств $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ при $x > e$, показать, что интеграл $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ меньше единицы, но больше 0,92.

***2322.** Показать, что $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}523 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}555$.

***2323.** Показать, что $0{,}5 < \int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leqslant \frac{\pi}{6} \approx 0{,}523$ $(n \geqslant 1)$.

2324°. Используя неравенство $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, справедливое при $x > 0$, и неравенство Коши–Буняковского (см. задачу 1638), оценить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin x}\,dx$.

***2325.** Показать, что $0{,}78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

2326. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $J(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt$ на отрезке $[-1, 1]$.

2327°. Найти точку экстремума и точки перегиба графика функции $y = \int_0^x (t-2)(t-2)^2\,dt$.

В задачах 2328–2331, не вычисляя интегралов, доказать справедливость равенств

2328. $\int_{-\pi/8}^{\pi/8} x^{10}\sin^9 x\,dx = 0$

2329. $\int_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}\,dx = 0.$

2330. $\int_{-1}^{1} e^{\cos x}\,dx = 2\int_0^1 e^{\cos x}\,dx$

2331. $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$

***2332.**

1) Показать, что если $f(t)$ — функция нечетная, то $\int_0 a^x f(t)\,dt$ — функция четная, т. е. что $\int_a^{-x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$.
2) Будет ли $\int_a^x f(t)\,dt$ функцией нечетной, если $f(t)$ — функция четная?

***2333.** Доказать справедливость равенства $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ $(x > 0)$.

2334°. Доказать тождество $\int_{1/e}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$

2335. Доказать тождество

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

2336. Доказать справедливость равенства

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$$

2337. Доказать справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2338°. Доказать, что $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$. Применить полученный результат к вычислению интегралов

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$$

***2339.** Доказать, что

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

Применить полученный результат к вычислению интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

***2340.** Показать, что если $f(x)$ — функция периодическая с периодом T, то $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ не зависит от a.

***2341.** О функции $f(x)$ известно, что она нечетная на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ и имеет период, равный T. Доказать, что $\int_a^x f(t)\,dt$ есть также периодическая функция с тем же периодом.

2342. Вычислить интеграл $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, где n — целое положительное число, двумя способами: разлагая степень двучлена по формуле для бинома Ньютона и с помощью подстановки $x = \sin\varphi$. Сравнив результаты, получить следующую формулу суммирования (C_n^k — биномиальные коэффициенты)

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

2343. Интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$ легко берется с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. Имеем $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2dz}{(1+z^2)\left(5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$

Но, с другой стороны, $-3 < -3\cos x < +3$, следовательно, $2 < 5-3\cos x < 8$ и $\frac{1}{2} > \frac{1}{5-3\cos x} > \frac{1}{8}$.

Отсюда $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,,dx > \int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x} > \int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\,dx$ и, значит. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x} > \frac{\pi}{4}$.

Найти ошибку в рассуждении.

***2344.** Пусть $I_n = \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx$ ($n > 1$ и целое). Проверить, что $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Доказать, что $\frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}$.

***2345.** Доказать справедливость равенства

$$\int_0^x e^{zx}e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz.$$

***2346.** Доказать, что

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_a^b e^{k\omega^2x^2}\,dx} = \begin{cases} 0. & \text{если } x < b, \\ +\infty. & \text{если } x = b. \end{cases}$$

($\omega > 0.$ $k > 0$, $b > a > 0$).

§ 7.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

В задачах 2347–2349 вычисления вести с точностью до $0,001$.

2347. Площадь четверти круга, радиус которого равен единице, равна $\frac{\pi}{4}$. С другой стороны, взяв единичный круг с центром в начале координат, уравнение которого $x^2+y^2=1$, и применяя для вычисления площади четверти этого круга интегрирование, получим $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, т. е. $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Пользуясь правилами прямоугольников, трапеций и правилом Симпсона, вычислить приближенно число π, разбивая отрезок интегрирования $[0,1]$ на 10 частей. Полученные результаты сравнить между собой и с табличным значением числа π

2348. Зная, что $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, вычислить приближенно число π. Результаты, полученные по различным правилам, при разбиении отрезка интегрирования на 10 частей сравнить между собой и с результатами предыдущей задачи.

2349°. Вычислить $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$, используя правило Симпсона при $n = 10$. Найти модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным. Сравнить с табличным значением.

В задачах 2350–2355 вычислить приближенно, пользуясь формулой Симпсона, интегралы, которые не могут быть найдены в конечном виде с помощью элементарных функций. Число n частичных интервалов задается в скобках

2350. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ $(n = 10)$.

2351. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ $(n = 10)$.

2352. $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ $(n = 6)$.

2353. $\int_2^{\pi/3} \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$ $(n = 10)$.

2354. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\,d\varphi$ $(n = 6)$.

2355. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $(n = 10)$.

2356. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_{1,05}^{1,35} f(x)dx$, пользуясь следующей таблицей значений функции $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

2357. Прямая линия касается берега реки в точках A и B. Для измерения площади участка между рекой и прямой AB проведены 11 перпендикуляров к AB от реки через каждые 5 м (следовательно, прямая AB имеет длину 60 м). Длины этих перпендикуляров оказались равными 3,28 м, 4,02 м; 4,64 м; 5,26 м, 4,98 м; 3,62 м; 3,82 м; 4,68 м; 5,26 м; 3,82 м; 3,24 м. Вычислить приближенное значение площади участка.

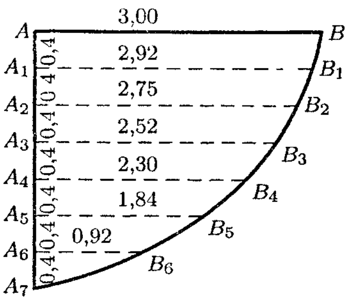

Рис. 7.1

2358. Вычислить площадь поперечного сечения судна при следующих данных (рис. 7.1):

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 =$$
$$= A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 =$$
$$= A_6A_7 = 0{,}4\,\text{м},$$
$$AB = 3\,\text{м},\quad A_1B_1 = 2{,}92\,\text{м},$$
$$A_2B_2 = 2{,}75\,\text{м},\quad A_3B_3 = 2{,}52\,\text{м},$$
$$A_4B_4 = 2{,}30\,\text{м},\quad A_5B_5 = 1{,}84\,\text{м},$$
$$A_6B_6 = 0{,}92\,\text{м}.$$

2359. Для вычисления работы пара в цилиндре паровой машины вычисляют площадь индикаторной диаграммы, представляющей собой графическое изображение зависимости между давлением пара в цилиндре и ходом поршня. На рис. 7.2 изображена индикаторная диаграмма паровой машины.

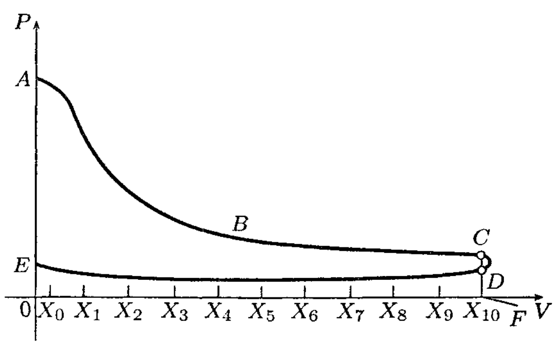

Рис 7.2

Ординаты точек линий ABC иED, соответствующие абсциссам x_0, x_1, x_2, ..., x_{10}, даны соответствующей таблицей:

Абсциссы	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ординаты линии ABC	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0
Ординаты линии ED	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8
Абсциссы	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
Ординаты линии ABC	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2	
Ординаты линии ED	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7	

Вычислить с помощью формулы Симпсона площадь $ABCDE$. Ординаты даны в миллиметрах. Длина OF=88,7 мм (точка F — общая проекция точек C и D на ось абсцисс).

В задачах 2360–2363 при нахождении пределов интегрирования необходимо воспользоваться методами приближенного решения уравнений.

2360. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами парабол $y = x^3 - 7$ и $y = -2x^2 + 3x$ и осью ординат.

2361. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^3$ и прямой $y = 7(x + 1)$.

2362. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 16 - x^2$ и полукубической параболой $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^4$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

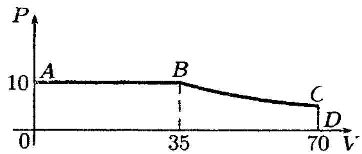

Рис. 7.3

2364. На рис. 7.3 изображена индикаторная диаграмма (упрощенная) паровой машины. Исходя из размеров, проставленных на чертеже (в мм), вычислить площадь $ABCDO$, если известно уравнение линии $BC : pv^{\gamma} = \mathrm{const}$ (линия BC называется адиабатой), $\gamma = 1{,}3$, AB — прямая, параллельная оси Ov.

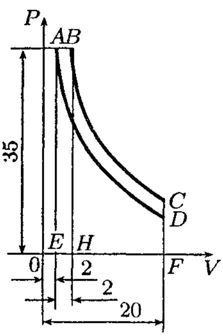

Рис. 7.4

2365. На рис. 7.4 представлена индикаторная диаграмма дизельного двигателя. Отрезок AB соответствует процессу сгорания смеси, адиабата BC — расширению, отрезок

CD — выпуску и адиабата DA — сжатию Уравнение адиабаты BC: $pv^{1,3} = \text{const}$, уравнение адиабаты AD: $pv^{1,35} = \text{const}$. Исходя из размеров, проставленных на чертеже (в мм), определить площадь $ABCD$.

§ 7.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.3.1. Интегралы с бесконечными пределами

Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом от $f(x)$*. Если предел существует и конечен, интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. Если $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ при $x \to +\infty$, то при $m > 1$ интеграл сходится, при $m \leqslant 1$ интеграл расходится.

В задачах 2366–2385 вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2366°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$.

2367. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2368. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx \ (a > 0)$.

2369. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

2370. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2371. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

2373. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$

2374°. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2375. $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2376. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

2377. $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$

2378. $\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx$.

2379°. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2380. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$.

2381. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$.

2382. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

2383. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2384°. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

2385. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

В задачах 2386–2393 исследовать сходимость интегралов

2386. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$.

2387. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$.

2388. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)}\,dx$.

2389. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$.

2390. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

2391°. $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$.

2392. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln\ln x}$.

2393. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

7.3.2. Интегралы от функций с бесконечными разрывами

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и неограничена в любой окрестности точки b, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx.$$

называется *несобственным интегралом от $f(x)$*. Если предел существует и конечен, интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. Если $f(x) \sim \frac{A}{(x-b)^m}$ при $x \to b$, то при $m < 1$ интеграл сходится, при $m \geqslant 1$ интеграл расходится.

В задачах 2394–2411 вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2394. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2395. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

2396°. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2397. $\int_0^1 x\ln x\,dx$.

2398. $\int_0^{1/e} \frac{0}{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

2399. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

2400. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2401°. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < b)$.

2402. $\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < b)$.

2403. $\int_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

2405. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2406. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

2407. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$.

2408°. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

2409. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2410. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

2411. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$

В задачах 2412–2417 исследовать сходимость интегралов.

2412. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

2413. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

2414. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2415°. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$.

2416. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

2417. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

7.3.3. Разные задачи

2418. Функция $f(x)$ в полуинтервале $[a,+\infty)$ непрерывна и $f(x) \to A \neq 0$ при $x \to +\infty$. Может ли интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходиться?

2419. При каких значениях k интеграл $\int_1^{+\infty} x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx$ будет сходящимся?

2420. При каких значениях k сходятся интегралы

1)° $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$;

2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$?

2421. При каких значениях k сходится интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b < a)$?

2422. Можно ли найти такое k, чтобы интеграл $\int_0^{+\infty} x^k\,dx$ сходился?

2423. При каких значениях k и t интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^t}\,dx$ сходится?

2424°. При каких значениях m интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ сходится?

2425. При каких значениях k интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$ сходится?

В задачах 2426–2435 вычислить несобственные интегралы

2426. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

***2427.** $\int_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2429. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ (n — целое положительное число).

2430. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n — целое положительное число).

2431°. $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx$ (n — целое положительное число)

2432. $\int_0^{1} (\ln x)^n\,dx$ (n — целое положительное число).

***2433.** $\int_0^{1} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при m:

1) четном; 2) нечетном ($m > 0$).

***2434.** $\int_0^{1} \frac{(1-x^n)}{\sqrt{x}}\,dx$ (n — целое положительное число).

2435°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0 < \alpha < 2\pi)$.

***2436.** Доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

***2437.** Доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$.

2438. Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

В задачах 2439–2448 вычислить интегралы, пользуясь формулами

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(интеграл Пуассона)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{(интеграл Дирихле)}.$$

2439. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ ($a > 0$).

2440. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

***2441.** $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

2442°. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx$ (n — целое положительное число).

2443. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$.

2444. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$.

2445. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx$ $(a > 0,\ b > 0)$

2446°. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

***2447.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$.

***2448.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$

***2449°.** Положим $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos y\,dy$. (Этот интеграл называется интегралом Лобачевского.) Доказать соотношение

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

С помощью найденного соотношения вычислить величину

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\pi/2} \ln\cos y\,dy$$

(впервые вычисленную Эйлером).

В задачах 2450–2454 вычислить интегралы.

2450. $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

2451. $\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx$.

***2452.** $\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{ctg}\,x\,dx$.

***2453.** $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx$.

2454. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Глава 8

ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

§ 8.1. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ И СТАТИКИ

8.1.1. Площадь фигуры

Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ такими, что для любых $a \leqslant x \leqslant b$ $f_1(x) \leqslant x \leqslant f_2(x)$:

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x)dx.$$

Если кривые заданы параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, данная формула также применима, если рассматривать x и y как функции параметра.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривыми $\rho = f_1(\varphi)$, $\rho = f_2(\varphi)$, $f_1(\varphi) \leqslant f_2(\varphi)$:

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx.$$

2455. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

2456°. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ и $(3, 0)$.

2457. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и нормалью к ней, наклоненной к оси абсцисс под углом $135°$.

2458. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

2459. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$.

2460. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \frac{x^3}{3}$.

2461°. Окружность $x^2 + y^2 = 8$ разделена параболой $y = \frac{x^2}{2}$ на две части. Найти площади обеих частей.

2462. Найти площади фигур, на которых парабола $y^2 = 6x$ делит окружность $x^2 + y^2 = 16$.

2463. Из круга радиуса a вырезан эллипс, бóльшая ось которого совпадает с одним из диаметров круга, а меньшая равна $2b$. Доказать, что площадь оставшейся части равна площади эллипса с полуосями a и $a - b$.

2464. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы и ее хордой, проведенной из фокуса перпендикулярно к действительной оси.

2465. Окружность $x^2 + y^2 = a^2$ разбивается гиперболой $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ на три части. Определить площади этих частей.

2466. Вычислить площади криволинейных фигур, образованных пересечением эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и гиперболы $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

2467°. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

2468. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x-1)^2$ и осью абсцисс.

2469. Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат и линией $x = y^2(y-1)$.

2470. Найти площадь части фигуры, ограниченной линиями $y^m = x^n$ и $y^n = x^m$, где m и n — целые положительные числа, расположенной в первом квадранте. Рассмотреть вопрос о площади всей фигуры в зависимости от характера четности чисел m и n.

2471.

1) Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и линией $y = x - x^2\sqrt{x}$.
2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя ветвями линии $(y-x)^2 = x^5$ и прямой $x = 4$.

2472. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(y - x - 2)^2 = 9x$ и осями координат.

2473°. Найти площадь петли линии $y^2 = x(x-1)^2$.

2474. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = (1-x^2)^3$.

2475. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$.

2476. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477°. Найти площадь конечной части фигуры, ограниченной линией $x^2y^2 = 4(x-1)$ и прямой, проходящей через ее точки перегиба.

2478. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

2479. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ и осью абсцисс.

2480. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, осью Ox и двумя прямыми, параллельными оси Oy, проведенными через точки экстремума функции y.

2481. Найти площадь конечной части фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2e^x$ и $y = -x^3e^x$.

2482.

1) Вычислить площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной линией $y = \ln x$.
2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$, осью ординат и прямыми $y = \ln a$ и $y = \ln b$.

2483. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

2484°. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{\ln x}{4x}$ и $y = x \ln x$.

2485. Вычислить площадь одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

2486. Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного осью ординат и линиями $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{2}{3}\cos x$.

2487. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ и отрезком оси абсцисс, соединяющей две последовательные точки пересечения линии с осью абсцисс.

2488. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

2489. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$.

2490°. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

2491. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2492. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

2493. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) эпициклоидой
$$x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t,\quad y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t;$$
2) гипоциклоидой
$$x=(R-r)\cos t+r\cos\frac{R-r}{r}t,\quad y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t,$$
причем $R = nr$ (n — целое число). Здесь R — радиус неподвижной, а r — радиус подвижной окружностей; центр неподвижной окружности совпадает с началом координат, а t означает угол поворота радиуса, проведенного из центра неподвижной окружности в точку касания.

2494. Найти площадь петли линии:

1)° $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$;
2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

2495.

1) Вычислить площадь, описываемую полярным радиусом спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при одном его обороте, если началу движения соответствует $\varphi = 0$.
2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной вторым и третьим витками спирали и отрезком полярной оси.

2496. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\sin 2\varphi$ (двулепестковая роза).

2497. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\cos 5\varphi$.

2498°. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$.

2499. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ($a > 0$) и прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2500. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ и $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

2501. Найти площадь части фигуры, ограниченной линией $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, лежащей вне линии $\rho = 2 + \sin\varphi$.

2502. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n — целое положительное число).

2503. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми двумя полярными радиусами гиперболической спирали $\rho\varphi = a$ и ее дугой, пропорциональна разности этих радиусов.

2504°. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми полярными радиусами логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ и ее дугой, пропорциональна разности квадратов этих радиусов.

* **2505.** Найти площадь фигуры, заключенной между внешней и внутренней частями линии $\rho = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

2506. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

В задачах 2507–2511 удобно перейти предварительно к полярным координатам.

2507. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

2508. Найти площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли (см. задачу 2507), лежащей внутри окружности $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

2509°. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$.

2511. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2512. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой.

2513. Найти площадь фигуры, заключенной между линией $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой.

2514°. Найти площадь фигуры, содержащейся между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой.

2515. Найти площадь фигуры, заключенной между линией $xy^2 = 8 - 4x$ и ее асимптотой.

***2516.**

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - e^{-x^2}$ и ее асимптотой.
2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Найти площадь фигуры, заключенной между трактрисой $x = a\left(\cos t - \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ и осью абсцисс.

2518°. Для линии $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ найти площадь петли и площадь фигуры, заключенной между линией и ее асимптотой.

8.1.2. Длина линии*

Длина дуги $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

При параметрическом задании $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$,

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

2519. Вычислить длину дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{2}$ (от $x_1 = 0$ до $x_2 = b$).

2520. Найти длину дуги параболы $y^2 = 2px$ от вершины до ее точки $M(x, y)$. (Взять y в качестве независимой переменной.)

2521°. Найти длину дуги линии $y = \ln x$ (от $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Найти длину дуги линии $y = \ln(1 - x^2)$ (от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$).

2523. Найти длину дуги линии $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (от $x_1 = a$ до $x_2 = b$).

---

*В задачах на вычисление длин дуг там, где это необходимо, в скобках указывается интервал изменения независимой переменной, соответствующей спрямляемой дуге.

2524. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Вычислить длину дуги полукубической параболы $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

2526°. Вычислить длину петли линии $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

2527. Найти периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \ln\cos x$ и $y = \ln\sin x$.

2528°. Найти длину дуги линии $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, заключенной между ее наинизшей точкой и вершиной (точка линии с экстремальной кривизной).

2529. Найти длину линии $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$,

2530. Найти длину линии $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

2531. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении $1 : 3$.

2532°. Дана астроида $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ и точки на ней $A(R, 0)$, $B(0, R)$. Найти на дуге $\smile{AB}$ такую точку M, чтобы длина дуги $\smile{AM}$ составляла четверть длины дуги $\smile{AB}$.

***2533.** Найти длину линии $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Найти длину линии $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

2535. Найти длину дуги трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ от ее точки $(0, a)$ до ее точки (x, y).

2536. Найти длину дуги эвольвенты окружности

$$x = R(\cos t + t\sin t), \qquad y = R(\sin t - t\cos t)$$

(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2537°. Вычислить длину дуги линии

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \qquad y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$$

(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2538. Найти длину петли линии $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. По окружности радиуса a, вне и внутри ее с одинаковой угловой скоростью катятся (без скольжения) две окружности с радиусами, равными b. В момент $t = 0$ они касаются своими точками M_1 и M_2 точки M неподвижной окружности. Показать, что отношение путей, проходимых точками M_1 и M_2 за произвольный промежуток времени t, постоянно и равно $\frac{a+b}{a-b}$ (см. задачу 2493).

2540. Доказать, что длина дуги линии

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t, \qquad y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t,$$

соответствующей интервалу (t_1, t_2), равна $[f(t) + f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Применить результат предыдущей задачи к вычислению длины дуги линии $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$ (от $t_1 = 0$ до $t_2 = t$).

2542. Доказать, что дуги линий

$$x = f(t) - \varphi'(t), \qquad y = \varphi(t) + f'(t) \quad \text{и}$$

$$x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t, \qquad y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t,$$

соответствующие одному и тому же интервалу изменения параметра t, имеют равные длины.

2543. Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого завитка.

2544. Доказать, что дуга параболы $y = \frac{1}{2p}x^2$, соответствующая интервалу $0 \leqslant x \leqslant a$, имеет ту же длину, что и дуга спирали $\rho = p\varphi$, соответствующая интервалу $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

2545. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ (от $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \frac{4}{3}$).

2546°. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

2547. Найти длину линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (см. задачу 2505).

2548. Доказать, что длина линии $\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ (m — целое число) соизмерима с a при m четном и соизмерима с длиной окружности радиуса a при m нечетном.

2549. При каких значениях показателя k ($k \neq 0$) длина дуги линии $y = ax^k$ выражается в элементарных функциях? (Основываясь на теореме Чебышева об условиях интегрируемости дифференциального бинома в конечном виде.)

2550. Найти длину линии, заданной уравнением

$$y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos x}\,dx.$$

2551°. Вычислить длину дуги линии

$$x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz, \qquad y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz$$

от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

2552. Доказать, что длина дуги синусоиды $y = \sin x$, соответствующей периоду синуса, равна длине эллипса, полуоси которого равны $\sqrt{2}$ и 1.

2553. Показать, что длина дуги «укороченной» или «удлиненной» циклоиды $x = mt - n\sin t$, $y = m - n\cos t$ (m и n — положительные числа) в интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$ равна длине эллипса с полуосями $a = m + n$, $b = |m - n|$.

***2554.** Доказать, что длина эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ (задача И. Бернулли).

8.1.3. Объем тела

Объем тела, полученного вращением кривой $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$
а) вокруг оси Ox :

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx;$$

б) вокруг оси Oy :

$$V = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)\,dx.$$

Если площадь сечения тела, перпендикулярного оси Oz и отстоящего от начала координат на расстояние z, равно $S(z)$, $a \leqslant z \leqslant b$, его объем

$$V = \int\limits_a^b S(z)\,dz.$$

2555. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси (параболоид вращения), и плоскостью, перпендикулярной к его оси и отстоящей от вершины параболы на расстояние, равное единице.

2556. Эллипс, большая ось которого равна $2a$, малая — $2b$, вращается:

1)° вокруг большой оси;
2) вокруг малой оси.

Найти объем получающихся эллипсоидов вращения. В частном случае получить объем шара.

2557. Симметричный параболический сегмент, основание которого a, высота h, вращается вокруг основания. Вычислить объем тела вращения, которое при этом получается («лимон» Кавальери).

2558. Фигура, ограниченная гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и прямой $x = a + h$ ($h > 0$), вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

2559. Криволинейная трапеция, ограниченная линией $y = xe^x$ и прямыми $x = 1$ и $y = 0$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

2560°. Цепная линия $y = \operatorname{ch} x$ вращается вокруг оси абсцисс. При этом получается поверхность, называемая к а т е н о и д о м. Найти объем тела, ограниченного катеноидом и двумя плоскостями, отстоящими от начала на a и b единиц и перпендикулярными к оси абсцисс.

2561. Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y^2 = x$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2562. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс трапеции, лежащей над осью Ox и ограниченной линией $(x - 4)y^2 = x(x - 3)$.

2563. Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$, с основанием $[0, 1]$ вокруг оси Ox.

2564. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

2565°. Вычислить объем тела, которое получится от вращения вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, соответствующей полупериоду.

2566. Лемниската $(x^2 = y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая при этом получается.

2567. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией:

1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$;
2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вращается вокруг своего основания. Вычислить объем тела, ограниченного полученной поверхностью.

2569. Фигура, ограниченная аркой циклоиды (см. предыдущую задачу) и ее основанием, вращается вокруг прямой, перпендикулярной к середине основания (ось симметрии). Найти объем получающегося при этом тела.

2570°. Найти объем тела, полученного при вращении астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг своей оси симметрии.

2571. Фигура, ограниченная дугой линии $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ (эволюта эллипса), лежащей в первом квадранте, и координатными осями, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем получающегося при этом тела.

2572. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью бесконечного веретена, образованного вращением линии $y = \frac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

2573. Линия $y^2 = 2exe^{-2x}$ вращается вокруг своей асимптоты. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая получается в результате этого вращения.

***2574.**

1)° Фигура, ограниченная линией $y = e^{-x^2}$ и ее асимптотой, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2)° Та же фигура вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем получающегося тела.

***2575.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении линии $y = x^2 e^{-x^2}$ вокруг своей асимптоты.

***2576.** Фигура, ограниченная линией $y = \frac{\sin x}{x}$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем получающегося тела.

***2577.** Найти объем тела, ограниченного поверхностью, производимой вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ вокруг ее асимптоты.

2578. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ вокруг ее асимптоты.

* **2579°.** Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2580.

1) Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ и плоскостью $z = 1$.
2) Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ и плоскостями $z = -1$ и $z = 2$.

2581. Вычислить объемы тел, ограниченных параболоидом $z = x^2 + 2y^2$ и эллипсоидом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

2582. Найти объемы тел, образованных пересечением двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ и эллипсоида $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2583. Найти объем тела, ограниченного конической поверхностью $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ и плоскостью $z = 0$.

2584. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ и конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

* **2585°.** Найти объем тела, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания («цилиндрический отрезок», рис. 8.1). В частности, положить $R = 10$ см и $H = 6$ см.

2586. Параболический цилиндр пересечен двумя плоскостями, из которых одна перпендикулярна к образующей. В результате получается тело, изображенное на рис. 8.2. Общее основание параболических сегментов $a = 10$ см, высота параболического сегмента, лежащего в основании, $H = 8$ см, высота тела $h = 6$ см. Вычислить объем тела.

2587. Цилиндр, основанием которого служит эллипс, пересечен наклонной плоскостью, проходящей через малую ось эллипса. Вычислить объем тела, которое при этом получается. Линейные размеры указаны на рис. 8.3

* **2588.** На всех хордах круга радиуса R, параллельных одному направлению, построены симметричные параболические сегменты постоянной высоты H. Плоскости сегментов перпендикулярны к плоскости окружности. Найти объем полученного таким образом тела.

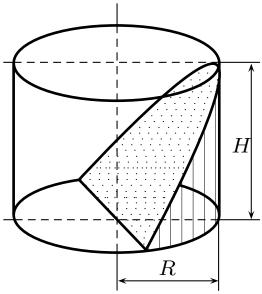

Рис. 8.1

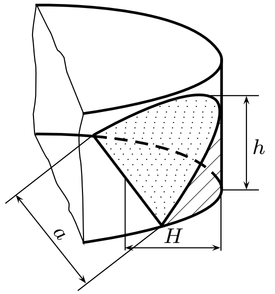

Рис. 8.2

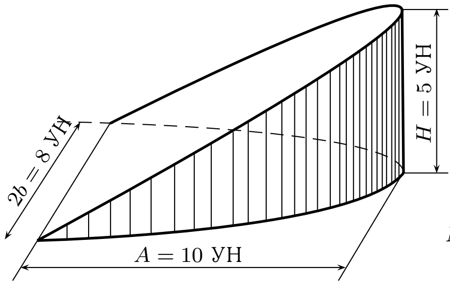

Рис. 8.3

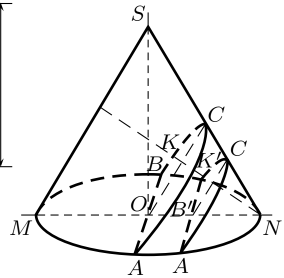

Рис. 8.4

* **2589.** Прямой круглый конус радиуса R, высотой H рассечен на две части плоскостью, проходящей через центр основания параллельно образующей (рис. 8.4). Найти объемы обеих частей конуса. (Сечение конуса плоскостями, параллельными образующей, суть параболические сегменты.)

2590°. Центр квадрата переменного размера перемещается вдоль диаметра круга радиуса a, причем плоскость, в которой лежит квадрат, остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности. Найти объем тела, образованного этим движущимся квадратом.

2591. Круг переменного радиуса перемещается таким образом, что одна из точек его окружности остается на оси абсцисс, центр движется по окружности $x^2 + y^2 = r^2$, а плоскость этого круга перпендикулярна к оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

2592. Оси двух равных цилиндров пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндра (на рис. 8.5 изображена 1/8 тела). (Рассмотреть сечения, образованные плоскостями, параллельными осям обоих цилиндров.)

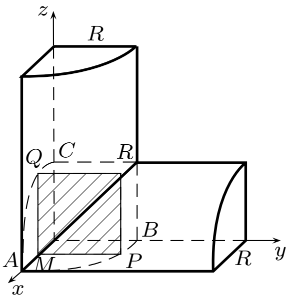

Рис. 8.5

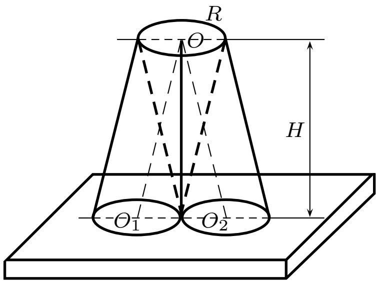

Рис. 8.6

2593. Два наклонных цилиндра имеют одну и ту же высоту H и общее верхнее основание радиуса R, а нижние основания их соприкасаются (рис. 8.6). Найти объем общей части цилиндров.

8.1.4. Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, полученной вращением кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ вокруг оси Ox :

$$S = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

2594. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$.

2595°. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кубической параболы $3y - x^3 = 0$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

2596. Вычислить площадь катеноида — поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

2597. При вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси получается поверхность, называемая удлиненным эллипсоидом вращения, при вращении вокруг малой — поверхность, называемая укороченным эллипсоидом вращения. Найти площадь поверхности удлиненного и укороченного эллипсоидов вращения.

2598. Вычислить площадь веретенообразной поверхности, образованной вращением одной арки синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси абсцисс.

2599. Дуга тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ от ее точки $(0, 0)$ до ее точки $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить площадь поверхности, которая при этом получается.

2600. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли линии $9ay^2 = x(3a - x)^2$ вокруг оси абсцисс.

2601°. Дуга окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в первом квадранте, вращается вокруг стягивающей ее хорды. Вычислить площадь получающейся при этом поверхности.

2602. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс дуги линии $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

2603. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

2604. Арка циклоиды вращается вокруг своей оси симметрии. Найти площадь получающейся при этом поверхности. (См. задачу 2568).

2605°. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

2606. Окружность $\rho = 2r\sin\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

2607. Лемниската $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

2608. Бесконечная дуга линии $y = e^{-x}$, соответствующая положительным значениям x, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить площадь поверхности, которая при этом получается.

2609. Трактриса $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь получающейся бесконечной поверхности.

8.1.5. Моменты и центр масс*

Статическим моментом относительно оси l точки массы m, отстоящей от оси на расстояние d называется величина $M_l = md$. Для кривой, заданной явно или параметрически, статические моменты относительно координатных осей равны:

$$M_X = \int\limits_a^b y\,ds,\ M_Y = \int\limits_a^b x\,ds,\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

(Плотность здесь и в дальнейшем считаем равной единице.) Для криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, кривой $y = y(x)$, $y \geqslant 0$ и осью Ox

$$M_X = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx,\ M_Y = \int\limits_a^b xy\,dx.$$

Координаты *центра масс* плоской фигуры (ξ, η) вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_Y}{M},\ \eta = \frac{M_X}{M},$$

где M — масса фигуры (в случае единичной плотности — длина или площадь). *Моментом инерции* относительно оси l точки массы m, отстоящей от оси на расстояние d, называется величина $I_l = md^2$. Кривую или область разбиваем на малые элементы и высчитываем соответствующий интеграл. Так, для кривой, заданной явно или параметрически, моменты инерции относительно координатных осей равны:

$$I_X = \int\limits_a^b y^2\,ds,\ I_Y = \int\limits_a^b x^2\,ds,\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Для криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, кривой $y = y(x)$, $y \geqslant 0$ и осью Ox

$$I_X = \frac{1}{3}\int\limits_a^b y^3\,dx,\ I_Y = \int\limits_a^b x^2 y\,dx.$$

2610. Вычислить статический момент прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

*Во всех задачах этого раздела (2610–2662) плотность принимается равной единице.

2611°. Вычислить статический момент прямоугольного равнобедренного треугольника, катеты которого равны a, относительно каждой из его сторон.

2612. Доказать, что имеет место следующая формула:

$$\int_a^b (ax+b)f(x)\,dx = (a\xi + b)\int_a^b f(x)\,dx,$$

где ξ — абсцисса центра масс криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной линией $y = f(x)$.

2613. Найти центр масс симметричного параболического сегмента с основанием, равным a, и высотой h.

2614. Прямоугольник со сторонами a и b разбивается на две части дугой параболы, вершина которой совпадает с одной из вершин прямоугольника и которая проходит через его противоположную вершину (рис. 8.7). Найти центр масс обеих частей S_1 и S_2 прямоугольника.

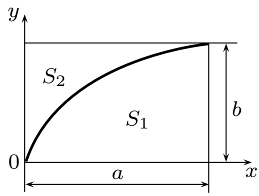

Рис. 8.7

2615°. Найти координаты центра масс полуокружности

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

2616. Найти координаты центра масс полукруга, ограниченного осью абсцисс и полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

2617. Найти центр масс дуги окружности радиуса R, стягивающей центральный угол α.

2618. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2619. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной координатными осями и дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

2620°. Найти статический момент дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси абсцисс.

2621. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$).

В задачах 2622–2624 найти статический момент фигуры, ограниченной данными линиями, относительно оси абсцисс.

2622. $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

2623. $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ (для одного сегмента).

2624. $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

2625°. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

2626. Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, содержащейся между точками с абсциссами $x_1 = -a$ и $x_2 = a$.

2627. Доказать, что статический момент произвольной дуги параболы относительно оси параболы пропорционален разности радиусов кривизны в конечных точках дуги. Коэффициент пропорциональности равен $\frac{p}{3}$, где p — параметр параболы.

2628. Найти координаты центра масс первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2629. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью абсцисс.

2630. Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

2631°. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной осями координат и дугой астроиды (в первом квадранте).

2632. Доказать, что абсцисса и ордината центра масс сектора, ограниченного двумя полярными радиусами и линией, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, выражаются так:

$$x = \frac{2}{3} \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3} \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}.$$

2633. Найти декартовы координаты центра масс сектора, ограниченного одним полувитком архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ (от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

2634. Найти центр масс сектора круга радиуса R с центральным углом, равным 2α.

2635°. Найти декартовы координаты центра масс фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2636. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2637. Показать, что декартовы координаты центра масс дуги линии, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, выражаются так:

$$x = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}.$$

2638. Найти декартовы координаты центра масс дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$ (от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$).

2639. Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

2640. На каком расстоянии от геометрического центра лежит центр масс полушара радиуса R?

2641°. Найти центр масс поверхности полусферы.

2642. Дан прямой круглый конус; радиус основания его R, высота H. Найти расстояние от основания конуса до центра масс его боковой поверхности, полной поверхности и объема.

2643. На каком расстоянии от основания лежит центр масс тела, ограниченного параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной к его оси? Высота тела h.

2644. Найти момент инерции отрезка $AB = l$ относительно оси, лежащей с ним в одной плоскости, зная, что конец A отрезка отстоит от оси на a единиц, конец B — на b единиц.

2645. Найти момент инерции полуокружности радиуса R относительно ее диаметра.

2646. Найти момент инерции дуги линии $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$ относительно оси абсцисс.

2647. Вычислить момент инерции одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ относительно обеих осей координат.

2648. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a.

2649. Найти момент инерции треугольника с основанием a и высотой h относительно:

1) оснований;
2)° прямой, параллельной основанию, проходящей через вершину;
3) прямой, параллельной основанию, проходящей через центр тяжести треугольника.

2650°. Найти момент инерции полукруга радиуса R относительно его диаметра.

2651°. Найти момент инерции круга радиуса R относительно его центра.

2652. Найти момент инерции эллипса с полуосями a и b относительно обеих его осей.

2653. Найти момент инерции цилиндра, радиус основания которого R, высота H, относительно его оси.

2654. Найти момент инерции конуса, радиус основания которого R, высота H, относительно его оси.

2655°. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра.

2656. Эллипс с полуосями a и b вращается вокруг одной из своих осей. Найти момент инерции получающегося тела (эллипсоид вращения) относительно оси вращения.

2657. Найти момент инерции параболоида вращения, радиус основания которого R, высота H, относительно оси вращения.

2658. Вычислить момент инерции тела, ограниченного однополостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$$

и плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, относительно оси Oz.

2659. Криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, вращается:

1) вокруг оси Ox;
2) вокруг оси Oy.

Вычислить момент инерции получающегося тела относительно оси вращения.

2660. Найти момент инерции боковой поверхности цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно его оси.

2661°. Найти момент инерции боковой поверхности конуса (радиус основания R, высота H) относительно его оси.

2662. Найти момент инерции поверхности шара радиуса R относительно его диаметра.

8.1.6. Теоремы Гульдина

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в одной плоскости с кривой и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой центром масс дуги.

Теорема 2. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, лежащей в одной плоскости с фигурой и ее не пересекающей, равна произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром масс фигуры.

2663. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти объем тела, которое при этом получается.

2664. Эллипс с осями $AA_1 = 2a$ и $BB_1 = 2b$ вращается вокруг прямой, параллельной оси AA_1 и отстоящей от нее на расстоянии $3b$. Найти объем тела, которое при этом получается.

2665°. Астроида вращается вокруг прямой, проходящей через два соседних острия. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается (см. задачу 2630).

2666. Фигура, образованная первыми арками циклоид

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \quad \text{и}$$

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = -a(1 - \cos t),$$

вращается вокруг оси ординат. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается.

2667. Квадрат вращается вокруг прямой, лежащей в его плоскости и проходящей через одну из его вершин. При каком положении прямой относительно квадрата объем получающегося тела вращения будет наибольшим? Тот же вопрос для треугольника.

§ 8.2. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ

2668. Скорость тела задается формулой $\nu = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

2669. При гармоническом колебательном движении по оси абсцисс около начала координат скорость $\frac{dx}{dt}$ дается формулой

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

(t — время, T — период колебания, φ_0 — начальная фаза).

Найти положение точки в момент времени t_2, если известно, что в момент t_1 она находилась в точке $x = x_1$.

Сила взаимодействия двух точечных масс определяется по формуле $f = k\frac{mM}{r^2}$, где m и M — массы точек, r — расстояние между ними, а k — коэффициент пропорциональности, равный $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг $\cdot$ с^2 (закон Ньютона). Учитывая это, решить задачи 2670–2678. (Предполагается, что плотность постоянна.)

2670°. Стержень AB, длина которого l, масса M, притягивает точку C массы m, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от ближайшего конца B стержня. Найти силу взаимодействия стержня и точки. Какую точечную массу нужно поместить в A, для того чтобы она действовала на C с той же силой, что и стержень AB? Какую работу совершит сила притяжения, когда точка, отстоящая от стержня на расстоянии r_1, приблизится к нему на расстояние r_2, двигаясь вдоль прямой, составляющей продолжение стержня?

2671. С какой силой полукольцо радиуса r и массы M действует на материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

2672. С какой силой проволочное кольцо массы M, радиуса R действует на материальную точку C массы m, лежащую на прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости? Расстояние от точки до центра кольца равно a. Какую работу совершит сила притяжения при перемещении точки из бесконечности в центр кольца?

2673. Используя результат предыдущей задачи, вычислить, с какой силой плоский диск, радиус которого равен R, масса M, действует на материальную точку массы m, которая лежит на его оси на расстоянии a от центра.

2674. Используя результат предыдущей задачи, вычислить, с какой силой действует на материальную точку массы m бесконечная плоскость, на которой равномерно распределена масса с поверхностной плотностью σ. Расстояние от точки до плоскости равно a.

***2675.** Радиусы оснований усеченного прямого круглого конуса равны R и r, высота h, плотность γ. С какой силой действует он на материальную точку массы m, помещенную в его вершине?

2676. С какой силой материальная ломаная $y = |x| + 1$ притягивает материальную точку массы m, находящуюся в начале координат? (Линейная плотность равна γ).

2677. Доказать, что материальная ломаная $y = a|x| + 1$ ($a \geqslant 0$) притягивает материальную точку, находящуюся в начале координат, с одной и той же силой независимо от a, т. е. независимо от величины угла между сторонами ломаной.

***2678.** Два одинаковых стержня (длиной l и массы M каждый) лежат на одной прямой на расстоянии l один от другого. Подсчитать силу их взаимного притяжения.

2679. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

2680°. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высоты H, имеющего радиусы оснований R и r ($r < R$)? Плотность равна d (песок поднимают с поверхности земли, на которой покоится большее основание конуса).

2681. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140 м, ребро основания (квадрата) 200 м. Плотность камня, из которого она сделана, приблизительно равна $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

2682. Вычислить работу, которую необходимо затратить, для того чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $H = 5$ м, имеющий в основании круг радиуса $R = 3$ м.

2683. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности d из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса, высота которого равна H, а радиус основания R. Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной кверху?

2684. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиуса $R = 0{,}6$ м.

2685°. Котел имеет форму параболоида вращения (рис. 8.8). Радиус основания $R = 2$ м, глубина котла $H = 4$ м. Он наполнен жидкостью, плотность которой $d = 800$ кг/м^3. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

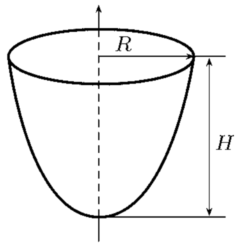

Рис. 8.8

2686. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из цистерны, которая имеет следующие размеры (рис. 8.9): $a = 0{,}75$ м, $b = 1{,}2$ м, $H = 1$ м. Боковая поверхность цистерны — параболический цилиндр.

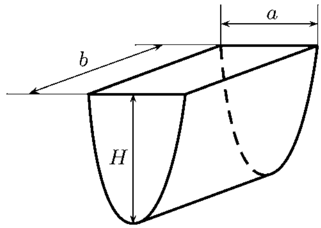

Рис. 8.9

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна $\frac{1}{2}J\omega^2$, где ω — угловая скорость, а J — момент инерции относительно оси вращения. Зная это, решить задачи 2687–2692.

2687. Стержень AB (рис. 8.10) вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO' с угловой скоростью $\omega = 10\pi$ рад/с. Поперечное сечение стержня $S = 4\,\text{см}^2$, длина его $l = 20$ см, плотность материала, из которого он изготовлен, $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти кинетическую энергию стержня.

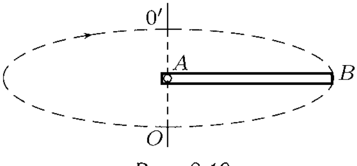

Рис. 8.10

2688. Прямоугольная пластинка, стороны которой a=50 см и $b = 40$ см, вращается с постоянной угловой скоростью ω, равной 3π рад/с, вокруг стороны a. Найти кинетическую энергию пластинки. Толщина пластинки d равна 0,3 см, плотность γ материала, из которого сделана пластинка, равна $8{\cdot}10^3$ кг/м^3.

2689. Треугольная пластинка, основание которой $a{=}40$ см, а высота $h = 30$ см, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью $w = 5\pi$ рад/с. Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее $d = 0{,}2$ см, а плотность материала, из которого она изготовлена, $\gamma = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

2690°. Пластинка в форме параболического сегмента (рис. 8.11) вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\pi$ рад/с. Основание сегмента $a = 20$ см, высота $h = 30$ см, толщина пластинки $d = 0{,}3$ см, плотность материала $\gamma{=}{=}7{,}8{\cdot}10^3$ кг/м^3. Найти кинетическую энергию пластинки.

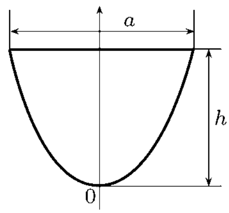

Рис. 8.11

2691. Круглый цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота H, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна γ. Найти кинетическую энергию цилиндра.

2692. Тонкая проволока массы M согнута в виде полуокружности радиуса R и вращается вокруг своей оси, проходящей через концы полуокружности, делая n оборотов в минуту. Вычислить ее кинетическую энергию. Вычислить кинетическую энергию, если осью вращения служит касательная в средней точке полуокружности.

2693. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h.

1) Подсчитать силу давления воды на каждую из сторон пластинки.
2) Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды?

2694. Квадратная пластинка погружена вертикально в воду так, что одна из вершин квадрата лежит на поверхности воды, а одна из диагоналей параллельна поверхности. Сторона квадрата равна a. С какой силой вода давит на каждую сторону пластинки?

2695°. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6{,}4$ м, нижнее $b = 4{,}2$ м, а высота $H = 3$ м.

2696. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так, что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности. Как велика сила давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина погруженной полуоси эллипса равна a, а плотность жидкости d?

2697. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b ($a > b$) погружена в жидкость под углом α к поверхности жидкости. Бóльшая сторона параллельна поверхности и лежит на глубине h. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки, если плотность жидкости d.

2698. Прямоугольный сосуд наполнен равными по объему частями воды и масла, причем масло вдвое легче воды. Показать, что давление на каждую стенку сосуда уменьшится на одну пятую, если вместо смеси будет взято одно масло. (Учесть, что все масло находится сверху.)

При решении задач 2699–2700 следует опираться на закон Архимеда: подъемная сила, действующая на погруженное в жидкость твердое тело, равна весу вытесненной им жидкости.

2699. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 4000\,\text{см}^2$, а высота $H = 50$ см, плавает на поверхности воды. Плотность дерева $d = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

1) Какую работу нужно произвести, чтобы вытащить поплавок из воды?
2) Вычислить, какую работу нужно затратить, чтобы поплавок погрузить в воду целиком.

2700°. Шар радиуса R с плотностью 1 погружен в воду так, что он касается поверхности. Какую работу нужно затратить, чтобы извлечь шар из воды?

Задачи 2701–2706 связаны с явлением истечения жидкости из малого отверстия. Скорость истечения жидкости определяется по закону Торричелли: $v=\sqrt{2gh}$, где h — высота столба жидкости над отверстием, g — ускорение силы тяжести.*

2701. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого равна 100 см, а высота 30 см, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него в течение 2 мин.

2702. Коническая воронка высотой $H = 20$ см наполнена водой. Радиус верхнего отверстия $R = 12$ см. Нижнее отверстие, через которое вода начинает вытекать из воронки, имеет радиус $r = 0{,}3$ см.

1) В течение какого времени уровень воды в воронке понизится на 5 см?
2) Когда воронка опорожнится?

2703. В дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R = 43$ см, образовалась пробоина площадь $S = 0{,}2\,\text{см}^2$. Через сколько времени вода, наполняющая котел, вытечет из него?

2704. Котел имеет форму эллиптического цилиндра с горизонтальной осью. Полуоси эллиптического сечения (перпендикулярного к оси цилиндра) равны b (горизонтальная) и a (вертикальная); образующая цилиндра равна L (рис. 8.12). Котел наполнен водой до половины. За какое время вода вытечет из котла через отверстие в его дне, имеющее площадь S?

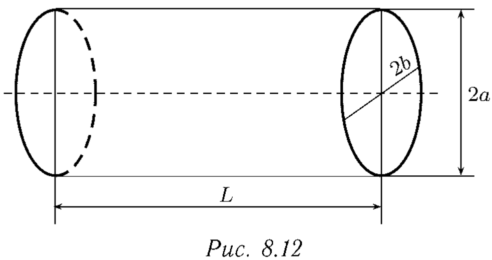

Рис. 8.12

*В данной здесь форме закон Торричелли применим только к идеальной жидкости. Для этой идеальной жидкости и даны ответы к задачам. (Практически пользуются формулой $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости или характера отверстия, из которого происходит истечение. Для воды в простейшем случае $\mu = 0{,}6$.)

2705°. В вертикальной стенке призматического сосуда, наполненного водой, проделана прямоугольная вертикальная щель, высота которой равна h, ширина b. Верхний край щели, параллельный поверхности воды, расположен на расстоянии H от поверхности. Какое количество воды вытечет из сосуда за 1 с, если считать, что уровень воды поддерживается все время на одной высоте? Рассмотреть случай $H = 0$ (задача о водосливе).

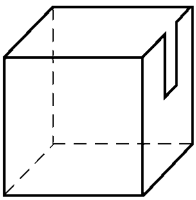

Рис. 8.13

2706. Сосуд, наполненный до краев водой, имеет форму параллелепипеда с площадью основания $100\,\text{см}^2$. В боковой стенке его имеется узкая щель высотой 20 см и шириной 0,1 см (рис. 8.13). За какое время уровень воды в сосуде понизится на:
1) 5 см; 2) 10 см; 3) 19 см; 4) 20 см?
(Воспользоваться результатом предыдущей задачи.)

Уравнение состояния идеального газа имеет вид $pv = RT$, где p — давление, v — объем, T — абсолютная температура и R — постоянная для данной массы газа. Решить задачи 2707–2709, считая газы идеальными.

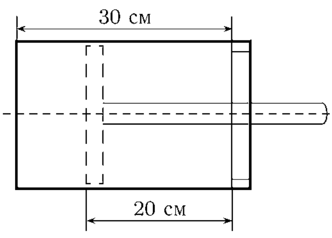

Рис. 8.14

2707. В цилиндре, площадь основания которого $10\,\text{см}^2$, а высота 30 см, заключен атмосферный воздух. Какую работу необходимо затратить, чтобы вдвинуть поршень на 20 см, т. е. вдвинуть его так, чтобы он остановился на расстоянии 10 см от дна цилиндра (рис. 8.14)? Атмосферное давление равно 10^5 *Па*. Процесс протекает изотермически, т. е. при постоянной температуре.

2708. В цилиндрическом сосуде, поперечное сечение которого $100\,\text{см}^2$, заключен воздух при атмосферном давлении. В сосуде имеется поршень. Первоначальное расстояние его от дна сосуда равно 0,1 м. Цилиндр помещен в пустоту, благодаря чему воздух в нем расширяется, выталкивая поршень.

1) Вычислить работу, совершаемую воздухом в цилиндре, когда он поднимает поршень на высоту: а) 0,2 м, б) 0,5 м, в) 1 м.
2) Может ли эта работа неограниченно увеличиваться при неограниченном расширении газа? (Процесс, как и в предыдущем примере, протекает изотермически.)

2709°. В цилиндрическом сосуде объемом $v_0 = 0{,}1\,\text{м}^3$ находится атмосферный воздух, который подвергается сжатию быстрым вдвиганием поршня (считаем при этом, что процесс протекает без притока или отдачи тепла, т. е. адиабатически). Какую работу надо затратить, чтобы сжать воздух в сосуде до объема $v = 0{,}03\,\text{м}^3$? (Атмосферное давление равно 10^5 *Па.*) При адиабатическом процессе давление и объем газа связаны соотношением $pv^\gamma = p_0v_0^\gamma$ (уравнение Пуассона). Для двухатомных газов (а также для воздуха) $\gamma \approx 1{,}40$.

По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. На основании этого закона решить задачи 2710–2711.

2710. Тело, температура которого 25°, погружено в термостат (в котором поддерживается температура 0°). За какое время тело охладится до 10°, если за 20 мин оно охлаждается до 20°?

2711. Тело, температура которого 30°, за 30 мин пребывания в термостате, температура которого 0°, охладилось до 22,5°. Какова будет температура тела через 3 часа после начала опыта?

По закону Кулона сила взаимодействия двух электрических зарядов равна $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ Н, где q_1 и q_2 — величины зарядов в кулонах, r — расстояние между зарядами в метрах, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м $\left(4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11\cdot10^{-10}\right)$ и ε — диэлектрическая проницаемость среды относительно вакуума (для воздуха $\varepsilon \approx 1$). На основании этого закона решить задачи 2712–2714.

2712. Бесконечная прямая равномерно заряжена положительным электричеством (линейная плотность электричества σ). С какой силой действует эта прямая на единичный заряд, находящийся в точке A на расстоянии a от нее? Диэлектрическая проницаемость среды равна единице.

2713. Два электрических заряда: $q_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 10 \cdot 10^{-9}$ *Кл* находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух. Сначала оба заряда закреплены неподвижно, затем заряд q_2 освобождается. Тогда под действием силы отталкивания заряд q_2 начнет перемещаться, удаляясь от заряда q_1. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд:

1) удалится на расстояние 30 см;
2) удалится в бесконечность?

2714. Два электрических заряда: $q_1 = 33{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}$ *Кл*, находятся на расстоянии 20 см друг от друга. Каково будет расстояние между зарядами, если мы приблизим второй к первому, затратив при этом работу $18 \cdot 10^5$ *Дж*? (Разделяющей средой служит воздух.)

2715. Напряжение на клеммах электрической цепи $V = 120$ *В*. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 *Ом* в секунду. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $r = 10$ *Ом*. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение двух минут?

2716. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально 120 *В*, равномерно падает, убывая на 0,01 *В* в секунду. Одновременно с этим в цепь вводится сопротивление тоже с постоянной скоростью, именно 0,1 *Ом* в секунду. Кроме того, в цепи имеется постоянное сопротивление, равное 12 *Ом*. Сколько кулонов электричества протечет через цепь за 3 мин?

2717°. При изменении температуры сопротивление металлических проводников меняется (при обычных температурах) по закону $R = R_0(1 + 0{,}004\theta)$, где R_0 — сопротивление при 0°C и θ — температура по Цельсию. (Этот закон справедлив для большинства чистых металлов.) Проводник, сопротивление которого при 0°C равно 10 *Ом*, равномерно нагревается от $\theta_1 = 20°$ до $\theta_2 = 200°$ в течение 10 мин. В это время по нему идет ток под напряжением в 120 *В*. Сколько кулонов электричества протечет за это время через проводник?

2718. Закон изменения напряжения синусоидального тока, имеющего частоту ω, дается следующей формулой: $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где E_0 — максимальное напряжение,

φ — фаза, а t — время. Найти среднее значение квадрата напряжения за 1 период. Показать, что при постоянном сопротивлении переменный ток выделяет за 1 период столько же тепла, сколько постоянный, имеющий напряжение, равное $\sqrt{(E^2)_{\text{ср}}}$. (Ввиду этого выражение $\sqrt{(E^2)_{\text{ср}}}$ называют эффективным напряжением переменного тока.)

2719. Напряжение синусоидального тока дается формулой $E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, а ток — формулой $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$, где E_0 и I_0 — постоянные величины (наибольшие значения напряжения и тока), T — период, а φ_0 — так называемая разность фаз. Вычислить работу тока за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ и показать, что наибольшее значение эта работа будет иметь тогда, когда разность фаз φ_0 равна нулю.

2720. Найти время, в течение которого 1 кг воды нагреется электроприбором от 20°C до 100°C, если напряжение тока 120 В, сопротивление спирали 14,4 Ом, температура воздуха в комнате 20°C и если известно, что 1 кг воды остывает от 40°C до 30°C за 10 мин. (По закону Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$, где Q — количество теплоты в джоулях, I — ток в амперах, R — сопротивление в омах и t — время в секундах; удельная теплоемкость воды 4190 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. Кроме того, воспользоваться законом Ньютона об охлаждении; см. задачу 2710.)

2721. Воздух, наполняющий сосуд вместимостью 3 л, содержит 20% кислорода. Сосуд имеет две трубки. Через одну из них в сосуд начинают впускать чистый кислород, через другую вытекает наружу столько же воздуха, сколько притекает в сосуд кислорода. Какое количество будет содержаться в сосуде, после того как через него протечет 10 л газа?

2722. Воздух содержит $a\%$ ($= 8\%$) CO_2; он пропускается через цилиндрический сосуд с поглотительной массой. Тонкий слой массы поглощает количество газа, пропорциональное его концентрации и толщине слоя.

1) Если воздух, прошедший слой в H см ($= 10$ см) толщиной, содержит $b\%$ ($= 2\%$) CO_2, то какой толщины H_1 должен быть поглотительный слой, для того чтобы, выходя из поглотителя, воздух содержал только $c\%$ ($= 1\%$) углекислоты?

2) Сколько углекислоты (в %) останется в воздухе, прошедшем поглотитель, если толщина поглотительного слоя будет равна 30 см?

2723°. Если при прохождении через слой воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30 м? Количество света, поглощенного при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность.

2724. Если первоначальное количество фермента 1 г через час становится равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения, если считать, что скорость прироста фермента составляет 2 г, а через три часа 3 г, то каково было первоначальное количество фермента?

2725. Если через два часа после начала брожения наличное количество фермента составляет 2 г, а через три часа 3 г, то каково было первоначальное количество фермента? (См. предыдущую задачу.)

2726. 2 кг соли растворяются в 30 л воды. Через 5 мин растворяется 1 кг соли. Через какое время растворится 99% первоначального количества соли? (Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора, которая равна 1 кг на 3 л, и концентрацией раствора в данный момент.)

Глава 9

РЯДЫ

§ 9.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

9.1.1. Сходимость числового ряда

Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется *числовым рядом*, выражение

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

— *частичной суммой ряда*. Если существует предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, этот предел называется *суммой ряда*. Если сумма ряда существует и конечна, ряд называется *сходящимся*, иначе *расходящимся*.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости).

В задачах 2727–2736 для каждого ряда:

1) найти сумму n первых членов ряда (S_n);
2) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости;
3) найти сумму ряда (S).

***2727.** $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

2728°. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$

2729. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$

2730. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} + \ldots$

2731. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

2732. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

2733°. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

2734. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

2735. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

2736°. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$

9.1.2. Ряды с положительными членами

Признаки сходимости положительных рядов. (В данном пункте считаем, что для всех рядов $a_n \geqslant 0$).

Первый признак сравнения. Если, начиная с некоторого номера, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Второй признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, в частности, если $a_n \sim b_n$, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Часто для сравнения используются ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, при $k>1$ такой ряд сходится, при $k \leqslant 1$ расходится.

Признак Даламбера. Если существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то при $D<1$ ряд сходится, при $D>1$ расходится, при $D=1$ этот признак не дает ответа на вопрос о сходимости.

Радикальный признак Коши. Если существует $\lim_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_n}=C$, то при $C<1$ ряд сходится, при $C>1$ расходится, при $C=1$ этот признак не дает ответа на вопрос о сходимости.

Интегральный признак Коши. Если $a_n=f(n)$, причем функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \geqslant a \geqslant 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

В задачах 2737–2753 вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью признаков сравнения.

2737. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\ldots$

2738. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741.° $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2746.° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

2747. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2748. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

2749. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2750. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

2751. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

2752.° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

2753. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

В задачах 2754–2762 доказать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757.° $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

В задачах 2763–2766 доказать сходимость данных рядов с помощью радикального признака Коши.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

2765. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

2766°. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

В задачах 2767–2770 вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью интегрального признака Коши.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2768°. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

В задачах 2771–2784 выяснить, какие из данных рядов сходятся, какие расходятся.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774°. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}+\ldots$

2780°. $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}+\ldots$

2782. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2783. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

***2784.** $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots$

В задачах 2785–2789 доказать каждое из соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция.

2785. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

2786. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$ $(a > 0)$.

2787°. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

2788. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

2789. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$

9.1.3. Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Абсолютно сходящийся ряд сходится, обратное утверждение неверно. Для доказательства абсолютной сходимости используются признаки сходимости положительных рядов.

Признак Лейбница. Если ряд знакочередующийся, то есть имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n \geqslant 0$, последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ряд сходится.

В задачах 2790–2799 выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие не абсолютно, какие расходятся.

2790°. $1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$

2791. $1 - \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3} + \ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

2793. $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \ldots \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots$

2794°. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots$

2795. $2 - \frac{3}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} + \ldots$

2796. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \ldots (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

2797. $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n} + \ldots$

2798°. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

2799. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

2800. Показать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

2801. Показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ также абсолютно сходится.

§ 9.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

9.2.1. Сходимость функциональных рядов

Множество значений x, при которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называется его *областью сходимости*, а функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — *суммой ряда*.

В задачах 2802–2816 определить области сходимости рядов.

2802. $1+x+\ldots+x^n+\ldots$

2803°. $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$

2804. $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$

2805. $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

2806. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

2807°. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\ldots+\frac{1}{1+x^n}+\ldots$

2808. $2x+6x^2+\ldots+n(n+1)x^n+\ldots$

2809. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$

2810°. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\ldots$

2811. $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}+\ldots+\sin\frac{x}{2^n}+\ldots$

2812. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x^2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$

2813. $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$

2814°. $\frac{\cos x}{e^x}+\frac{\cos 2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{\cos nx}{e^{nx}}+\ldots$

2815°. $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$

2816. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots$

9.2.2. Равномерная (правильная) сходимость

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N, не зависящий от x, такой, что при $n>N$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ одновременно для всех $x\in X$ ($f(x)$ — сумма ряда). Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

В задачах 2817–2820 доказать, что данные ряды равномерно (правильно) сходятся на всей оси Ox.

2817. $1+\frac{\sin x}{1!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$

2818. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

2820°. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

2821. Показать, что ряд $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2} + \frac{1}{4+[\varphi(x)]^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2} + \ldots$ сходится равномерно (правильно) в любом интервале, в котором определена функция $\varphi(x)$.

2822. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} + \ldots$ равномерно (правильно) сходится на всей положительной полуоси. Сколько нужно взять членов, чтобы при любом неотрицательном x можно было вычислить сумму ряда с точностью до 0,001?

***2823.** Показать, что ряд $\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} + \ldots + \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} + \ldots$ равномерно сходится в полуинтервале $1+\omega \leqslant x < +\infty$, где ω — любое положительное число. Убедиться, что при любом x из отрезка $2 \leqslant x \leqslant 100$ достаточно взять восемь членов, чтобы получить сумму ряда с точностью до 0,01.

2824°. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$.

2825. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n}.$$

Показать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна при любом x. Найти $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Убедиться в том, что для вычисления приближенных значений функции $f(x)$ при любом x с точностью до 0,001 достаточно взять три члена ряда. Найти с указанной точностью $f(1)$ и $f(-0{,}2)$.

2826. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n\omega)^2} \quad (\omega > 0).$$

Показать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна при любом x. Убедиться, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом ω.

9.2.3. Интегрирование и дифференцирование рядов

Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, то этот ряд равномерно сходится и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ и функции $f_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_n(t)\,dt,$$

причем последний ряд сходится равномерно.

2827. Показать, что ряд $x^2 + x^6 + \ldots + x^{4n-2} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $-1+\omega \leqslant x \leqslant 1-\omega$, где ω — любое положительное число, меньшее единицы. Интегрированием данного ряда найти в интервале $(-1,1)$ сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$$

2828. Найти сумму ряда $x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$

2829°. Найти сумму ряда $\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$

2830. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \ldots + ne^{-nx} + \ldots$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна на всей положительной полуоси Ox. Вычислить $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

2831. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = 1 + 2\cdot 3x + \ldots + n\cdot 3^{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Вычислить $\int_0^{0,125} f(x)\,dx$.

***2832.** Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} + \ldots$$

Вычислить $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,dx$, предварительно убедившись в том, что функция $f(x)$ непрерывна в заданном интервале интегрирования.

***2833.** Функция $f(x)$ определяется рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}.$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Вычислить $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

2834. Исходя из соотношения $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, найти сумму ряда:

1) $1 - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} + \ldots$;

2) $1 - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3} + \ldots$

2835°. Исходя из соотношения $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n\cdot 2^n}$, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \ldots$

2836. Исходя из соотношения

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2},$$

найти сумму ряда $\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} + \ldots$

2837. Доказать, что ряд $\frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \ldots + \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} + \ldots$ равномерно сходится на всей числовой оси. Показать, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком интервале.

2838. Исходя из равенства $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1)$, просуммировать ряды $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ и $1 + 3x + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \ldots$ и показать, что ряд $1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $[-\rho, \rho]$, где $|\rho| < 1$.

2839°. Показать справедливость равенства

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \ldots + \frac{mx^{m-1}}{1+x^m} + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

где $m = 2^{n-1}$ и $-1 < x < 1$.

2840. Убедиться, что функция $y = f(x)$, определяемая рядом $x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \ldots$, удовлетворяет соотношению $xy' = y(x+1)$.

§ 9.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

9.3.1. Разложение функции в степенные ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

называется *степенным рядом*. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки a раскладывается в степенной ряд, этот ряд имеет вид

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

(*ряд Тейлора*). При $a=0$ ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (x\in\mathbf{R});$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad (x\in\mathbf{R});$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (x\in\mathbf{R});$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad (x\in(-1,1]);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (x\in(-1,1));$$

2841. Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ (при $x_0=1$).

2842. Разложить функцию $y=\sqrt{x^3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$.

2843. Разложить функцию $y=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=3$.

2844°. Разложить функцию $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=2$.

В задачах 2845–2849 разложить данные функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ (ряд Маклорена):

2845. $y=\operatorname{ch} x$.

2846. $y = x^2 e^x$.

2847. $y = \cos(x + \alpha)$.

2848. $y = e^x \sin x$.

2849°. $y = \cos x \operatorname{ch} x$.

В задачах 2850–2854 найти первые пять членов ряда Тейлора для данных функций в окрестности точки $x = 0$.

2850. $y = \ln(1 + e^x)$.

2851. $y = e^{\cos x}$.

2852. $y = \cos^n x$.

2853. $y = -\ln\cos x$.

2854°. $y = (1 + x)^x$.

В задачах 2855–2868 разложить данные функции в окрестности точки $x = 0$, пользуясь формулами разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$ и $(1 + x)^m$.

2855. $y = e^{2x}$.

2856. $y = e^{-x^2}$.

2857.

$$y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

2858°.

$$y = \begin{cases} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

2859. $y = \sin\frac{x}{2}$.

2860. $y = \cos^2 x$.

2861.

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

2862. $y = (x - \operatorname{tg} x)\cos x$.

2863°. $y = \ln(10 + x)$.

2864. $y = x\ln(1 + x)$.

2865. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

2866. $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

2867. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.

2868. $y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2869°. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$ в окрестности точки $x = 0$. Воспользовавшись этим разложением, найти сумму ряда $1 + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$

2870. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение:

1) седьмой производной от функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x = 0$;
2) пятой производной от функции $y=x^2\sqrt[4]{1+x}$ при $x = 0$;
3) десятой производной от функции $y = x^6 e^x$ при $x = 0$;
4) кривизны линии $y = x\left[\sqrt[3]{(1+x)^4} - 1\right]$ в начале координат.

В задачах 2871–2877, пользуясь разложением функций в ряд Тейлора, вычислить пределы.

2871. $\lim_{x\to 0} \frac{x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{x^3}$.
2872. $\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}$.
2873. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.
2874°. $\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.
2875. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.
2876. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$.
2877. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x} - \frac{3}{x^4}\right)$.

9.3.2. Интервал сходимости

Для любого степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ существует число $R: \ 0 \leqslant R \leqslant +\infty$, называемое *радиусом сходимости*, при этом ряд абсолютно сходится на интервале $(a-R, a+R)$ (*интервале сходимости*) и расходится при $x<a-R$ и $x>a+R$; на концах интервала сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться. При $R=0$ интервал сходимости — точка a, при $R=+\infty$ — вся прямая.

В задачах 2878–2889 найти интервалы сходимости степенных рядов.

2878. $10x + 100x^2 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$
2879. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$
2880°. $x + \frac{x^2}{20} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}} + \ldots$
2881. $1 + x + \ldots + n!x^n + \ldots$
2882. $1 + 2x^2 + \ldots + 2^{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots$
2883. $x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + \ldots$
2884. $1 + 3x + \ldots + (n-1)\cdot 3^{n-1}x^{n-1} + \ldots$
2885. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \ldots$.
2886°. $x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nx)^n}{n!} + \ldots$

При исследовании сходимости на правом конце интервала учесть, что факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно формулой Стирлинга: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

2887. $x + 4x^2 + \ldots + (nx)^n + \ldots$

2888. $\frac{\ln 2}{2}x^2 + \frac{\ln 3}{3}x^3 + \ldots + \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1} + \ldots$

2889. $2x + \left(\frac{9}{4}x\right)^2 + \ldots + \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n + \ldots$

2890. Функцию $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, исходя из соотношения

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

и указать интервал сходимости полученного ряда.

2891. Функцию $y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, исходя из соотношения

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2},$$

и указать интервал сходимости полученного ряда.

2892. Функцию $y = \ln[(1+x)^{1+x}] + \ln[(1-x)^{1-x}]$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ и указать интервал сходимости полученного ряда.

2893°. Функцию $y = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ и указать интервал сходимости полученного ряда. Пользуясь разложением, найти сумму ряда $\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \ldots + \frac{n}{(2n+1)!} + \ldots$

§ 9.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

9.4.1. Вычисления приближенных значений функций

2894. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$, и оценить погрешность.

2895. Вычислить приближенное значение $\sin 18°$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$, и оценить погрешность.

2896. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$, взяв четыре члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = (1+x)^m$, и оценить погрешность.

В задачах 2897–2904, пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$, вычислить указанные выражения.

2897°. e^2 с точностью до 0,001.

2898. $\sqrt{3}$ с точностью до 0,001.

2899. $\frac{1}{e}$ с точностью до 0,0001.

2900. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 0,0001.

2901°. $\sin 1^\circ$ с точностью до 0,0001.

2902. $\cos 1^\circ$ с точностью до 0,001.

2903. $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,00001.

2904. $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

В задачах 2905–2911, пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$, вычислить указанные корни с точностью до 0,001.

2905°. $\sqrt[3]{30}$.

2906. $\sqrt[3]{70}$.

2907. $\sqrt[3]{500}$.

2908. $\sqrt[3]{1{,}015}$.

2909. $\sqrt[5]{250}$.

2910. $\sqrt[3]{129}$.

2911. $\sqrt[10]{1027}$.

В задачах 2912–2914, пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$, вычислить выражения.

2912°. $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

2913. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ с точностью до 0,000001.

2914. $\lg 5$ с точностью до 0,0001.

9.4.2. Решение уравнений

2915°. Дано уравнение $xy + e^x = y$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение функции y в ряд Тейлора по степеням x. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Тейлора последовательным дифференцированием.

2916. Дано уравнение $y = \ln(1+x) - xy$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение функции y в ряд Тейлора по степеням x. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Тейлора последовательным дифференцированием.

В задачах 2917–2919 решить уравнения относительно y (найти явное выражение для y) с помощью ряда Тейлора двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и последовательным дифференцированием.

2917. $y^3 + xy = 1$ (найти три члена разложения).

2918. $2\sin x + \sin y = x - y$ (найти два члена разложения).

2919. $e^x - e^y = xy$ (найти три члена разложения).

9.4.3. Интегрирование функций

В задачах 2920–2929 выразить в форме ряда интегралы, используя разложение в ряд подынтегральных функций; указать области сходимости полученных рядов.

2920°. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2921. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$.

2922. $\int \frac{e^x}{x}\,dx$.

2923. $\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

2924. $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2925. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2926°. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2927. $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx$.

2928. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}$.

2929. $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\,dx$.

В задачах 2930–2934 вычислить приближенные значения определенных интегралов, взяв указанное число членов разложения подынтегральной функции в ряд; указать погрешность.

2930°. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$ (3 члена).

2931. $\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ (3 члена).

2932. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 члена).

2933. $\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ (6 членов).

2934. $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 члена).

В задачах 2935–2938 вычислить с точностью до 0,001 интегралы.

2935°. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$.

2936. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2937. $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x\,dx$.

2938. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

2939°. Показать, что в интервале $(-0{,}1; 0{,}1)$ функция $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ отличается от функции $\operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10}$ не больше, чем на 0,0000001.

2940. Принимая во внимание тождество

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

вычислить π с 10 верными знаками.

2941. Разложить в ряд Тейлора функцию $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ двумя способами: путем непосредственного вычисления последовательных производных при $x = 0$ и путем перемножения рядов.

***2942.** Вычислить интеграл $\int_0^1 x^x\,dx$.

2943. Вычислить $\int_0^{0,5} e^{\sin x}\,dx$ с точностью до 0,0001.

2944. Вычислить $\int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos x}\,dx$ с точностью до 0,001.

9.4.4. Разные задачи

2945°. Вычислить площадь, ограниченную линией $y^2=x^3+1$, осью ординат и прямой $x=\frac{1}{2}$, с точностью до 0,001.

***2946.** Вычислить площадь овала $x^4 + y^4 = 1$ с точностью до 0,01.

2947. Вычислить длину дуги линии $25y^2 = 4x^5$ от острия до точки пересечения с параболой $5y = x^2$ с точностью до 0,0001.

2948. Вычислить длину одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ с точностью до 0,001.

2949°. Фигура, ограниченная линией $y = \operatorname{arctg} x$, осью абсцисс и прямой $x = \frac{1}{2}$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела вращения с точностью до 0,001.

2950. Фигура, ограниченная линиями $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, прямой $y = \frac{1}{2}$ и осью ординат, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела вращения с точностью до 0,001.

2951. Вычислить с точностью до 0,001 координаты центра масс дуги гиперболы $y = \frac{1}{x}$, ограниченной точками с абсциссами $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

2952. Вычислить с точностью до 0,01 координаты центра масс криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \frac{1}{\ln x}$, прямыми $x = 1{,}5$ и $x = 2$ и осью абсцисс.

Глава 10

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 10.1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2953. Выразить объем z конуса как функцию его образующей x и высоты y.

2954. Выразить площадь S треугольника как функцию его трех сторон x, y, z.

2955. Составить таблицу значений функции $z = 2x - 3y + 1$, давая независимым переменным значения от 0 до 5 через единицу.

2956. Составить таблицу значений функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$, давая независимым переменным значения от 0 до 1 через 0,1. Значения функции вычислять с точностью до 0,01.

2957. Найти значения функции:

1) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ при $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z = e^{\sin(x+y)}$ при $x = y = \frac{\pi}{2}$;

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$ при $x = 2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$.

2958°. Дана функция $F(x,y) = \frac{\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)\psi(xy)}$. Найти $F\left(a, \frac{1}{a}\right)$. В частности, положить $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ и подсчитать $F\left(a, \frac{1}{a}\right)$.

2959. Дана функция $F(x,y) = y^2 - \frac{1}{2}x^y$. Если x и y меняются с одинаковой скоростью, то какая функция при $x = 3$, $y = 2$ растет быстрее: та, которая получается из F при фиксированном y (меняется только x), или та же, которая получается при фиксированном x (меняется только y)?

2960. Дана функция

$$\varphi(x, y, z) = y^2 - (y \cos z + z \cos y)x + x^{\frac{y+z}{y-z}}.$$

Переменные y и z сохраняют фиксированные значения y_0 и z_0, причем $y_0 = 3z_0$. Что представляет собой график функции $v = \varphi(x, y_0, z_0)$? Является ли $\varphi(x, y, z)$:

1) рациональной функцией от y, от z;
2) целой функцией от x?

***2961.** Функцию $z = f(x, y)$, удовлетворяющую тождественно соотношению $f(mx, my) = m^k f(x, y)$ при любом m, называют однородной функцией k-го порядка. Показать, что однородная функция k-го порядка $z = f(x, y)$ всегда может быть представлена в виде $z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$.

2962. Однородность функции любого числа независимых переменных определяется аналогично функции двух переменных: например, $f(x, y, z)$ — однородная функция k-го порядка, если $f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z)$ при любом m. Также имеет место свойство $f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; доказать его.

2963. Проверить, что функция $z = F(x, y) = xy$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(ax + bu, cy + dv) = acF(x, y) + bcF(u, , y) + \\ + adF(x, v) + bdF(u, v).$$

2964°. Проверить, что функция $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$
$$(x, \quad y, \quad u, \quad v \quad \text{положительны}).$$

2965. Из уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определить z как явную функцию x и y. Будет ли функция однозначной?

2966. Дана сложная функция $z = u^v$, где $u = x + y$, $v = x - y$. Найти значение функции:

1) при $x = 0$, $y = 1$;
2) при $x = 1$, $y = 1$;
3) при $x = 2$, $y = 3$;
4) при $x = 0$, $y = 0$;
5) при $x = -1$, $y = -1$.

2967. $z=\frac{u+v}{uv}$, $u=w^t$, $v=w^{-t}$, $w=\sqrt{x+y}$, $t=2(x-y)$. Выразить z непосредственно в виде функции от x и y. Является ли z рациональной функцией от u и v; от w и t; от x и y?

2968. Дана сложная функция $z = u^w + w^{u+v}$, где $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Выразить z непосредственно в виде функции от x и y.

2969. $u = (\xi + \eta)^2 - \xi^3 - \eta^3$, $\xi = \frac{e^\omega + e^\varphi}{2}$, $\eta = \frac{e^\omega - e^\varphi}{2}$, $\omega = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\varphi = 2\ln(x + y + z)$. Выразить u непосредственно в виде функции от x, y и z. Является ли u целой рациональной функцией от ξ и η; от ω и φ; от x, y и z?

2970°. Сложную функцию

$$z = \left(\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}\right)^{xy} + x^2 + y^2$$

представить в виде «цепочки» зависимостей из двух звеньев.

2971. Исследовать методом сечений график функции $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Что представляют собой сечения плоскостями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$?

2972. Исследовать методом сечений график функции $z = xy$. Что представляют собой сечения плоскостями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$?

2973. Исследовать методом сечений график функции $z = y^2 - x^3$.

2974. Исследовать методом сечений график функции

$$z^3 = ax^2 + by^2 \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

§ 10.2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

10.2.1. Область определения

Областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество всех точек (x, y) для которых выражение $f(x, y)$ имеет смысл.

2975. Область ограничена параллелограммом со сторонами $y = 0$, $y = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$; граница параллелограмма исключается. Задать эту область неравенствами.

2976°. Областью служит фигура, ограниченная параболами $y = x^2$ и $x = y^2$ (включая границы). Задать эту область неравенствами.

2977. Записать с помощью неравенств открытую область, являющуюся правильным треугольником с вершиной в начале координат, со сторонами, равными a, причем одна из них направлена по положительной полуоси Ox (треугольник лежит в первом квадранте).

2978. Область ограничена бесконечным круглым цилиндром радиуса R (границы исключаются) с осью, параллельной оси Oz и проходящей через точку (a, b, c). Задать эту область с помощью неравенств.

2979. Записать с помощью неравенства область, ограниченную сферой радиуса R с центром в точке (a, b, c) (включая границу).

2980. Вершины прямоугольного треугольника лежат внутри круга радиуса R. Площадь S треугольника является функцией его катетов x и y: $S = \varphi(x, y)$. Какова область определения функции $S = \varphi(x, y)$.

2981°. В шар, радиуса R вписана пирамида с прямоугольным основанием, вершина которой ортогонально проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Объем пирамиды V является функцией сторон x и y ее основания. Будет ли эта функция однозначной? Составить для нее аналитическое выражение. Найти область определения функции.

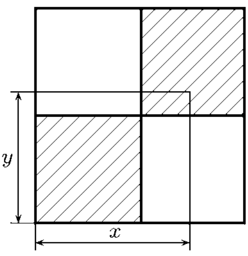

Рис. 10.1

2982. Квадратная доска состоит из четырех квадратных клеток; двух черных и двух белых, как указано на рис. 10.1; сторона каждой из них равна единице длины. Рассмотрим прямоугольник, стороны которого x и y параллельны сторонам доски и один из углов которого совпадает с черным ее углом. Площадь черной части этого прямоугольника будет функцией от x и y. Какова область определения этой функции? Выразить эту функцию аналитически.

В задачах 2983–3002 найти области определения функций.

2983. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

2984. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

2985. $z = \frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

2986. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

2987. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2988. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

2989°. $z = \ln xy$.

2990. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2991. $z = \arcsin \frac{x^2+y^2}{4} + \operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

2992. $z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2993. $z = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z = xy\sqrt{\ln \frac{R^2}{x^2+y^3}} + \sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

2995. $z = \operatorname{ctg} \pi(x+y)$.

2996. $z = \sqrt{\sin \pi(x^2+y^2)}$.

2997°. $z = \sqrt{x \sin y}$.

2998. $z = \ln x - \ln \sin y$.

2999. $z = \ln[x \ln(y-x)]$.

3000°. $z = \arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

3001. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

3002. $u = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R > r)$.

10.2.2. Предел. Непрерывность функции

$A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ следует, что $|f(x,y)-A| < \varepsilon$. Функция называется непрерывной в точке (a,b), если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$.

В задачах 3003–3008 вычислить пределы функций, полагая, что независимые переменные произвольно стремятся к своим предельным значениям.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

3004°. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

3006. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

3008. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3009. Показать, что функция $u = \frac{x+y}{x-y}$ при $x\to 0$, $y\to\to 0$ может стремиться к любому пределу (в зависимости от того, как стремятся к нулю x и y). Привести примеры таких изменений x и y, чтобы:

1) $\lim u = 1$;
2) $\lim u = 2$.

3010. Найти точки разрыва функции $z = \frac{2}{x^2+y^2}$. Как ведет себя функция в окрестности точки разрыва?

3011. Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

3012. Где будет разрывна функция $z = \frac{1}{x-y}$?

3013. Где будет разрывна функция $z = \frac{1}{\sin\pi x} + \frac{1}{\sin\pi y}$?

3014. Где будет разрывна функция $z = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$?

* **3015.** Исследовать непрерывность функции при $x = 0$, $y = 0$:

1)° $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$;
2) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$;
3) $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$;
4) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$;
5) $f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, $f(0,0) = 0$;
6)° $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, $f(0,0) = 0$.

10.2.3. Линии и поверхности уровня

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется линия $f(x,y) = C$ на плоскости xOy. Аналогично определяется поверхность уровня.

3016. Дана функция $z = f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Построить линии уровня этой функции для $z = 1, 2, 3, 4$.

3017. Функция $z = f(x,y)$ задана следующим образом: в точке $P(x,y)$ ее значение равно углу, под которым виден из этой точки данный в плоскости Oxy отрезок AB. Найти линии уровня функции $f(x,y)$.

В задачах 3018–3021 начертить линии уровня данных функций, придавая z значения от -5 до $+5$ через 1.

3018. $z = xy$.

3019. $z = x^2 y + x$.

3020. $z = y(x^2 + 1)$.

3021. $z = \frac{xy-1}{x^2}$.

3022. Построить линии уровня функции $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$, придавая z значения от -1 до $3/2$ через $1/2$.

3023. Построить линии уровня функции z, неявно заданной уравнением

$$\left(\frac{3}{2}\right)^z \left[(x-5)^2 + y^2\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^z \left[(x+5)^2 + y^2\right],$$

давая z значения от -4 до 4 через единицу.

3024. Построить линии уровня функции z, заданной неявно уравнением $y^2 = 2^{-z}(x - z)$, давая z значения от -3 до 3 через 1.

3025°. Найти линии уровня функции z, заданной неявно уравнением $z + x \ln z + y = 0$.

3026. В пространстве дана точка A. Расстояние переменной точки M от точки A есть функция координат точки M. Найти поверхности уровня этой функции, соответствующие расстояниям, равным 1, 2, 3, 4.

3027. Функция $u = f(x, y, z)$ задана следующим образом: в точке $P(x, y, z)$ ее значение равно сумме расстояний этой точки от двух данных точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Указать поверхности уровня функции $f(x, y, z)$.

3028. Найти поверхности уровня функции

$$u = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3029. Найти поверхности уровня функции $u = \frac{x^2+y^2}{z}$.

3030. Найти поверхности уровня функции:

1) $u = 5^{2x+3y+z}$;

2) $u = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

3031. На рис. 10.2 изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$. Построить график функции:

1) $z = f(x, 0)$;
2) $z = f(x, 4)$;
3) $z = f(1, y)$;
4) $z = f(-5, y)$;
5) $z = f(x, 3x)$;
6) $z = f(x, x^2)$.

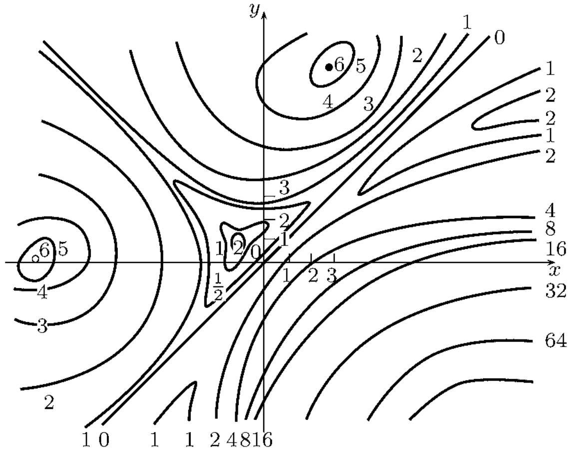

Рис. 10.2

§ 10.3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.3.1. Частные производные

Приращением по x функции $z = f(z, y)$ называется величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Предел $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции z по x.

3032. Объем газа v является функцией его температуры и давления: $v = f(p, T)$. Средним коэффициентом расширения газа при постоянном давлении и изменении температуры от T_1 до T_2 называют выражение $\frac{v_2 - v_1}{v_1(T_2 - T_1)}$. Что следует назвать коэффициентом расширения при постоянном давлении при данной температуре T_0?

3033. Температура в данной точке A стержня Ox является функцией абсциссы x точки A и времени t: $\theta = f(x, t)$.

Какой физический смысл имеют частные производные $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ и $\frac{\partial\theta}{\partial x}$?

3034. Площадь S прямоугольника выражается через основание b и высоту h формулой $S = bh$. Найти $\frac{\partial S}{\partial h}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ и выяснить геометрический смысл полученных результатов.

3035. Даны две функции: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ (a — постоянная) и $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$. Сравнить результаты.

В задачах 3036–3084 найти частные производные данных функций по каждой из независимых переменных (x, y, z, u, v, t, φ и ψ — переменные):

3036. $z = x - y$.

3037. $z = x^3y - y^3x$.

3038. $\theta = axe^{-t} + bt$ (a, b — постоянные).

3039. $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$.

3040°. $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

3041. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$.

3042. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3044. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

3045°. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3046. $z = x^y$.

3047. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3048. $z = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

3049. $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3050. $z = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

3051. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $z = \ln(x + \ln y)$.

3053°. $u = \operatorname{arctg}\frac{v+w}{v-w}$.

3054. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

3056. $z = (1 + xy)^y$.

3057. $z = xy\ln(x + y)$.

3058°. $z = x^{x^y}$.

3059. $u = xyz$.

3060. $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$.
3063. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$.
3064°. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.
3065. $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.
3066. $u = \ln(x + y + z)$.
3067. $u = x^{\frac{y}{z}}$.
3068. $u = x^{yz}$.
3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(3, 4)$.
3070°. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ в точке $(1, 2)$.
3071. $z = (2x + y)^{2x+y}$.
3072. $z = (1 + \log_y x)^3$.
3073. $z = xye^{\sin \pi xy}$.
3074. $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}$.
3075°. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$.
3076. $z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.
3077. $z = \ln\left[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}\right]$.
3078. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\frac{x+y}{xy}$.
3079. $z = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 1} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3080. $u = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.
3081°. $u = \operatorname{arctg}(x - y)^z$.
3082. $u = (\sin x)^{yz}$.
3083. $u = \ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
3084. $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv) + \ln\cos(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv)$.
3085°. $u = \frac{\cos(\varphi - 2\psi)}{\cos(\varphi + 2\psi)}$. Найти $\left.\frac{\partial u}{\partial \psi}\right|_{\substack{\varphi=\pi/4 \\ \psi=\pi}}$.
3086. $u = \sqrt{az^3 - bt^3}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $z = b$, $t = a$.
3087. $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = y = 0$.
3088. $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Найти $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=\pi/4}}$.

3089. $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. Найти $u_x + u_y + u_z$ при $x = y = z = 1$.

3090. $f(x, y) = x^3y - y^3x$. Найти $\left.\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right|_{\substack{x=1 \\ y=2}}$.

3091°. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к линии $z = \frac{x^2+y^2}{4}$, $y = 4$ в точке $(2, 4, 5)$?

3092. Какой угол образует с положительным направлением оси ординат касательная к линии $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = 1$ в точке $(1, 1, \sqrt{3})$?

3093. Под каким углом пересекаются плоские линии, получающиеся в результате пересечения поверхностей $z{=}x^2{+}\frac{y^2}{6}$ и $z = \frac{x^2+y^2}{3}$ плоскостью $y = 2$?

10.3.2. Дифференциалы. Приближенные вычисления

Функция называется *дифференцируемой*, если ее приращение может быть представлено в виде суммы линейной функции от приращений аргументов Δx и Δy и бесконечно малой порядка большего, чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Главная часть приращения дифференцируемой функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ называется *полным дифференциалом* функции z $(dx = \Delta x,\ dy = \Delta y)$. Выражения $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ называются *частными дифференциалами.*

В задачах 3094–3097 найти частные дифференциалы данных функций по каждой из независимых переменных.

3094. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$.

3095°. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3096. $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

3097. $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$.

3098. $z = \sqrt[3]{x + y^2}$. Найти $d_y z$ при $x{=}2$, $y{=}5$, $\Delta y{=}0{,}01$.

3099. $z = \sqrt{\ln xy}$. Найти $d_x z$ при $x = 1$, $y = 1{,}2$, $\Delta x = 0{,}016$.

3100°. $u = p - \frac{qr}{p} + \sqrt{p + q + r}$. Найти $d_p u$ при $p = 1$, $q = 3$, $r = 5$, $\Delta p = 0{,}01$.

В задачах 3101–3109 найти полные дифференциалы функций.

3101. $y = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$.

3102. $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

3103. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

3104. $z = \arcsin\frac{x}{y}$.

3105°. $z = \sin(xy)$.

3106. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

3108. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.

3109. $u = x^{yz}$.

10.3.3. Применения к вычислениям

3110°. Найти значение полного дифференциала функции $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$, $y = 4$, $\Delta = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3111. Найти значение полного дифференциала функции $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

3112. Найти значение полного дифференциала функции $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$ при $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

3113. Вычислить приближенно изменение функции $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ при изменении x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ и y от $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.

3114. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

3115°. Подсчитать приближенно $1{,}04^{2{,}02}$.

3116. Найти длину отрезка прямой $x = 2$, $y = 3$, заключенного между поверхностью $z = x^2 + y^2$ и ее касательной плоскостью в точке $(1, 1, 2)$.

3117. Тело взвесили в воздухе ($4{,}1 \pm 0{,}1$ Н) и в воде ($1{,}8 \pm 0{,}2$ Н). Найти плотность тела и указать погрешность подсчета.

3118. Радиус основания конуса равен $10{,}2 \pm 0{,}1$ см, образующая равна $44{,}6 \pm 0{,}1$ см. Найти объем конуса и указать погрешность подсчета.

3119°. Для вычисления площади S треугольника по стороне a и углам B и C пользуются формулой $S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$. Найти относительную погрешность δ_s при вычислении S, если относительные погрешности данных элементов равны соответственно δ_a, δ_B, δ_C.

3120. Сторона треугольника имеет длину 2,4 м и возрастает со скоростью 10 см/с; вторая сторона длиной 1,5 м уменьшается со скоростью 5 см/с. Угол, заключенный между этими сторонами, равный 60°, возрастает со скоростью 2° в секунду. Как и с какой скоростью изменяется площадь треугольника?

3121. В усеченном конусе радиусы оснований равны $R = 30$ см, $r = 20$ см, высота $h = 40$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить R на 3 м, r на 4 м, h на 2 мм?

3122. Показать, что при вычислении периода T колебания маятника по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести) относительная погрешность равна полусумме относительных погрешностей, допущенных при определении величин l и g (все погрешности предполагаются достаточно малыми).

3123°. Выразить погрешность при вычислении радиуса r дуги AB (рис. 10.3) окружности по хорде $2s$ и стрелке p через погрешности ds и dp. Вычислить dr при $2s = 19{,}45\,\text{см} \pm 0{,}5\,\text{мм}$, $p = 3{,}62\,\text{см} \pm 0{,}3\,\text{мм}$.

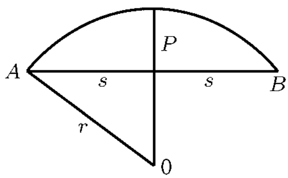

Рис. 10.3

§ 10.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

10.4.1. Сложная функция*

Если $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = f(x,y)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Если $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = f(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

3124. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; $\frac{du}{dt} = ?$

3125. $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$; $y = e^t$; $\frac{du}{dt} = ?$

3126°. $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

3127. $z = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $u = u\sin v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

3128°. $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

---

*Начиная с этого раздела и до конца главы 10 нумерация задач в настоящем издании отличается от нумерации 9-го и более ранних изданий.

3129. $u = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{du}{dx} =$? Найти $\frac{du}{dx}$, если $y = x^3$.

3130. $z = \operatorname{arctg}(xy)$; найти $\frac{dz}{dx}$, если $y = e^x$.

3131°. $u = \arcsin\frac{x}{z}$, $z = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} =$?

3132. $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} =$?

3133. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; $\frac{du}{dx} =$?

3134. $z = \frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz =$?

3135°. $z = (x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} =$? $\frac{\partial z}{\partial y} =$? $dz =$?

3136. $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x} =$? $\frac{\partial z}{\partial y} =$?

3137. Показать, что функция $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{v^2+u^2}$.

3138. Показать, что функция $z = \varphi(x^2+y^2)$, где $\varphi(u)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3139. $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$; убедиться, что

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x\cos y,$$

какова бы ни была дифференцируемая функция F.

3140°. $z = \frac{y}{f(x^2-y^2)}$; убедиться, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, какова бы ни была дифференцируемая функция f.

3141. Показать, что однородная дифференцируемая функция нулевого порядка $z = F\left(\frac{y}{x}\right)$ (см. задачу 2961) удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3142. Показать, что однородная функция k-го порядка $u = x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$, где F — дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ku$.

3143. Проверить предложение задачи 3142 для функции $u = x^5\sin\frac{z^2+y^2}{x^2}$.

3144. Дана дифференцируемая функция $f(x,y)$. Доказать, что если переменные x, y заменить линейными однородными функциями от X, Y, то полученная функция $F(X,Y)$ связана с данной функцией соотношением $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y}$.

10.4.2. Неявно и параметрически заданные функции

В задачах 3145–3155 найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, за данных неявно.

3145°. $x^3y - y^3x = a^4$.

3146. $x^2y^2 - x^4 - y^2 = a^4$.

3147. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

3148. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

3149. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.

3150°. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3151. $xy - \ln y = a$.

3152. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

3153. $yx^2 = e^y$.

3154. $ye^x + e^y = 0$.

3155°. $y^x = x^y$.

3156. $F(x,y) = F(y,x)$. Показать, что производная от y по x может быть выражена с помощью дроби, числитель которой получается из знаменателя перестановкой букв y и x.

3157. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$; найти $\frac{\partial y}{\partial x}$ при $x = 6$, $y = 2$ и при $x = 6$, $y = 8$. Дать геометрическое истолкование полученных результатов.

3158. $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$; найти $\frac{\partial y}{\partial x}$ при $x = y = a$.

3159°. Доказать, что из $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ следует $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$.

3160. Доказать, что из $a+b(x+y)+cxy = m(x-y)$ следует $\frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{dy}{a+2by+cy^2}$.

3161. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x} =?$ $\frac{\partial z}{\partial y} =?$

3162. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} =?$ $\frac{\partial z}{\partial y} =?$

3163. $z^3 + 3xyz = a^3$; $\frac{\partial z}{\partial x} =?$ $\frac{\partial z}{\partial y} =?$

3164. $e^z - xyz = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} =?$ $\frac{\partial z}{\partial y} =?$

3165°. Показать, что, какова бы ни была дифференцируемая функция φ, из соотношения $\varphi(cx-az, cy-bz) = 0$ следует $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$.

3166. $F(x,y,z) = 0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

3167. Найти полный дифференциал функции z, определяемый уравнением $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$.

3168. Функция z задана параметрически: $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Выразить z как явную функцию от x иy.

3169. $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$. Выразить z как явную функцию от x и y.

3170°. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = kv$. Выразить z как явную функцию от x и y.

В задачах 3171–3175 выразить dz через x, y, z, dx и dy от функций, заданных параметрически.

3171. $x = \frac{u^2+v^2}{2}$, $y = \frac{u^2-v^2}{2}$, $z = uv$.

3172. $x = \sqrt{a}(\sin u + \cos v)$, $y = \sqrt{a}(\cos u - \sin v)$, $z = 1 + \sin(u - v)$.

3173. $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

3174. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$.

3175°. $x = v\cos u - u\cos u + \sin u$, $y = v\sin u - u\sin u - \cos u$, $z = (u-v)^2$.

3176. $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$, $z = uv$. Выразить dz через u, v, dx и dy.

3177. Соотношения $u = f(x,y)$, $v = F(x,y)$, где f и F — дифференцируемые функции x и y, определяют x и y как дифференцируемые функции от u и v. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

3178. u и v являются функциями x, y, z, удовлетворяющими соотношениям $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Показать, что

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Пусть $y = f(x,t)$, $F(x,y,t) = 0$. Проверить, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180°. Пусть $f(x,y,z) = 0$, $F(x,y,z) = 0$. Проверить, что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 10.5. ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Частные производные от производных первого порядка функции z называются *частными производными второго по-*

рядка. Они обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=z''_{xx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}\ldots.$$

Если рассматриваемые частные производные непрерывны, результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, например

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

3181. $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z=x^y$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183°. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Показать, что $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

В задачах 3185–3192 найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от данных функций.

3185. $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

3186°. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

3187. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3188. $z=\sin^2(ax+by)$.

3189. $z=e^{xe^y}$.

3190. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

3191°. $z=y^{\ln x}$.

3192. $z=\arcsin(xy)$.

3193. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=?$

3194. $z=e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=?$

3195°. $z=\ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=?$

3196. $z=\sin xy$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=?$

3197. $w=e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=?$

3198. $v=x^my^nz^p$; $\frac{\partial^6 v}{\partial x\,\partial y^3\,\partial z^2}=?$

3199°. $z=\ln(e^x+e^y)$; убедиться, что $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ и что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0.$$

3200. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3201. $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3202°. $u = \frac{1}{\sqrt{s^2+y^2+z^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3203. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; показать, что $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$, $\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$.

3204°. При каком значении постоянной a функция $v = x^3 + axy^2$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$?

3205. $z = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}$; показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$; показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}\right) = 0.$$

3207. $z = f(x, y)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$; проверить, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

3208. $v = x\ln(x + r) - r$, где $r^2 = x^2 + y^2$; показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x + r}.$$

3209°. Найти выражение для второй производной $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ от функции y, заданной неявно уравнением $f(x, y) = 0$.

3210. $y=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$. Показать, что $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции φ и ψ.

3211. $u = \varphi(x) + \psi(y) + (x - y)\psi'(y)$. Проверить, что

$$(x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

(φ и ψ — дважды дифференцируемые функции).

3212. $z = y\varphi(x^2 - y^2)$. Проверить, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ (φ — дифференцируемая функция).

3213. $r = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0$$

(φ и ψ — дважды дифференцируемые функции).

3214. $u = \frac{1}{y}[\varphi(ax+y) + \psi(ax-y)]$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

3215.° $u = \frac{1}{x}[\varphi(x-y) + \psi(x+y)]$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

3216. $u = xe^y + ye^x$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^3\,\partial y}.$$

3217. $u = e^{xyz}$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u.$$

3218. $u = \ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right).$$

В задачах 3219–3224 найти дифференциалы второго порядка от данных функций.

3219. $z = xy^2 - x^2y$.

3220. $z = \ln(x-y)$.

3221. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$.

3222.° $z = x\sin^2 y$.

3223. $z = e^{xy}$.

3224. $u = xyz$.

3225. $z = \sin(2x+y)$. Найти d^3z в точках $(0, \pi)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3226. $u = \sin(x+y+z)$; $d^2u = ?$

3227.° $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $d^2z = ?$

3228. $z^3 - 3xyz = a^3$; $d^2z = ?$

3229. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$. Найти d^2z в точке $(2, 1, 2)$.

10.5.1. Замена переменных

3230. Преобразовать дифференциальное выражение

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+y,$$

полагая $x=\frac{1}{t}$.

3231°. Преобразовать дифференциальное выражение

$$x^2y''-4xy'+y,$$

полагая $x=e^z$.

3232. Преобразовать дифференциальное выражение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay,$$

полагая $x=\sin t$.

3233. Преобразовать дифференциальное выражение $\frac{y''}{y'^3}+$ $+y$, считая y независимой переменной, x — функцией от нее.

3234. Преобразовать выражение $y'y''-3y''^2$, принимая за независимую переменную y.

3235°. Преобразовать выражение $yy''-2(y^2+y'^2)$ к новой функции v, полагая $y=\frac{1}{v}$.

3236. Преобразовать к полярным координатам уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. Полярные координаты связаны с декартовыми формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

3237°. Выражение $k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ преобразовать к полярным координатам ρ, φ.

3238. Функция z зависит от x, y. В выражении $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$ сделать замену независимых переменных с помощью формул $x=u\cos v$; $y=u\sin v$.

3239°. Оператор Лапласа $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам.

3240. Выражение $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+kz$ преобразовать к полярным координатам, считая, что $z=\omega(\rho)$ зависит только от ρ и не зависит от φ.

3241. В выражении $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$ независимые переменные x и y заменить переменными u и v, а функцию z — переменной w, полагая, что эти переменные связаны соотношением $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$, $z=\frac{u^2-v^2}{4}-w$.

Глава 11

ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 11.1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

11.1.1. Формула Тейлора

Если функция $f(x,y)$ имеет в окрестности точки (x,y) непрерывные частные производные до $n+1$-го порядка включительно, в этой окрестности выполняется *формула Тейлора*:

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= f(x,y) + (hf'_x(x,y) + kf'_y(x,y)) + \\ &+ \frac{1}{2!}(h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) + o\left(\sqrt{(h^2+k^2)^n}\right). \end{aligned}$$

3242. $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - xy$; разложить функцию $f(x+h,\ y+k)$ по степеням h и k.

3243. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; найти приращение, которое получает функция при переходе независимых переменных от значений $x=5$, $y=6$ к значениям $x=5+h$, $y=6+k$.

3244. $f(x,y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$; найти приращение, которое получает функция при переходе независимых переменных от значений $x=1$, $y=2$ к значениям $x=1+h$, $y=2+k$. Ограничиваясь членами до второго порядка включительно, вычислить $f(1{,}02, 2{,}03)$.

3245°. $f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxh + Eyz + Fzx$; разложить $F(x+h, y+k, z+l)$ по степеням h, k и l.

3246. Разложить $z = \sin x \sin y$ по степеням $x - \frac{\pi}{4}$ и $y - \frac{\pi}{4}$. Найти члены первого и второго порядка и R_2 (остаточный член второго порядка).

3247. Функцию $z = x^y$ разложить по степеням $x-1$, $y-1$, найдя члены до третьего порядка включительно. Использовать результат для вычисления (без таблиц!) $z_1 = 1{,}1^{1{,}02}$.

3248°. $f(x, y) = e^x \sin y$; разложить $f(x+h, y+k)$ по степеням h и k, ограничиваясь членами третьего порядка относительно h и k. Использовать результат для вычисления $z_1 = e^{0{,}1} \sin 0{,}49\pi$.

3249. Найти несколько первых членов разложения функции $e^x \sin y$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$.

3250. Найти несколько первых членов разложения функции $e^x \ln(1+y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$.

В задачах 3251–3256 разложить в ряд Тейлора при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ данные функции.

3251. $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$.

***3252.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$.

3253. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$.

3254°. $z = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

3255. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

3256. $z = e^x \cos y$.

3257. Найти несколько первых членов разложения по степеням $x - 1$, $y - 1$ функции z, заданной неявно уравнением $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ и равной единице при $x = 1$, $y = 1$.

3258. Получить приближенную формулу $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$.

11.1.2. Экстремумы

Определение точки экстремума аналогично соответствующему определению для функции одной переменной.

Необходимое условие экстремума. В точке экстремума дифференцируемой функции обе первые частные производные равны нулю. (Такая точка называется *стационарной*).

Достаточное условие экстремума. Пусть (a, b) — стационарная точка, $a_{11} = f''_{xx}(a, b)$, $a_{12} = f''_{xy}(a, b)$, $a_{22} = f''_{yy}(a, b)$, $I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}. \end{vmatrix}$ Тогда если $I > 0$, $a_{11} < 0$ (a, b) — точка максимума, если $I > 0$, $a_{11} > 0$ — точка минимума, если $I < 0$, экстремума в данной точке нет. При $I = 0$ необходимо дальнейшее исследование.

В задачах 3259–3267 найти стационарные точки функций.

3259. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3260°. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

3261. $z = xy(a - x - y)$.

3262. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

3263. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$.

3264. $z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

3265°. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

3266. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

3267. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

3268. На рис. 11.1 изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$. Какие особенности имеет функция в точках A, B, C, D и на линии EF?

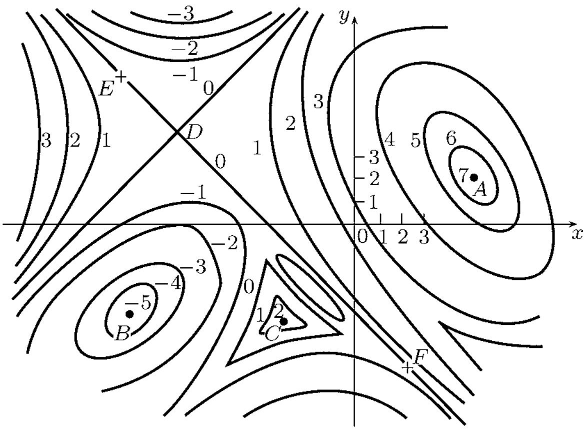

Рис. 11.1

3269. Функция z задана неявно: $2x^2+2y^2+z^2+8xz-$ $-z+8=0$. Найти ее стационарные точки.

3270°. Функция z задана неявно: $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy -$ $- 2zx - 2yz - 72 = 0$. Найти ее стационарные точки.

***3271.** Найти точки экстремума функции $z = 2xy - 3x^2 -$ $- 2z^2 + 10$.

3272. Найти точки экстремума функции $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3273. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3274. Убедиться, что функция $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ имеет минимум в точке $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3275. Убедиться, что при $x=\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ и при $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ функция $z = x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет минимум.

3276. Убедиться, что при $x = 5$, $y = 6$ функция $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ имеет минимум.

3277°. Найти стационарные точки функции $z = x^3y^2\times(12 - x - y)$, удовлетворяющие условию $x > 0$, $y > 0$, и исследовать их характер.

3278. Найти стационарные точки функции $z = x^3 + y^2 - 3xy$ и исследовать их характер.

11.1.3. Наибольшие и наименьшие значения

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, принимает наибольшее и наименьшее значение в стационарных точках внутри области или на ее границе.

3279. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3280. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

3281°. Найти наибольшее значение функции $z = x^2y\times(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3282. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{-x^2-y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3283. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3284. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

3285. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

3286°. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ была бы наименьшей.

3287. Через точку (a, b, c) провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трехгранника, был наименьшим.

3288. Даны n точек: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от всех данных точек была бы наименьшей.

3289. Даны три точки $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ и $C(8, 0, 8)$. На плоскости Oxy найти такую точку D, чтобы сфера, проходящая через A, B, C и D, имела наименьший радиус.

3290°. В данный шар диаметра $2R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

11.1.4. Условные экстремумы

Точки условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\Phi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*) совпадают с точками (обычного) экстремума *функции Лагранжа* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\Phi(x, y)$.

В задачах 3291–3296 исследовать функции на экстремум.

3291. $z = x^m + y^m$ $(m > 1)$ при $x + y = 2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3292. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2a^2$.

3293. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

3294. $z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$.

3295°. $u = x + y + z$ при $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

3296. $u = xyz$ при:

1) $x + y + z = 5$; 2) $xy + xz + yz = 8$.

***3297.** Доказать справедливость соотношения

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y) = x^3 = 3xy^2 + 18y$, причем $3x^2y - y^3 - 6x = 0$. Доказать, что функция $f(x, y)$ достигает экстремума в точках $x = y \pm \sqrt{3}$.

3299. Найти минимум функции $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, где a, b, c — положительные постоянные, а x, y, z связаны соотношением $x + y + z = 1$.

3300. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$ при условии $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$.

3301. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ была бы наименьшей.

3302°. На плоскости $x + y - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x + 3z = 6$ и $y + 3z = 2$ была бы наименьшей.

3303. Даны точки $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$. На поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти такую точку S, чтобы объем пирамиды $SABC$ был:

1) наибольшим; 2) наименьшим.

Проверить ответ элементарно-геометрическим путем.

3304. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую поверхность.

3305°. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем.

3306. Найти объем наибольшего прямоугольного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид с полуосями a, b и c.

3307. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

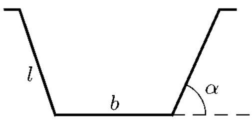

Рис. 11.2

3308. Сечение канала имеет форму равнобочной трапеции данной площади. Как выбрать его размеры, чтобы омываемая поверхность канала была наименьшей (рис. 11.2)?

3309. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, найти тот, объем которого наибольший.

3310°. Указать наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и объемом V, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

3311. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме $12a$ всех его ребер.

3312°. Около данного эллипса описать треугольник с основанием, параллельным большой оси, площадь которого была бы наименьшей.

3313. На эллипсе $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x + y - 9 = 0$.

3314. На параболе $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ найти точку, наименее удаленную от прямой $3x - 6y + 4 = 0$.

3315°. На параболе $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ найти точку, ближайшую к прямой $9x - 7y + 16 = 0$.

3316. Найти наибольшее расстояние точек поверхности $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$ от плоскости $z = 0$.

3317. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

3318. В прямой эллиптический конус, полуоси основания которого равны a и b, высота H, вписана призма с прямоугольным основанием, так, что стороны основания параллельны осям, а пересечение диагоналей основания лежит в центре эллипса. Каковы должны быть стороны основания и высота этой призмы, для того, чтобы ее объем был наибольшим? Каков этот наибольший объем?

3319. Найти правильную треугольную пирамиду заданного объема, имеющую наименьшую сумму ребер.

3320. На эллипсе даны две точки; найти на том же эллипсе третью точку так, чтобы треугольник, имеющий вершинами указанные точки, был наибольшим по площади.

3321°. К эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести нормаль, наиболее удаленную от начала координат.

3322. На эллипсоиде вращения $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от плоскости $3x + 4y + 12z = 288$.

3323. Даны плоские линии $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$. Показать, что экстремум расстояния между точками (α, β) и (ξ, η), лежащими соответственно на этих линиях, имеет место при выполнении следующего условия:

$$\frac{\alpha - \xi}{\beta - \eta} = \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}} = \frac{\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Пользуясь этим, найти кратчайшее расстояние между эллипсом $x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0$ и прямой $x + y - 8 = 0$.

§ 11.2. ПЛОСКИЕ ЛИНИИ

11.2.1. Касательные и нормали

В задачах 3324–3327 написать уравнения касательной и нормали к линиям в указанных точках.

3324. $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ в точке $(1, 1)$.

3325°. $a^2(x^4 + y^4) - x^3y^3 = 9a^6$ в точке $(a, 2a)$.

3326. $\cos xy = x + 2y$ в точке $(1, 0)$.

3327. $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ в точке ее пересечения с осью Oy.

11.2.2. Особые точки

Точка $M(a, b)$ плоской кривой $f(x, y) = 0$ называется *особой*, если $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. Если в особой точке производные второго порядка $a_{11} = f''_{xx}(a, b)$, $a_{12} = f''_{xy}(a, b)$, $a_{22} = f''_{yy}(a, b)$ не все равны нулю, $I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ Тогда если $I > 0$, M — *изолированная точка*, если $I < 0$, M — *узел*, если $I = 0$, M — *точка возврата* или *изолированная точка* или *точка самоприкосновения*.

В задачах 3328–3340 найти особые точки

3328. $y^2 = x^2(x - 1)$.

3329. $a^2x^2 = (x^2 + y^2)y^2$.

3330°. $y^2 = ax^2 + bx^5$.

3331. $y^2 = x(x - a)^2$.

3332. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3333. $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$.

3334. $x^4 + 12x^3 - 6y^3 + 36x^2 + 27y^2 - 81 = 0$.

3335. $x^3 + y^3 + 3axy = 0$.

3336. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3337°. $y = x \ln x$.

3338. $y^2 = \sin^3 x$.

3339°. $y^2 = (x - a)^3$.

3340. $x^5 = (y - x^2)^2$.

11.2.3. Огибающие

Огибающей семейства плоских кривых называется кривая, касающаяся всех линий данного семейства, причем в каждой своей точке касающаяся какой либо линии данного семейства. Параметрические уравнения огибающей семейства кривых $f(x, y, \alpha) = 0$ определяются из системы

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

исключением параметра α.

3341. Найти уравнение огибающей семейства прямых $y = ax + f(a)$. В частности, положить $f(a) = \cos a$.

3342. Найти огибающую семейства прямых $y = 2mx + m^4$.

3343. Через точку $A(a, 0)$ проведен пучок прямых. Найти огибающую семейства нормалей, проведенных к прямым этого пучка в точках их пересечения с осью Oy.

3344. Найти огибающую семейства парабол $y^2 = a(x-a)$.

3345°. Найти огибающую семейства парабол $ax^2 + a^2y = 1$.

3346. Найти огибающую семейства парабол $y = a^2(x - a)^2$.

3347. Найти огибающую семейства полукубических парабол $(y - a)^2 = (x - a)^3$.

3348. Найти огибающую семейства линий $x^2 + ay^2 = a^3$.

3349. Найти огибающую семейства эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при условии, что сумма полуосей каждого эллипса равна d.

3350. Радиусы окружности проектируются на два ее взаимно перпендикулярных диаметра и на проекциях, как на полуосях, строятся эллипсы. Найти огибающую полученного семейства эллипсов.

3351°. Найти огибающую семейства окружностей, имеющих центры на параболе $y = bx^2$ и проходящих через ее вершину.

3352. Прямая движется так, что сумма длин отрезков, отсекаемых ею на осях координат, остается постоянной и равной a. Найти огибающую полученного семейства прямых.

3353. Найти огибающую диаметра круга, катящегося без скольжения по данной прямой (радиус круга R).

3354. На хордах круга (радиуса R), параллельных заданному направлению, как на диаметрах, описываются окружности. Найти огибающую этого семейства окружностей.

3355°. Прямая движется так, что произведение отрезков, отсекаемых ею на осях координат, равно постоянной величине a. Найти огибающую этих прямых.

3356. Показать, что всякая линия является огибающей семейства своих касательных.

3357. Показать, что эволюта линии является огибающей семейства ее нормалей. Найти эволюту параболы $y^2 = 2px$ как геометрическое место центров кривизны и как огибающую семейства нормалей. Сравнить результаты.

3358. Доказать теорему: если линия (A) есть огибающая семейства прямых $x\cos t + y\sin t - f(t) = 0$, то эволюта линии (A) является огибающей семейства прямых $-x\sin t + y\cos t - f'(t) = 0$.

3359. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки M равносторонней гиперболы $xy = 1$ проектируется из асимптоты гиперболы. Найти огибающую эллипсов, построенных на проекциях $\overrightarrow{OM}$, как на полуосях.

§ 11.3. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА. ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПОВЕРХНОСТИ

11.3.1. Векторная функция скалярного аргумента

Проиводная векторной функции скалярного аргумента $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$. Конец переменного радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ описывает в пространстве кривую, называемую *годографом* $\boldsymbol{r}$.

3360. Доказать формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}.$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — векторные функции скалярного аргумента t.

3361. Дано $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Найти производные:

1) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2)$; 3)° $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$;

2) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$; 4) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$.

3362. Дано, что при всех значениях t векторы $\boldsymbol{r}(t)$ и $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ коллинеарны. Доказать, что и векторы $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}$, ..., $\frac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ коллинеарны вектору $\boldsymbol{r}(t)$.

3363. Доказать, что если модуль $|\boldsymbol{r}|$ функции $\boldsymbol{r}(t)$ остается постоянным для всех значений t, то $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\perp\boldsymbol{r}$. (Каков геометрический смысл этого факта?) Имеет ли место обратная теорема?

3364. Дано $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos\omega t+\boldsymbol{b}\sin\omega t$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы. Доказать, что

1) $\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\omega\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и 2) $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\omega^2\boldsymbol{r}=0$.

3365. Доказать, что если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор направления вектора $\boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{e}\times d\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{E}\times d\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E}^2}$.

3366. Доказать, что если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}e^{\omega t}+\boldsymbol{b}e^{-\omega t}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, то $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}-\omega^2\boldsymbol{r}=0$.

3367. $\boldsymbol{u}=\alpha(x,y,z,t)\boldsymbol{i}+\beta(x,y,z,t)\boldsymbol{u}+\gamma(x,y,z,t)\boldsymbol{k}$, где x, y, z — функции от t. Доказать, что

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

3368°. Дано: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$, $u=\varphi(x)$. Выразить производные $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}$ через $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}$.

3369. Доказать, что если для векторной функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ имеет место соотношение $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha\boldsymbol{r}$, где $\alpha=\text{const}$, то годографом функции $\boldsymbol{r}(t)$ является луч, выходящий из полюса.

3370. Пусть функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена, непрерывна и дифференцируема в интервале (t_1,t_2), причем $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2)$. Применить теорему Ролля к функции $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{a}$ — произвольный постоянный вектор. Объяснить результат геометрически.

3371. Дан радиус-вектор, движущийся в пространстве точки $\boldsymbol{r}\left\{a\sin t,-a\cos t,bt^2\right\}$ (t — время, a и b — постоянные). Найти годографы скорости и ускорения.

3372°. Найти траекторию движения, для которого радиус-вектор движущейся точки удовлетворяет условию $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

3373. Материальная точка движется по закону $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$ ($\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор этой точки в момент t, $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{g}$ — заданные векторы). Показать, что:

1) кинетическая энергия материальной точки есть квадратичная функция времени;
2) $\boldsymbol{v}_0$ — начальная скорость (т. е. значение вектора скорости в момент $t = 0$);
3) движение происходит с постоянным ускорением, равным вектору $\boldsymbol{g}$;
4) движение происходит по параболе (если только векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{g}$ не коллинеарны), ось которой параллельна вектору $\boldsymbol{g}$.

3374. Закон движения материальной точки задан формулой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos t + \boldsymbol{b}\sin t + \boldsymbol{c}$, где векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Определить траекторию движения. В какие моменты скорость движения будет экстремальной? В какие моменты ускорение будет экстремальным?

3375°. Формулы преобразования декартовых координат в сферические имеют вид $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $a = \rho\cos\theta$, где ρ — расстояние данной точки от полюса, θ — широта ее, φ — азимут или долгота. Найти компоненты скорости движения материальной точки в направлениях единичных ортогональных векторов $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$.

11.3.2. Пространственные линии

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — неособая точка пространственной кривой $\mathbf{r} = \boldsymbol{r}(\mathbf{t})$; через нее проходят три взаимно перпендикулярные плоскости:

1) *соприкасающаяся плоскость*, содержащая векторы $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$;

2) *нормальная плоскость*, перпендикулярная к вектору $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$;

3) *спрямляющая плоскость*, перпендикулярная к первым двум плоскостям.

Пересечение плоскостей 1) и 3) дает *касательную*, плоскостей 1) и 2) *главную нормаль*, 2) и 3) *бинормаль*, определяемые векторами $\tau = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ (вектор касательной), $\beta = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ (вектор бинормали) и $\nu = \beta \times \tau$ (вектор главной нормали). Уравнение касательной

$$\frac{x - x_0}{\tau_x} = \frac{y - y_0}{\tau_y} = \frac{z - z_0}{\tau_z},$$

где $\tau_x = \frac{dx}{dt}$, $\tau_y = \frac{dy}{dt}$, $\tau_z = \frac{dz}{dt}$, уравнение нормальной плоскости

$$\tau_x(x - x_0) + \tau_y(y - y_0) + \tau_z(z - z_0) = 0.$$

Заменяя координаты τ на координаты β и ν, получаем уравнения бинормали и соприкасающейся плоскости и, соответственно, главной нормали и спрямляющей плоскости.

В задачах 3376–3383 составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для данных линий в указанных точках.

3376. $\boldsymbol{r}\left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$, т. е. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$, в произвольной точке.

3377. $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{k}{2\pi}\varphi$ в данной точке $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$. Доказать, что касательная во всех точках линии составляет с осью Oz один и тот же угол.

3378. $x = at$, $y = \frac{1}{2}at^2$, $z = \frac{1}{3}at^3$ в точке $(6a, 18a, 72a)$.

3379°. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ в точке $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

3380. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ в точке $(1, 3, 4)$.

3381. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ в точке $(-2, 1, 6)$.

3382. $x^2 + y^2 = z^2$, $x = y$ в точке (x_0, y_0, z_0).

3383. $x^3 + z^3 = a^3$, $y^3 + z^3 = b^3$ в произвольной точке.

3384. На линии $\boldsymbol{r}\{\cos t, \sin t, e^t\}$ найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

В задачах 3385–3387 составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали к данным линиям в указанных точках.

3385°. $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке $(1, 1, 1)$.

3386. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ в произвольной точке.

3387. $\boldsymbol{r}\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$ в точке $(e, e^{-1}, \sqrt{2})$.

3388. Показать, что касательные, главные нормали и бинормали линии $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ составляют постоянные углы с осью Oz.

В задачах 3389–3392 составить уравнения касательной прямой, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости к данным линиям в указанных точках.

3389. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ в точке $(1, 0, 1)$.

3390°. $x^2+y^2+z^2=3$, $x^2+y^2=2$ в точке $(1,1,1)$.

3391. $\boldsymbol{r}\{\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t\}$ в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

3392. $\boldsymbol{r}\{t^3-t^2-5, 3t^2+1{,}2t^3-16\}$ в точке, соответствующей значению параметра $t=2$.

3393. Показать, что линия $\boldsymbol{r}\{2t+3, 3t-1, t^2\}$ имеет во всех точках одну и ту же соприкасающуюся плоскость. Объяснить этот факт геометрически.

3394. Доказать, что линия

$$\boldsymbol{r}\{a_1t^2+b_1t+c_1, a_2t^2+b_2t+c_2, a_3t^2+b_3t+c_3\}$$

плоская, и составить уравнение той плоскости, в которой она расположена.

3395. Найти радиус кручения линии $\boldsymbol{r}\{\cos t, \sin t, \operatorname{ch} t\}$.

3396°. Найти радиус кривизны линии $\boldsymbol{r}\{\ln\cos t, \ln\sin t, \sqrt{2}t\}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$. Показать, что кручение в любой ее точке равно кривизне в этой точке.

3397. Показать, что для линии $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ (см. задачу 3388) отношение кривизны к кручению остается постоянным для всех точек кривой.

3398. Как выразится кривизна пространственной линии, заданной уравнениями $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$?

3399. Выразить векторы τ_1, ν_1, β_1 через произвольные радиус-вектора точки на кривой $r=r(t)$.

3400. Выразить векторы $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ через два других.

3401°. Найти вектор $\boldsymbol{\omega}(s)$ (вектор Дарбу), удовлетворяющий условиям $\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}_1$; $\frac{d\boldsymbol{\nu}_1}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}_1$; $\frac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}_1$.

11.3.3. Длина дуги пространственной линии

Длина дуги кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ от $t=t_1$ до $t=t_2$ равна $L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{{x'_t}^2+{y'_t}^2+{z'_t}^2}\,dt$.

В задачах 3402–3409 найти длину дуги линий.

3402. $\boldsymbol{r}\{2t, \ln t, t^2\}$ от $t=1$ до $t=10$.

3403. $\boldsymbol{r}\{a\cos t, a\sin t, a\ln\cos t\}$ от точки $(a,0,0)$ до точки $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2}\ln 2\right)$.

3404. $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ от точки $(1,0,1)$ до точки, соответствующей параметру t.

3405°. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ от точки $(0,0,0)$ до точки $(3,3,2)$.

3406. $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$ от точки $(0,0,0)$ до точки $\left(2a, \frac{8a}{3}, 2a\right)$.

3407. $4ax = (y+z)^2$, $4x^2+3y^2 = 3z^2$ от начала координат до точки (x,y,z).

3408. $y = \sqrt{2ax-x^2}$, $z = a\ln\frac{2a}{2a-x}$ от начала координат до точки (x,y,z).

3409°. $y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ от начала координат до точки $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$.

11.3.4. Поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(y-y_0),$$

нормаль — уравнением

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

В задачах 3410–3419 для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

3410. $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $(2,1,4)$.

3411. $z = xy$ в точке $(1,1,1)$.

3412. $z = \frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ в точке $(a,a,-a)$.

3413. $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ в точке $(3,4,-7)$.

3414°. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

3415. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точке $(1,2,-1)$.

3417. $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ в точке $(1,1,1)$.

3418. $(z^2-x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $(1,1,2)$.

3419. $4 + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = x+y+z$ в точке $(2,3,6)$.

3420°. Показать, что уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в любой его точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b} + \frac{z_0z}{c} = 1$.

3421. К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

3422. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательную плоскость, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

3423. Показать, что поверхности $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ и $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ касаются друг друга (т. е. имеют общую касательную плоскость) в точке $(2, -3, 1)$.

3424. Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, пересекаются в одной точке.

3425°. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к шару $\boldsymbol{r}\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2 - u^2}\}$ в точке $\boldsymbol{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболическому параболоиду $\boldsymbol{r}\{a(u+v), b(u-v), uv\}$ в произвольной точке (x_0, y_0, z_0).

3427. Доказать, что поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ и $x^2 + y^2 + z^2 = by$ ортогональны друг к другу.

3428. Показать, что касательная плоскость к поверхности $xyz = a^3$ в любой ее точке образует с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найти этот объем.

3429°. Показать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ отсекают на координатных осях отрезки, сумма которых равна a.

3430. Для поверхности $z = xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

3431. Показать, что для поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = y$ длина отрезка нормали между поверхностью и плоскостью xOy равна расстоянию от начала координат до следа нормали на этой плоскости.

3432. Доказать, что нормаль к поверхности эллипсоида вращения $\frac{x^2+z^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ в любой его точке $P(x, y, z)$ образует равные углы с прямыми PA и PB, если $A(0, -4, 0)$ и $B(0, 4, 0)$.

3433. Доказать, что все нормали к поверхности вращения $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ пересекают ось вращения.

3434. К поверхности $x^2 - y^2 - 3z = 0$ провести касательную плоскость, проходящую через точку $A(0, 0, -1)$, параллельно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

3435°. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

3436. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ в произвольной точке. Выразить коэффициенты этого уравнения:

1) через значения параметров u_0 и v_0;
2) через координаты x_0, y_0, z_0 точки касания.

3437. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к параболоиду вращения $2pz = x^2 + y^2$.

3438. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$.

§ 11.4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ. ГРАДИЕНТ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

11.4.1. Градиент

Пусть $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция. Вектор $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ называется *градиентом* функции z.

3439.

1) $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Найти проекции градиента в точке $(1, 2)$.
2) $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$. Найти проекции градиента в произвольной точке.

3440.

1) $z = x^2 + y^2$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(3, 2)$.
2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $(2, 1)$.
3) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке (x_0, y_0)

3441.

1) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $(6, 4, \ln 100)$.

2)° Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке $(2, 2, 4)$.

3442. Каково направление наибольшего изменения функции $\varphi(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ в начале координат?

3443.

1) $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках $(1, 1)$ и $(3, 4)$.
2) Даны функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $(3, 4)$.

3444.

1) Найти точку, в которой градиент функции $z=\ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$ равен $\boldsymbol{i} - \frac{16}{9}\boldsymbol{j}$.
2) Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

3445. Доказать следующие соотношения (φ и ψ — дифференцируемые функции, c — постоянная):

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi; \qquad \operatorname{grad}(c + \varphi) + \operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(c\varphi) = c \operatorname{grad}\varphi; \qquad \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(\varphi'') = n\varphi^{n-1} \operatorname{grad}\varphi; \qquad \operatorname{grad}[\varphi(\psi)] = \varphi'(\psi) \operatorname{grad}\psi.$$

3446. $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $\varphi = \zeta(x, y)$. Показать, что

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

3447. 1) $u(x, y, z) = x^2y^2z$. Найти проекции $\operatorname{grad} u$ в точке (x_0, y_0, z_0).

2) $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти $\operatorname{grad} u$.

3448°. Показать, что функция $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ удовлетворяет соотношению $u = 2 \ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2$.

3449. Доказать, что если x, y, z суть функции от t, то $\frac{d}{dt} f(x, y, z) = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

3450. Использовать доказанное в предыдущей задаче соотношение для нахождения градиента функции:

1) $f = \boldsymbol{r}^2$;
2) $f = |\boldsymbol{r}|$;
3) $f = F(\boldsymbol{r}^2)$;
4) $f = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$;
5) $f = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$; где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

11.4.2. Производная по направлению

Производная функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\mathbf{l}$ задается формулой $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$, где α — угол между вектором $\mathbf{l}$ и положительным направлением оси Ox.

3451.

1) Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3, 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $(6, 5)$.
2) Найти производную функции $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке $(1, 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.
3) Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке $(2, 1)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат.
4) Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол α с осью абсцисс.

3452°. Найти производную функции $z = \ln(x + y)$ в точке $(1, 2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

3453. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, принадлежащей окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$, по направлению этой окружности.

3454. Доказать, что производная функции $z = \frac{y^2}{x}$ в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ по направлению нормали к эллипсу равна нулю.

3455.

1) Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1, 1, 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60°, 45°, 60°.
2) Найти производную функции $w = xyz$ в точке $A(5{,}1{,}2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9, 4, 14)$.

3456. Найти производную функции $u = x^2y^2z^2$ в точке $A(1, -1, 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(0, 1, 1)$.

3457°. Доказать, что производная функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в любой точке $M(x, y, z)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат, равна $-\frac{2u}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3458. Доказать, что производная функции $u = f(x, y, z)$ в направлении ее градиента равна модулю градиента.

3459. Найти производную функции $u = \frac{1}{r}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, в направлении ее градиента.

Глава 12

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КРАТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 12.1. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x, y)$ по ограниченной замкнутой области D называется предел интегральной суммы

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Если $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ в области D, $mS(D) \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant MS(D)$. Аналогично определяется тройной интеграл.

3460. Тонкая пластинка (ее толщиной пренебрегаем) лежит в плоскости xOy, занимая область D. Плотность пластинки является функцией точки: $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Найти массу пластинки.

3461. На пластинке задачи 3460 распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\tau = \tau(P) = \tau(x, y)$. составить выражение для полного заряда пластинки.

3462.° Пластинка задачи 3460 вращается вокруг оси Ox с угловой скоростью ω. Составить выражение для кинетической энергии пластинки.

3463. Удельная теплоемкость пластинки задачи 3460 меняется по закону $c = c(P) = c(x, y)$. Найти количество тепла, полученное пластинкой при ее нагревании от температуры t_1 до температуры t_2.

3464. Тело занимает пространственную область Ω; его плотность является функцией точки: $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Найти массу тела.

3465. В теле задачи 3460 неравномерно распределен электрический заряд; плотность заряда является функцией точки: $\delta = \delta(x, y, z)$. Найти полный заряд тела.

В задачах 3466–3476 оценить интегралы:

3466. $\iint_D (x + y + 10)\, d\sigma$, где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3467. $\iint_D (x^2 + y^2 + 9)\, d\sigma$, где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3468. $\iint_D (x+y+1)\, d\sigma$, где D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3469°. $\iint_D (x + xy - x^2 - y^2)\, d\sigma$, где D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3470. $\iint_D xy(x + y)\, d\sigma$, где D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3471. $\iint_D (x + 1)^y\, d\sigma$, где D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3472. $\iint_D (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2)\, d\sigma$, где D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3473. $\iint_D (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10)\, d\sigma$, где D — область, ограниченная эллипсом $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ (включая границу).

3474. $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\, dv$ где Ω — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

3475. $\iiint_\Omega (x + y + z)\, dv$, где Ω — куб $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

3476°. $\iiint_\Omega (x + y - z + 10)\, dv$, где Ω — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$.

§ 12.2. КРАТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

12.2.1. Двойной интеграл. Прямоугольная область

Если $D = [a, b] \times [c, d]$, $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$.

В задачах 3477–3484 вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданным условиями в скобках:

3477. $\iint_D xy\, dx\, dy$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3478. $\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3479. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3480°. $\iint_D \frac{dx\, dy}{(x+y+1)^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3481. $\iint_D \frac{y\, dx\, dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3482. $\iint_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2})$.

3483. $\iint_D x^2 y e^{xy}\,dx\,dy$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3484°. $\iint_D x^2 y\cos(xy^2)\,dx\,dy$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

12.2.2. Двойной интеграл. Произвольная область

Если область D задана условиями $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Если область D задана условиями $c \leqslant y \leqslant d$, $g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

В задачах 3485–3497 найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D.

3485. Параллелограмм со сторонами $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

3486. Треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

3487. $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3488. $x + y \leqslant 1$, $x - y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

3489. $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4 - x^2$.

3490°. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.

3491. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4$.

3492. D ограничена параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

3493. Треугольник со сторонами $y = x$, $y = 2x$ и $x + y = 6$.

3494. Параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

3495. $y - 2x \leqslant 0$, $2y - x \geqslant 0$, $xy \leqslant 2$.

3496. $y^2 \leqslant 8x$, $y \leqslant 2x$, $y + 4x - 24 \leqslant 0$.

3497°. D ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

В задачах 3498–3503 изменить порядок интегрирования.

3498. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

3499. $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3500°. $\int_{0}^{r} dx \int_{x}^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3501. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3502. $\int_{1}^{2} dx \int_{x}^{2x} f(x,y)\,dy.$

3503. $\int_{0}^{2} dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy.$

3504. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двукратного интеграла:

1) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy;$

2)° $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{3} dx \int_{0}^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy;$

3) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy.$

3505. Представить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy,$$

где D — области, указанные на рис. 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, в виде суммы двукратных интегралов (с наименьшим числом слагаемых). Фигуры, показанные на рис. 12.3 и 12.4, составлены из прямых линий и дуг окружностей.

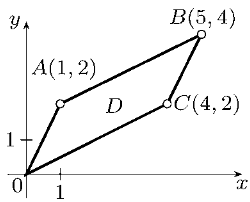

Рис. 12.1

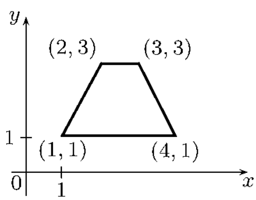

Рис. 12.2

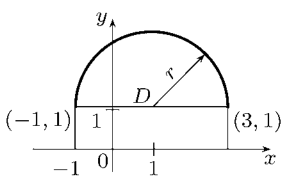

Рис. 12.3

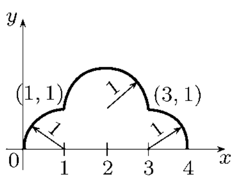

Рис. 12.4°

В задачах 3506–3512 вычислить данные интегралы.

3506.

1) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$;

2) $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x}\, dy$;

3) $\int_1^2 dy \int_0^{\ln x} e^x\, dx$.

3507. $\iint_D x^2y^2\, dx\, dy$, D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3508. $\iint_D (x^2+y)\, dx\, dy$, D — область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $y^2=x$.

3509°. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, D — область, ограниченная прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $xy=1$.

3510. $\iint_D \cos(x+y)\, dx\, dy$, D — область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=\pi$ и$y=x$.

3511. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, D — четверть круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, лежащая в первом квадранте.

3512. $\iint_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\, dx\, dy$, D — область, ограниченная линией $x^3+y^3=1$ и осями координат.

3513. Найти среднее значение функции $z=12-2x-3y$ в области, ограниченной прямыми $12-2x-3y=0$, $x=0$, $y=0$.

3514. Найти среднее значение функции $z=2x+y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y=3$.

3515. Найти среднее значение функции $z=x+6y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x$, $y=5x$ и $x=1$.

3516°. Найти среднее значение функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

12.2.3. Тройной интеграл

В задачах 3517–3524 вычислить интегралы.

3517. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$.

3518. $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)\, dz$.

3519. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\, dz$.

3520. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^3z\, dz$.

3521°. $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\, dz$.

3522. $\iiint_\Omega \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

3523. $\iiint_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$, Ω — область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

3524°. $\iiint_\Omega y\cos(z + x)\,dx\,dy\,dz$, Ω — область, ограниченная цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$ и $x+z = \frac{\pi}{2}$.

§ 12.3. ИНТЕГРАЛЫ В ПОЛЯРНЫХ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

12.3.1. Двойной интеграл

При переходе от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, φ

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

В задачах 3525–3531 перейти в двойном интеграле $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ к полярным координатам ρ и φ $(x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi)$, и расставить пределы интегрирования.

3525. D — круг:

1) $x^2 + y^2 \leqslant R^2$;

2) $x^2 + y^2 \leqslant ax$;

3) $x^2 + y^2 \leqslant by$.

3526. D — область, ограниченная окружностями $x^2+y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$ и $y = 2x$.

3527. D — область, являющаяся общей частью двух кругов $x^2 + y^2 \leqslant ax$ и $x^2 + y^2 \leqslant by$.

3528. D — область, ограниченная прямыми $y = x$, $y = 0$ и $x = 1$.

3529. D — меньший из двух сегментов, на которые прямая $x + y = 2$ рассекает круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3530°. D — внутренняя часть правой петли лемнискаты Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3531. D — область, определенная неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x^2 + y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$.

В задачах 3532–3535 двойные интегралы преобразовать к полярным координатам.

3532. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3533. $\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3534. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$

3535°. $\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy +$
$$+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

В задачах 3536–3540 с помощью перехода к полярным координатам вычислить двойные интегралы.

3536. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

3537. $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, где область D определяется неравенствами $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3538. $\iint_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$, где D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3539. $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$, где D — круг $x^2+y^2 \leqslant Rx$.

3540°. $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, где D — часть кольца $x^2+y^2 \geqslant 1$, $x^2+y^2 \leqslant 0$, $y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leqslant x\sqrt{3}$.

3541. Показать, исходя из геометрических соображений, что если декартовы координаты преобразовать по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ (a и b — постоянные), то элементом площади будет $d\sigma = ab\rho\,d\rho d\varphi$.

В задачах 3542–3544, используя результат предыдущей задачи и выбрав подходящим образом a и b, преобразовать двойные интегралы.

3542. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, где область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная линией $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$.

3544. $\iint_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right) dx\,dy$, где D — часть эллиптического кольца, ограниченная эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ и лежащая в первом квадранте.

3545°. Вычислить интеграл $\iint_D xy\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и лежащая в первом квадранте.

3546. Вычислить интеграл $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная линией $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ и лежащая в первом квадранте.

12.3.2. Тройной интеграл

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

В задачах 3547–3551 перейти в тройном интеграле $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим координатам ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$) или сферическим координатам ρ, θ, ϕ ($x = \rho\cos\phi\sin\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$) и расставить пределы интегрирования.

3547. Ω — область, находящаяся в первом октанте и ограниченная цилиндром $x^2+y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$.

3548. Ω — область, ограниченная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.

3549. Ω — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, лежащая в первом октанте.

3550°. Ω — часть шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, лежащая внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

3551. Ω — общая часть двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqslant R^2$.

В задачах 3552–3558 вычислить интегралы с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

3552. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$.

3553. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$.

3554. $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz$.

3555°. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

3556. $\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω определяется неравенствами $z \geqslant 0$, $r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

3557. $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, где Ω — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

3558. $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, где Ω — цилиндр $x^2+y^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 12.4. ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

12.4.1. Объем тела. I

Объем тела, ограниченного снизу областью $D \subset XOY$, сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку прямой цилиндрической поверхностью:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

В задачах 3559–3596 найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными).

3559. Плоскостями координат, плоскостями $x = 4$ и $y = 4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$.

3560°. Плоскостями координат, плоскостями $x = a$ и $y = b$ и эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

3561. Плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и координатными плоскостями (пирамида).

3562. Плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ и $x + y + z = 6$.

3563. Параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$.

3564. Параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ и $y = 6 - x$.

3565°. Цилиндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$ и $x + z = 6$.

3566. Координатными плоскостями, плоскостью $2x + 3y - 12 = 0$ и цилиндром $z = \frac{y^2}{2}$.

3567. Цилиндром $z = 9 - y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

3568. Цилиндром $z = 4 - x^2$, координатными плоскостями и плоскостью $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

3569. Цилиндром $2y^2 = x$, плоскостями $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ и $z = 0$.

3570°. Круглым цилиндром радиуса r, осью которого служит ось ординат, координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

3571. Эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, плоскостями $z = 12 - 3x - 4y$ и $z = 1$.

3572. Цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$ и $x^2 + z^2 = R^2$.

3573. Цилиндрами $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z = 0$.

3574. Цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ и плоскостью $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3575°. Гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$ и плоскостями $z = 0$, $x = 3$.

3576. Гиперболическим параболоидом $z = xy$, цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $x + y = 2$, $y = 0$ и $z = 0$.

3577. Параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$ и $z = 0$.

3578. Эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$ и $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3579. Параболоидом $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ и плоскостью $z = 0$.

3580°. Цилиндрами $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$.

3581. Цилиндрами $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ и плоскостями $z = 0$ и $y + z = 1$.

***3582.** Цилиндрами $z = \ln x$ и $z = \ln y$ и плоскостями $z = 0$ и $x + y = 2e$ $(x \geqslant 1)$.

3583. Цилиндрами $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$ и $z = \frac{(x+y)^2}{4}$ (параболический цилиндр, образующие которого параллельны прямой $x - y = 0$, $z = 0$) и плоскостью $z = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0)$.

3584. Конической поверхностью $z^2 = xy$ (рис. 12.5), цилиндром $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ и плоскостью $z = 0$.

3585°. Конической поверхностью $4y^2 = x(2 - z)$ (параболический конус, рис. 12.6) и плоскостями $z = 0$ и $x + z = 2$.

3586. Поверхностью $z = \cos x \cos y$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y = \frac{\pi}{2}$.

3587. Цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, плоскостями $z = 0$ и $z = x + y + 10$.

3588. Цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, плоскостями $2x - z = 0$ и $4x - z = 0$.

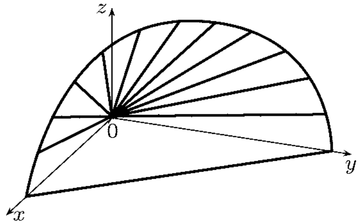

Рис. 12.5

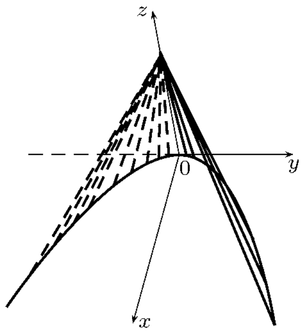

Рис. 12.6

3589. Цилиндром $x^2+y^2=R^2$, параболоидом $Rz=2R^2+x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

3590. Цилиндром $x^2+y^2=2ax$, параболоидом $z=\frac{x^2+y^2}{a}$ и плоскостью $z=0$.

3591°. Сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и цилиндром $x^2+y^2=ax$. (Задача Вивиани.)

3592. Гиперболическим параболоидом $z=\frac{xy}{a}$, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и плоскостью $z=0$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

3593. Цилиндрами $x^2+y^2=x$ и $x^2+y^2=2x$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостями $x+y=0$, $x-y=0$ и $z=0$.

3594. Цилиндрами $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$ и плоскостями $z=x+2y$ и $z=0$.

3595. Конической поверхностью $z^2=xy$ и цилиндром $(x^2+y^2)^2=2xy$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

3596°. Геликоидом («винтовая лестница») $z=h\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $x=0$ и $z=0$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

12.4.2. Площадь плоской фигуры

Площадь фигуры D:

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

В задачах 3597–3608 найти двойным интегрированием площади указанных областей.

3597. Области, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

3598. Области, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

3599. Области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3600°. Области, заключенной между параболой $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ и прямой $y = \frac{b}{a}x$.

3601. Области, ограниченной параболами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ и прямой $x = 4$.

***3602.** Области, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

3603. Области, ограниченной линией $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$.

3604°. Области, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли).

3605. Области, ограниченной линией $x^3 + y^3 = 2xy$, лежащей в первом квадранте (петля).

3606. Области, ограниченной линией $(x + y)^3 = xy$, лежащей в первом квадранте (петля).

3607. Области, ограниченной линией $(x + y)^5 = x^2y^2$, лежащей в первом квадранте (петля).

***3608.** Области, ограниченной линией

1) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{25}$.

12.4.3. Объем тела. II

Объем тела Ω:

$$S = \iiint\limits_{\Omega} dx\, dy\, dz.$$

В задачах 3609–3625 вычислить тройным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными).

3609. Цилиндрами $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ и плоскостями $x = -1$ и $x = 2$.

3610°. Параболоидами $z = x^2 + y^2$ и $z = x^2 + 2y^2$ и плоскостями $y = x$, $y = 2x$ и $x = 1$.

3611. Параболоидами $z = x^2 + y^2$ и $z = 2x^2 + 2y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостью $y = x$.

3612. Цилиндрами $z = \ln(x + 2)$ и $z = \ln(6 - x)$ и плоскостями $x = 0$, $x + y = 2$ и $x - y = 2$.

***3613.** Параболоидом $(x - 1)^2 + y^2 = z$ и плоскостью $2x + z = 2$.

***3614.** Параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = x + y$.

***3615°.** Сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$.

3616. Сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ и параболоидом $x^2+y^2=R(R-2z)$ $(z \geqslant 0)$.

3617. Параболоидом $z=x^2+y^2$ и конусом $z^2=xy$.

3618. Сферой $x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2$ и конусом $z^2=4(x^2+y^2)$ (имеется в виду часть шара, лежащая внутри конуса).

***3619.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

3620°. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$.

3622. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

3623. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(x^2+y^2)^2$.

3624°. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$.

3625. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

12.4.4. Площадь поверхности

Площадь гладкой поверхности $z=f(x,y)$, проекция которой на плоскость XOY — область D:

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dx\,dy.$$

3626. Вычислить площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте.

3627. Вычислить площадь той части поверхности $z^2=2xy$, которая находится над прямоугольником, лежащим в плоскости $z=0$ и ограниченным прямыми $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=6$.

3628. Найти площадь части конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащую над плоскостью Oxy и отсеченную плоскостью $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

В задачах 3629–3639 найти площади указанных частей данных поверхностей.

3629. Части $z^2=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $z^2=2py$.

3630°. Части $y^2+z^2=x^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

3631. Части $y^2+z^2=x^2$, вырезанной цилиндром $x^2-y^2=a^2$ и плоскостями $y=b$ и $y=-b$.

3632. Части $z^2=4x$, вырезанной цилиндром $y^2=4x$ и плоскостью $x=1$.

3633. Части $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = R^2$.

3634. Части $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.

3635°. Части $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \leqslant a)$.

3636. Части $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$.

3637. Части $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.

3638. Части $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ и лежащей в первом октанте.

3639. Части $(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2$, лежащей в первом октанте $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

***3640.** Вычислить площадь части земной поверхности (считая ее сферической при радиусе $R \approx 6400$ км), заключенной между меридианами $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$ и параллелями $\theta = 45°$ и $\theta = 60°$.

3641°. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

3642. Оси двух одинаковых цилиндров радиуса R пересекаются под прямым углом. Найти площадь части поверхности одного из цилиндров, лежащей в другом.

12.4.5. Моменты и центр масс

Статические моменты пластинки D с постоянной плотностью 1 относительно осей координат равны

$$M_x = \iint\limits_D y\,dx\,dy, \quad M_y = \iint\limits_D x\,dx\,dy.$$

Координаты центра масс (ξ, η)

$$\xi = \frac{M_y}{M}, \quad \eta = \frac{M_x}{M},$$

где M — масса пластинки (площадь). Моменты инерции относительно осей и начала координат:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy, \quad I_0 = I_x + I_y.$$

Статические моменты тела Ω с постоянной плотностью 1 относительно координатных плоскостей равны

$$M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$$

Координаты центра масс (ξ, η, ζ)

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M}, \ \eta = \frac{M_{xz}}{M}, \ \zeta = \frac{M_{xy}}{M},$$

где M — масса тела (объем). Моменты инерции относительно осей и начала координат:

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\,dx\,dy,\,dz$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\,dx\,dy,\,dz$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy,\,dz$$

$$I_0 = I_x + I_y + I_z.$$

В задачах 3643–3646 найти двойным интегрированием статические моменты однородных плоских фигур (плотность $\gamma = 1$).

3643. Прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a.

3644. Полукруга радиуса R относительно диаметра.

3645°. Круга радиуса R относительно касательной.

3646. Правильного шестиугольника со стороной a относительно стороны.

3647. Доказать, что статический момент треугольника с основанием a относительно этого основания зависит только от высоты треугольника.

В задачах 3648–3652 найти двойным интегрированием центры масс однородных плоских фигур.

3648. Фигуры, ограниченной верхней половиной эллипса, опирающейся на большую ось.

3649. Фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$, осью Ox и прямой $x = \frac{\pi}{4}$.

3650°. Кругового сектора, соответствующего центральному углу α (радиус круга R).

3651. Кругового сегмента, соответствующего центральному углу α (радиус круга R).

3652. Фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geqslant 0)$.

В задачах 3653–3659 найти моменты инерции однородных плоских фигур (плотность $\gamma = 1$).

3653. Круга радиуса R относительно касательной.

3654. Квадрата со стороной a относительно вершины.

3655°. Эллипса с полуосями a и b относительно центра.

3656. Прямоугольника со сторонами a и b относительно точки пересечения диагоналей.

3657. Равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h относительно вершины.

3658. Круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

3659°. Сегмента параболы с хордой, перпендикулярной к оси, относительно вершины параболы (длина хорды a, «стрелка» h).

3660. Доказать, что момент инерции кругового кольца относительно центра в два раза больше момента инерции относительно любой оси, проходящей через центр кольца и лежащей в его плоскости.

3661. Доказать, что сумма моментов инерции плоской фигуры F относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей, лежащих в одной плоскости с этой фигурой и проходящих через неподвижную точку O, есть величина постоянная.

***3662.** Доказать, что момент инерции плоской фигуры относительно какой-нибудь оси равен $Md^2 + I_c$, где M — масса, распределенная на фигуре, d — расстояние от оси до центра масс фигуры, а I_c — момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр фигуры (теорема Штейнера).

В задачах 3663–3665 найти статические моменты однородных тел (плотность $\gamma = 1$).

3663. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c относительно его граней.

3664. Прямого круглого конуса (радиус основания R, высота H) относительно плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию.

3665°. Тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостью xOy, относительно этой плоскости.

В задачах 3666–3672 найти центры масс однородных тел, ограниченных данными поверхностями.

3666. Плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ и $x + y + z = 8$ (усеченный параллелепипед).

3667. Эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и координатными плоскостями (имеется в виду тело, расположенное в первом октанте).

3668. Цилиндром $z = \frac{y^2}{2}$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $2x + 3y - 12 = 0$.

3669. Цилиндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$ и $x + z = 6$.

3670°. Параболоидом $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(a \geqslant 0)$.

3671. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (шаровой сектор).

3672. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

В задачах 3673–3674 найти центры масс однородных поверхностей.

3673. Части сферы, заключенной в первом октанте.

3674°. Части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, отсеченной плоскостью $z = 1$.

В задачах 3675–3680 найти моменты инерции однородных тел с массой, равной M.

3675. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c относительно каждого из ребер и относительно центра масс.

3676. Шара радиуса R относительно касательной прямой.

3677. Эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ относительно каждой из трех его осей.

3678. Прямого круглого цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно диаметра основания и относительно диаметра его среднего сечения.

3679°. Полого шара внешнего радиуса R, внутреннего r относительно диаметра.

3680. Параболоида вращения (радиус основания R, высота H) относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к оси вращения (экваториальный момент).

В задачах 3681–3683 вычислить моменты инерции указанных частей однородных поверхностей (масса каждой части равна M).

3681. Боковой поверхности цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной к оси цилиндра.

3682. Части параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, отсеченной плоскостью $z = c$, относительно оси Oz.

3683°. Боковой поверхности усеченного конуса (радиусы оснований R и r, высота H) относительно его оси.

12.4.6. Разные задачи

3684. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

3685. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны R и r $(R > r)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей, найти массу кольца. Плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

3686. На фигуре, ограниченной эллипсом с полуосями a и b, распределена масса так, что плотность ее пропорциональна расстоянию от большой оси, причем на единице расстояния от этой оси она равна γ. Найти всю массу.

3687. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями, радиусы которых равны R и r $(R > r)$. Зная, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра сфер и на расстоянии, равном единице, равна γ, найти всю массу тела.

3688°. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиуса R и высоты H, если его плотность в любой точке численно равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

* **3689.** Вычислить массу тела, ограниченного круглым конусом, высота которого равна h, а угол между осью и образующей равен α, если плотность пропорциональна n-й степени расстояния от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию, причем на единице расстояния она равна γ $(n > 0)$.

3690. Найти массу шара радиуса R, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ.

3691. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат.

* **3692.** Плотность шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ в любой его точке численно равна квадрату расстояния этой точки от начала координат. Найти координаты центра масс шара.

* **3693°.** Найти статический момент общей части шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ относительно плоскости Oxy. Плотность в любой точке тела численно равна расстоянию этой точки от плоскости xOy.

* **3694.** Доказать, что момент инерции тела относительно какой-либо оси равен $Md^2 + I_c$, где M — масса тела, d — расстояние от оси до центра масс тела, а I_c — момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела (теорема Штейнера; ср. с задачей 3662).

Основываясь на законе всемирного тяготения Ньютона (см. указание перед задачей 2670), решить задачи 3695–3698.

3695. Дан однородный шар радиуса R с плотностью γ. Вычислить силу, с которой он притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a $(a > R)$ от его центра. Убедиться, что сила взаимодействия такова, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре.

* **3696.** Доказать, что ньютонова сила взаимодействия между двумя однородными шарами такова, как если бы массы шаров были сосредоточены в их центрах.

3697°. Дан неоднородный сплошной шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ с плотностью, меняющейся по закону $\gamma = \lambda z^2$. Вычислить силу, с которой он притягивает материальную точку с массой m, если она находится на оси z и на расстоянии $2R$ от центра шара.

3698. Дано однородное тело, ограниченное двумя концентрическими сферами (шаровой слой). Доказать, что сила притяжения этим слоем точки, находящейся во внутренней полости тела, равна нулю.

Центром давления называется точка приложения равнодействующей всех сил давления на данную плоскую фигуру (все силы давления перпендикулярны к плоскости фигуры). При определении координат центра давления исходят из того, что статический момент результирующей силы (т. е. давления на всю площадку) относительно любой оси равен сумме статических моментов отдельных сил относительно той же оси. Опираясь на это, решить задачи 3699–3701.

3699. Найти центр давления прямоугольника со сторонами a и b ($a > b$), у которого бóльшая сторона расположена вдоль свободной поверхности жидкости, а плоскость прямоугольника перпендикулярна к этой поверхности. Показать, что положение центра давления относительно прямоугольника не изменится, если плоскость прямоугольника будет наклонена к поверхности жидкости под углом α ($\alpha \neq 0$). Как изменятся предыдущие результаты, если бóльшая сторона a расположена не на поверхности жидкости, а на глубине h (оставаясь параллельной поверхности)?

3700. Треугольник с высотой h расположен в плоскости, наклоненной под углом α к свободной поверхности жидкости. На какой глубине лежит центр давления этого треугольника, если:

1)° Основание треугольника лежит на поверхности жидкости?
2) Вершина лежит на поверхности, а основание параллельно ей?

3701. Найти центр давления фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a иb ($a > b$), при условии, что бóльшая из осей перпендикулярна к поверхности жидкости и верхний конец этой оси находится на расстоянии h от поверхности.

* **3702.** Доказать, что давление жидкости на плоскую площадку, произвольным образом погруженную в жидкость, равно весу цилиндрического столба этой жидкости, находящегося над площадкой, при условии, что она лежит горизонтально на глубине своего центра масс.

§ 12.5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

12.5.1. Несобственные двойные и тройные интегралы

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в неограниченной области D, будем считать

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{d \to D} \iint\limits_d f(x,y)\,dx\,dy,$$

где d — ограниченная область, $d \subset D$ и d стремится к D произвольным образом. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной области D всюду, кроме точки $P(a, b)$, будем считать

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy,$$

где D_ε — область, полученная из D удалением области диаметра ε, содержащей точку P. Аналогично определяются несобственные тройные интегралы.

В задачах 3703–3711 вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3703. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$.

3704. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3705°. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$.

3706. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

3707. $\int_0^{+\infty}(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

3708. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

***3709.** $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$.

***3710.** $\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$.

***3711.** $\int_0^{+\infty}\int_{2x}^{+\infty} xe^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\,dy$.

В задачах 3712–3715 выяснить, какие из несобственных интегралов, взятых по кругу радиуса R с центром в начале координат, являются сходящимися.

3712. $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3713. $\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3714. $\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$.

3715°**.** $\iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3716. Можно ли так выбрать число m, чтобы несобственный интеграл $\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$, распространенный на всю плоскость, был сходящимся?

В задачах 3717–3719 вычислить несобственные интегралы.

3717. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^2}}$.

3718. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{xy\,dx\,,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

3719. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$.

В задачах 3720–3722 выяснить, сходятся ли несобственные интегралы, взятые по шару Ω радиуса R с центром в начале координат.

3720°**.** $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

3721. $\iiint_\Omega \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$.

3722. $\iiint_\Omega \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz$.

3723. Вычислить интеграл $\iiint_\Omega \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω — шар радиуса R с центром в начале координат.

***3724.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ и плоскостью $z=0$.

3725°**.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $z=x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ и плоскостью $z=0$.

3726. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$ и частью поверхности $z = xe^{-(x^2+y^2)}$, лежащей над этой плоскостью.

3727. Дано однородное тело, ограниченное прямым круглым цилиндром (радиус основания R, высота H, плотность γ). Найти силу, действующую на точку с массой m, находящуюся в центре основания цилиндра.

3728°. Дано однородное тело, ограниченное прямым круглым конусом (радиус основания R, высота H, плотность γ). Вычислить силу, с которой тело притягивает точку массы m, помещенную в вершине конуса.

3729. Дан неоднородный сплошной шар радиуса R, плотность которого γ связана с расстоянием от центра r соотношением $\gamma = a - br$ $(a > 0,\ b > 0)$.

1) Найти константы a и b, если известно, что средняя плотность шара равна γ_c, а плотность на поверхности шара равна γ_0.
2) Вычислить силу притяжения шаром точечной массы m, расположенной на поверхности шара.

12.5.2. Интегралы, зависящие от параметра. Правило Лейбница

Правило Лейбница. При некоторых ограничениях, накладываемых на функции $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

3730. Найти область определения функции $f(x)=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

3731. Найти кривизну линии $y = \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$ в точке с абсциссой $x = 1$.

3732. Используя равенство $\int_0^b\frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\ln(1+ab)$, получить путем дифференцирования по параметру следующую формулу:

$$\int_0^b\frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2}\ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

3733°. Исходя из равенства $\int_0^b\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, вычислить интеграл $\int_0^b\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

3734. Исходя из равенства $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$, вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n — целое положительное число).

3735. Вычислить значение интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-ax}x^{n-1}\,dx$ (n — целое положительное число) при $a > 0$, найдя предварительно $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$.

***3736.** Исходя из равенства (см. задачу 2318)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}, \quad \text{найти} \quad \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}.$$

В задачах 3737–3749 вычислить интегралы с помощью дифференцирования по параметру.

3737. $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx$ $(a > -1)$.

3738°. $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx$ $(a > -1)$.

3739. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3740. $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,,dx$ $(a^2 < 1)$.

3741. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx$.

3742. $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $(a^2 < 1)$.

3743°. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$ $(a^2 < 1)$.

3744. $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x}$ $(a^2 < 1)$.

3745. $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{ax^2}}{x^2}\,dx$ $(a > 0)$, зная, что $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$ (см. задачу 2439).

***3746.** $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$ $(a > 0,\ b > 0)$.

***3747.** $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}\,dx$ $(a > 0)$.

3748°. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\cos bx - \cos cx}{x}\,dx$ $(a > 0)$.

***3749.** $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)\,dx$.

3750. Вычислив интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$, найти $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

3751. Используя равенство $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$.

3752. Используя равенство $2a\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (см. задачу 2439), вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

3753. Из соотношения $\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона) вывести равенство $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 x}\,dz$ ($x > 0$ и использовать его для вычисления интегралов (интегралы дифракции или Френеля):

1)° $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$;

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$.

12.5.3. Разные задачи

3754. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и при $x \to +\infty$ $f(x)$ стремится к конечному пределу $f(+\infty)$. Доказать при этих условиях, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{a}{b}$.

В задачах 3755–3756 вычислить интегралы, пользуясь результатом задачи 3754.

3755. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$.

3756°. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\,dx$ ($n > 0$).

***3757.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится при любом $A > 0$. Доказать при этих условиях, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$. (Ср. с задачей 3754.)

В задачах 3758–3762 вычислить интегралы, пользуясь результатом задачи 3757 ($a > 0$, $b > 0$).

3758. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,dx$.

3761°. $\int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2}\,dx$.

***3762.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx$.

***3763.** Функция Лапласа $\Phi(x)$ определяется так: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ (эта функция играет большую роль в теории вероятностей). Доказать соотношения:

1) $\int_0^x \Phi(az)\,dz = \frac{e^{-a^2x^2} - 1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax)$;

2) $\int_0^{+\infty} [1 - \Phi(x)]\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

*$\mathbf{3764.}$ Функции $\mathrm{si}(x)$ и $\mathrm{ci}(x)$ обычно определяются так: $\mathrm{si}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ («интегральный синус») и $\mathrm{ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ («интегральный косинус»). Доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{si}(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{ci}(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

*$\mathbf{3765.}$ Функция $J_0(x)$, определяемая равенством

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Доказать, что:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} J_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ $(a > 0)$;

2)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(x)\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } a \geqslant 1;\\ \arcsin a, & \text{если } |a| \leqslant 1;\\ -\pi/2, & \text{если } a \leqslant -1.\end{cases}$$

3766. Доказать, что функция $y = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\,dz$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + y = \frac{1}{x}$.

*$\mathbf{3767}^{\circ}$**.** Доказать, что функция $y = \int_{-1}^{1} (z^2-1)^{n-1} e^{xz}\,dz$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy'' + 2ny' - xy = 0$.

*$\mathbf{3768.}$ Доказать, что функция $y = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}}\,dz$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy'' - 2ny' + xy = 1$.

*$\mathbf{3769.}$ Доказать, что функция Бесселя нулевого порядка $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $J_0''(x) + \frac{J_0'(x)}{x} + J_0(x) = 0$.

Глава 13

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 13.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ДЛИНЕ

13.1.1. Вычисление интегралов

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ — уравнение гладкой кривой L. Точки $M_i(x_i, y_i)$ разбивают кривую на элементарные дуги Δs_i. Предел интегральной суммы

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta s_i = \int_L f(x, y)\, ds$$

называется *криволинейным интегралом по длине* L и вычисляется по формуле

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, dx.$$

Если кривая задана параметрически $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

В задачах 3770–3775 вычислить криволинейные интегралы.

3770. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, где L — отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

3771. $\int\limits_L xy\, dx$, где L — контур прямоугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ и $D(0, 2)$.

3772.° $\int\limits_L y\, ds$, где L — дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная параболой $x^2 = 2py$.

3773. $\int\limits_L (x^2 + y^2)^n \, ds$, где L — окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

3774. $\int\limits_L xy \, ds$, где L — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

3775. $\int\limits_L \sqrt{2y} \, ds$, где L — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

3776. Вывести формулу для вычисления интеграла $\int_L F(x, y) \, ds$ в полярных координатах, если линия L задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

***3777.** Вычислить $\int_L (x - y) \, ds$, где L — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

3778.° Вычислить $\int_L x\sqrt{x^2 - y^2} \, ds$, где L — линия, заданная уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \geqslant 0)$ (половина лемнискаты).

3779. Вычислить $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \, ds$, где L — часть спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в начале координат (в полюсе).

3780. Вычислить интеграл $\int_L \frac{z^2 \, ds}{x^2+y^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$.

3781. Вычислить $\int_L xyz \, ds$, где L — четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, лежащая в первом октанте.

3782.° Вычислить $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, ds$, где L — первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

3783. Вычислить $\int_L (x + y) \, ds$, где L — четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$, лежащая в первом октанте.

13.1.2. Применения интегралов

3784. Найти массу участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами x_1 и x_2, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

3785. Найти массу участка цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = a$, если плотность линии в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки, причем плотность в точке $(0, a$ равна δ.

3786.° Найти массу четверти эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в первом квадранте, если плотность в каждой точке равна ординате этой точки.

3787. Найти массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, плотность которой в каждой точке равна квадрату полярного радиуса этой точки.

3788. Найти массу дуги линии $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ от точки, соответствующей $t = 0$, до произвольной точки, если плотность дуги обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1, 0, 1)$ равна единице.

3789. Найти координаты центра масс первого полувитка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, считая плотность постоянной.

3790. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ относительно плоскости xOy, считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости: $\rho = kz^2$.

3791°. Вычислить моменты инерции первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \frac{h}{2\pi}t$ относительно координатных осей.

В задачах 3792–3797 вычислить площади частей цилиндрических поверхностей, заключенных между плоскостью xOy и указанными поверхностями.

3792. $x^2 + y^2 = R^2$, $z = R + \frac{x^2}{R}$.

3793. $y^2 = 2px$, $z = \sqrt{2px - 4x^2}$.

3794. $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$; $z = 2 - \sqrt{x}$.

3795°. $x^2 + y^2 = R^2$, $2Rz = xy$.

3796. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = kx$ и $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ («цилиндрическая подкова»).

3797. $y = \sqrt{2px}$, $z = y$ и $x = \frac{8}{9}p$.

3798. Вычислить площадь поверхности, которую вырезает из круглого цилиндра радиуса R такой же цилиндр, если оси этих цилиндров пересекаются под прямым углом (ср. с решением задачи 3642).

3799. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, заключенной внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Согласно закону Био–Савара элемент тока действует на магнитную массу m с силой, равной по величине $\frac{mI\sin\alpha\, ds}{r^2}$, где I — ток, ds — элемент длины проводника, r — расстояние от элемента тока до магнитной массы, α — угол между направлением прямой, соединяющей магнитную массу и элемент тока, и направлением самого элемента тока. Эта сила направлена по нормали к плоскости, содержащей элемент тока и точку, в которую помещена магнитная масса; направление силы устанавливается правилом «буравчика». Опираясь на этот закон, решить задачи 3800–3805.

3800°. Найти силу, с которой ток I в бесконечном прямолинейном проводнике действует на точечную магнитную массу m, находящуюся на расстоянии a от проводника.

3801. По контуру, имеющему форму квадрата со стороной a, течет ток I. С какой силой этот ток действует на точечную магнитную массу m, находящуюся в центре квадрата?

3802. Показать, что ток I, текущий по дуге линии, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, действует на точечную магнитную массу, находящуюся в полюсе, с силой $f = mI \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\rho}$.

3803. С какой силой ток I, текущий по замкнутому эллиптическому контуру, действует на точечную магнитную массу m, находящуюся в фокусе эллипса?

3804. С какой силой ток I, текущий по бесконечному параболическому контуру, действует на точечную магнитную массу m, помещенную в фокусе параболы? Расстояние от вершины до фокуса равно $\frac{p}{2}$.

3805°. С какой силой ток I, текущий по круговому контуру радиуса R, действует на точечную магнитную массу m, помещенную в точку P, лежащую на перпендикуляре, восставленном в центре круга, на расстоянии h от плоскости круга? При каком значении R эта сила будет наибольшей при заданном h?

§ 13.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КООРДИНАТАМ

13.2.1. Вычисление интегралов

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ — уравнение гладкой кривой L. *Криволинейный интеграл по L по координатам*

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))\,dx.$$

Если кривая задана параметрически $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \\ = \int\limits_a^b (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\,dt.$$

В задачах 3806–3821 вычислить криволинейные интегралы.

3806. $\int_L x\,dy$, где L — контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, в положительном направлении (т. е. против движения часовой стрелки).

3807. $\int_L x\,dy$, где L — отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ от точки пересечения ее с осью абсцисс до точки пересечения ее с осью ординат.

3808. $\int_L (x^2 - y^2)\,dx$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

3809. $\int_L (x^2 + y^2)\,dy$, где L — контур четырехугольника с вершинами (указанными в порядке обхода) в точках $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,4)$ и $D(0,4)$.

3810°. $\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$ вдоль отрезка, соединяющего точки $(0,0)$ и $(\pi,2\pi)$.

3811. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx + (y-x)\,dy$ вдоль линии

1) $y = x$,	3) $y^2 = x$,
2) $y = x^2$,	4) $y = x^3$.

3812. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ вдоль линии

1) $y = x$,	3) $y = x^3$,
2) $y = x^2$,	4) $y^2 = x$.

3813. $\int_L y\,dx + x\,dy$, где L — четверть окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

3814. $\int_L y\,dx - x\,dy$, где L — эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемый в положительном направлении.

3815°. $\int_L \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}$, где L — полуокружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

3816. $\int_L (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$, где L — первая (от начала координат) арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

3817. $\int_L \frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, где L — четверть астроиды $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$ от точки $(R,0)$ до точки $(0,R)$.

3818. $\int_L x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, где L — отрезок прямой от точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$.

3819. $\int_L yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$, где L — дуга винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ от точки пересечения линии с плоскостью $z=0$ до точки ее пересечения с плоскостью $z=a$.

3820. $\int_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ вдоль прямой линии.

3821°. $\int_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, где L — линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндра $x^2+y^2=Rx$ ($R>0$, $z\geqslant 0$), обходимая при интегрировании против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

13.2.2. Формула Грина

Если L – граница области D и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

В задачах 3822–3823 криволинейные интегралы по замкнутым контурам L, взятые в положительном направлении, преобразовать в двойные интегралы по областям, ограниченным этими контурами.

3822. $\int\limits_L (1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy$.

3823. $\int\limits_L (e^{xy}+2x\cos y)\,dx+(e^{xy}-x^2\sin y)\,dy$.

3824. Вычислить двумя способами интеграл задачи 3822, если контуром интегрирования L служит окружность $x^2+y^2=R^2$:

1) непосредственно;
2) с помощью формулы Грина.

3825. Вычислить $\int\limits_L (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$, где L:

1)° эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) окружность $x^2 + y^2 = ax$.

Интегрирование ведется в положительном направлении. (Вычисление провести двумя способами: 1) непосредственно, 2) с помощью формулы Грина.)

3826. Доказать, что интеграл

$$\int\limits_L (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy$$

равен нулю, если L — замкнутая линия, симметричная относительно начала координат.

3827. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$$

и

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, а AnB — дуга параболы $y = x^2$.

3828. Показать, что интеграл $\int_L \{x\cos(N,x) + y\sin(N,x)\}ds$, где (N,x) — угол между внешней нормалью к линии и положительным направлением оси абсцисс, взятый по замкнутому контуру L в положительном направлении, равен удвоенной площади фигуры, ограниченной контуром L.

3829°. Доказать, что величина интеграла

$$\int\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2\,dy,$$

где L — замкнутый контур, равна площади области, ограниченной этим контуром.

3830. Доказать, что интеграл $\int_L \varphi(y)\,dx + [x\varphi'(y) + x^3]\,dy$ равен утроенному моменту инерции однородной плоской фигуры, ограниченной контуром L, относительно оси ординат.

13.2.3. Независимость интеграла от контура интегрирования. Отыскание первообразной

Если подынтегральное выражение — полный дифференциал, то есть $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, то криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1),$$

интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю. Если кривая L лежит в односвязной области D и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y$ имеют непрерывные частные производные, то необходимым и достаточным для существования функции U является условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

В задачах 3831–3835 проверить, что интегралы, взятые по замкнутым контурам, равны нулю независимо от вида функций, входящих в подынтегральное выражение.

3831. $\int_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$.
3832. $\int_L f(xy)(y\,dx + x\,dy)$.
3833. $\int_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$.
3834. $\int_L [f(x+y) + f(x-y)]\,dx + [f(x+y) - f(x-y)]\,dy$.
3835. $\int_L f(x^2+y^2+z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$.

***3836.** Доказать, что интеграл $\int_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, взятый в положительном направлении по любому замкнутому контуру, заключающему внутри себя начало координат, равен 2π.

3837. Вычислить $\int_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+4y^2}$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$ в положительном направлении.

В задачах 3838–3844 вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов.

3838. $\int_{(2,3)}^{(-1,2)} y\,dx + x\,dy$.

3839. $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$.

3840°. $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ (начало координат не лежит на контуре интегрирования).

3841. $\int_{P_1}^{P_2} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где точки P_1 и P_2 расположены на концентрических окружностях с центрами в начале координат и радиусами, равными соответственно R_1 и R_2 (начало координат не лежит на контуре интегрирования).

3842. $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz$.

3843. $\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx - zx\,dy + xy\,dz$.

3844. $\int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}$ (контур интегрирования не пересекает поверхности $z = \frac{x}{y}$).

В задачах 3845–3852 найти функции по данным полным дифференциалам.

3845. $du = x^2\,dx + y^2\,dy$.

3846°. $du = 4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy)$.

3847. $du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

3848. $du = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$.

3849. $du = \left[\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right]dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2} - y^2\right]dy$.

3850°. $du = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$.

3851. $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy$.

3852. $du = \frac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}$.

3853. Подобрать число n так, чтобы выражение $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$ было полным дифференциалом; найти соответствующую функцию.

3854. Подобрать постоянные a и b так, чтобы выражение $\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx - (x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ было полным дифференциалом; найти соответствующую функцию.

В задачах 3855–3860 найти функции по данным полным дифференциалам:

3855. $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.

3856. $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3857°. $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$.

3858. $du = \dfrac{2(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x - yz)^2}$.

3859. $du = \dfrac{dx - 3dy}{z} + \dfrac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz$.

3860. $du = e^{\frac{y}{z}}\,dx + \left(\dfrac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy +$
$$+\left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$$

13.2.4. Применения интегралов

Площадь, ограниченная замкнутой кривой L:

$$S = \frac{1}{2}\int_L (x\,dy - y\,dx).$$

В задачах 3861–3868 вычислить при помощи криволинейного интеграла площади фигур, ограниченных замкнутыми линиями.

3861. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

3862°. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

3863. Кардиоидой $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

* **3864.** Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

3865. Петлей линии $(x + y)^3 = xy$.

3866. Петлей линии $(x + y)^4 = x^2 y$.

* **3867.** Лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

* **3868°.** Петлей линии $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

13.2.5. Работа

Работа силы $\boldsymbol{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ вдоль кривой L: $A = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$.

3869. В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила, имеющая постоянную величину $\boldsymbol{F}$ и направление положительной ос и абсцисс. Найти работу, совершаемую этой силой, при движении точки по дуге окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первом квадранте.

3870. В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила $\boldsymbol{F}$, проекции которой на оси координат равны $X = xy$, $Y = x + y$. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении точки из начала координат в точку $(1, 1)$:

1) по прямой $y = x$;
2) по параболе $y = x^2$;
3) по двузвенной ломаной, стороны которой параллельны осям координат (два случая).

3871. В каждой точке M эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ приложена сила $\boldsymbol{F}$, равная по величине расстоянию от точки M до центра эллипса и направленная к центру эллипса.

1) Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении точки вдоль дуги эллипса, лежащей в первом квадранте.
2) Найти работу, если точка обходит весь эллипс.

3872. Проекции силы на оси координат задаются формулами $X = 2xy$ и $Y = x^2$. Показать, что работа силы при перемещении точки зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить величину работы при перемещении из точки $(1, 0)$ в точку $(0, 3)$.

3873°. Сила по величине обратно пропорциональна расстоянию точки ее приложения от плоскости xOy и направлена к началу координат. Вычислить работу при движении точки под действием этой силы по прямой $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ от точки $M(a, b, c)$ до точки $N(2a, 2b, 2c)$.

3874. Сила по величине обратно пропорциональна расстоянию точки ее приложения от оси Oz, перпендикулярна к этой оси и направлена к ней. Найти работу силы при движении точки под действием этой силы по окружности $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ от точки $M(1, 1, 0)$ до точки $N(0, 1, 1)$.

3875. Доказать, что работа силы тяготения двух точечных масс, совершаемая при перемещении одной из них, не зависит от формы пути. Величина силы тяготения F определяется законом Ньютона: $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$, где r — расстояние между точками, m_1 и m_2 — массы, сосредоточенные в этих точках, k — гравитационная постоянная.

§ 13.3. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

13.3.1. Интегралы по площади поверхности

Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, $z = \varphi(x, y)$ — уравнение гладкой поверхности S. Предел интегральной суммы

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y)\, dq$$

называется *поверхностным интегралом по площади* S и вычисляется по формуле

$$\iint_S f(x,y,z)dq = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+{\varphi'_x}^2(x,y)+{\varphi'_y}^2(x,y)}\,dxdy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XOY.

В задачах 3876—3884 вычислить интегралы.

3876. $\iint\limits_S (z + 2x + \frac{4}{3}y)\, dq$, где S — часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

3877. $\iint_S xyz\, dq$, где S — часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

3878°. $\iint_S x\, dq$, где S — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащая в первом октанте.

3879. $\iint_S y\, dq$, где S — полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3880. $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dq$, где S — полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3881. $\iint_S x^2y^2\, dq$, где S — полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3882. $\iint_S \frac{dq}{r^2}$, где S — цилиндр $x^2+y^2=R^2$, ограниченный плоскостями $z=0$ и $z=H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

3883. $\iint_S \frac{dq}{r^n}$, где S — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$, а r — расстояние от точки сферы до фиксированной точки $P(0,0,c)$ $(c>R)$.

3884°. $\iint_S \frac{dq}{r}$, где S — часть поверхности гиперболического параболоида $z=xy$, отсеченная цилиндром $x^2+y^2=R^2$, а r — расстояние от точки поверхности до оси Oz.

* **3885.** Найти массу сферы, если поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию этой точки от некоторого фиксированного диаметра сферы.

3886. Найти массу сферы, если поверхностная плоскость в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки от некоторого фиксированного диаметра сферы.

13.3.2. Поверхностные интегралы по координатам

Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ — непрерывные функции, S^+ — сторона гладкой поверхности S, соответствующая направлению нормального вектора $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Тогда *поверхностный интеграл по S по координатам* задается выражением

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dq.$$

Если поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, направляющие косинусы нормали находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\ \cos\beta=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\ \cos\gamma=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где $D=\pm\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}$, знак выбирается в зависимости от стороны S.

Если поверхность S задана явно: $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, то

$$\iint\limits_S R\,dx\,dy=\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy.$$

В задачах 3887–3893 вычислить поверхностные интегралы.

3887. $\iint_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, где S — положительная сторона куба, составленного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

3888. $\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy$, где S — положительная сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3889°. $\iint_S z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3890. $\iint_S z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3891. $\iint_S xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$.

3892. $\iint_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $z=H$.

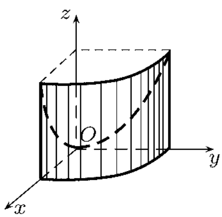

Рис. 13.1

3893. $\iint_S y^2z\,dx\,dy+zx\,dy\,dz+ x^2y\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z=x^2+y^2$, цилиндра $x^2+y^2=1$ и координатных плоскостей (рис. 13.1).

13.3.3. Формула Стокса

Если L — граница двусторонней поверхности S и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные, то

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\iint_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dq.$$

3894. Интеграл $\int_L(y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, «натянутой» на этот контур.

3895°. Вычислить интеграл $\int_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, где контур L — окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$:

1) непосредственно и

2) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Интегрирование по окружности в плоскости xOy ведется в положительном направлении.

13.3.4. Формула Остроградского

Если S — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем Ω и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные, то

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dq=\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

3896. Поверхностный интеграл по замкнутой поверхности преобразовать с помощью формулы Остроградского в тройной интеграл по объему тела, ограниченного этой поверхностью: $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$. Интегрирование ведется по внешней стороне поверхности S.

3897. Поверхностный интеграл по замкнутой поверхности преобразовать с помощью формулы Остроградского в тройной по объему тела, ограниченного этой поверхностью:

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\{\cos(N,x)+\cos(N,y)+\cos(N,z)\}\,d\sigma,$$

где N — внешняя нормаль к поверхности S.

3898. Вычислить интеграл задачи 3897, если S — сфера радиуса R с центром в начале координат.

3899°. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S \left[x^3\cos(N,x)+y^3\cos(N,y)+z^3\cos(N,z)\right]\,d\sigma,$$

где S — сфера радиуса R с центром в начале координат, а N — внешняя нормаль.

3900. Вычислить интегралы в задачах 3891–3893, применяя формулу Остроградского.

Глава 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 14.1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

14.1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение, приводящееся к виду $f(x)\,dx = g(y)\,dy$ называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Его общий интеграл получается интегрированием обеих частей уравнения: $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$

В задачах 3901–3910 найти общие решения дифференциальных уравнений.

3901. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0.$

3902. $xyy' = 1 - x^2.$

3903. $yy' = \frac{1-2x}{y}.$

3904. $y' \operatorname{tg} x - y = a.$

3905°. $xy' + y = y^2.$

3906. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

3907. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$

3908. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$

3909°. $y' = 10^{x+y}.$

3910. $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}.$

3911. Зависимость между скоростью v снаряда и пройденным путем l в канале орудия устанавливается в баллистике следующим уравнением: $v = \frac{al^n}{b+l^n}$, где $v = \frac{dl}{dt}$ и $n < 1$. Найти зависимость между временем t движения снаряда и пройденным расстоянием l по каналу.

3912. Если x — количество иодистоводородной кислоты HJ, разложившееся к моменту времени t, то скорость разложения $\frac{dx}{dt}$ определяется дифференциальным уравнением

$\frac{dx}{dt} = k_1\left(\frac{1-x}{v}\right)^2 - k_2\left(\frac{x}{v}\right)^2$, где k_1, k_2 и v — постоянные. Проинтегрировать это уравнение.

В задачах 3913–3916 найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям.

3913. $y' \sin x = y \ln y$; $y\Big|_{x=\pi/2} = e$.

3914. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$; $y\Big|_{x=0} = 1$.

3915°. $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx$; $y\Big|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

3916. $y - xy' = b(1 + x^2 y')$; $y\Big|_{x=1} = 1$.

3917. Найти линию, проходящую через точку $(2, 3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

3918. Найти линию, проходящую через точку $(2, 0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

3919. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

3920. Найти все линии, у которых подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания (коэффициент пропорциональности равен k).

3921. Найти линию, проходящую через точку $(a, 1)$ и имеющую подкасательную постоянной длины a.

3922. Найти линию, у которой длина нормали (отрезок ее точки линии до оси абсцисс) есть постоянная величина a.

3923. Найти линию, у которой сумма длин касательной и подкасательной в любой ее точке пропорциональна произведению координат точки касания (коэффициент пропорциональности равен k).

3924. Найти линию $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$), ограничивающую криволинейную трапецию с основанием $[0, x]$, площадь которой пропорциональна $(n + 1)$-й степени $f(x)$. Известно, что $f(1) = 1$.

3925. Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила — $4 \cdot 10^{-5}$ H. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

3926°. Материальная точка движется прямолинейно, причем так, что ее кинетическая энергия в момент t прямо пропорциональна средней скорости движения в интервале времени от нуля до t. Известно, что при $t = 0$ путь $s = 0$. Показать, что движение равномерно.

3927. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v = 10$ км/час. На полном ходу ее мотор был выключен, и через $t = 20$ с скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 6$ км/час. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 мин после остановки мотора; найти также расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

3928. В дне цилиндрического сосуда с поперечным сечением S и вертикальной осью имеется малое круглое отверстие площадью q, закрытое диафрагмой (как у объектива фотоаппарата). В сосуд налита жидкость до высоты h. В момент $t = 0$ диафрагма начинает открываться, причем площадь отверстия пропорциональна времени и полностью отверстие открывается за T с. Какова будет высота H жидкости в сосуде через T с после начала опыта? (См. задачи 2701–2706).

3929. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и среды. В задачах 2710–2711 мы считали коэффициент пропорциональности постоянным. При некоторых расчетах считают, что он линейно зависит от времени: $k = k_0(1 + \alpha t)$. Найти при этом предположении зависимость между температурой тела θ и временем t, полагая, что $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, а температура окружающей среды θ_1.

***3930.** Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего, как известно, форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найти зависимость между площадью S листа и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 6 часов вечера того же дня 2500 см^2. (Полагать, что наблюдение проводилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера и 0° в полдень.)

В задачах 3931–3933 при помощи замены искомой функции привести данные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными и решить их.

3931°. $y' = \cos(x-y)$ (положить $u = x - y$).

3932. $y' = 3x - 2y + 5$.

3933. $y'\sqrt{1+x+y} = x + y - 1$.

14.1.2. Однородные уравнения

Уравнение, приводящееся к виду $y' = f(\frac{y}{x})$ называется *однородным уравнением*. Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = tx$, $y' = t'x + t$.

В задачах 3934–3944 найти общие решения уравнений.

3934. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

3935. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3936. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

3937. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

3938. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

3939. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.

3940. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

3941. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

3942°. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

3943. $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$.

3944. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi(\frac{y}{x})}{\varphi'(\frac{y}{x})}$.

В задачах 3945–3948 найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям.

3945. $(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$; $y\Big|_{x=1} = 0$.

3946. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; $y\Big|_{x=0} = 1$.

3947°. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$; $y\Big|_{x=1} = -1$.

3948. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0;\ y\Big|_{x=0} = \sqrt{5}$.

3949. Привести уравнение $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ к квадратуре. Какова должна быть функция $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, чтобы общим решением данного уравнения было $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$?

3950°. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

3951. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной равна соответствующей поднормали.

3952. Найти линию, у которой длина полярного радиуса любой ее точки M равняется расстоянию между точкой пересечения касательной в точке M с осью Oy и началом координат.

* **3953.** Какой поверхностью вращения является зеркало прожектора, если лучи света, исходящие из точечного источника, отразившись, направляются параллельным пучком?

14.1.3. Линейные уравнения

Уравнение вида $y' + P(x)y = f(x)$ называется *линейным уравнением первого порядка*. Оно решается подстановкой $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. При этом уравнение приводится к виду $u'v + u(v' + P(x)v) = f(x)$; приравняв нулю выражение в скобках, решим уравнение с разделяющимися переменными относительно v и придем к уравнению того же типа $u'v = f(x)$ относительно u.

В задачах 3954–3964 найти общие решения уравнений.

3954. $y' + 2y = 4x$.
3955°. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
3956. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.
3957. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
3958. $y' + y = \cos x$.
3959. $y' + ay = e^{mx}$.
3960. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$.
3961°. $y' = \frac{1}{2x-y^2}$.
3962. $y' = \frac{y}{2y\ln y+y-x}$.
3963. $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

3964. $y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\Phi'(x) = 0$, где $\Phi(x)$ — заданная функция.

В задачах 3965–3968 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

3965°. $y' - y\operatorname{tg} x = \sec x$; $y\Big|_{x=0} = 0$.

3966. $xy' + y - e^x = 0$; $y\Big|_{x=a} = b$.

3967. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$; $y\Big|_{x=1} = 0$.

3968. $t(1+t^2)\,dx = (x + xt^2 - t^2)\,dt$; $x\Big|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}$.

3969. Пусть y_1 и y_2 — два различных решения уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$.

1) Доказать, что $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ является общим решением того же уравнения (C — константа).
2) При каком соотношении между постоянными α и β линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ будет решением данного уравнения?
3) Доказать, что если y_3 — третье частное решение, отличное от y_1 и y_2, то отношение $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ постоянно.

3970°. Доказать тождество (см. задачу 2345 $\int_0^x e^{zx-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$, составив для функции $I(x) = \int_0^x e^{zx-z^2}\,dz$ дифференциальное уравнение и решив его.

3971. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

***3972.** Найти линию, у которой площадь прямоугольника, построенного на абсциссе любой точки и начальной ординате касательной в этой точке, есть величина постоянная ($= a^2$).

***3973.** Найти линию, для которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна ($= a^2$).

3974. Точка массой, равной m, движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1), протекшему от момента, когда скорость равнялась нулю. Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости от времени.

3975°. Точка массой, равной m, движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная кубу времени, протекшего с момента, когда скорость была v_0 (коэффициент пропорциональности равен k). Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Найти зависимость скорости от времени.

3976. Начальная температура тела θ_0°C равна температуре окружающей среды. Тело получает тепло от нагревательного прибора (скорость подачи тепла является заданной функцией времени: $c\varphi(t)$, где c — постоянная теплоемкость тела). Кроме того, тело отдает тепло окружающей среде (скорость охлаждения пропорциональна разности между температурами тела и среды). Найти зависимость температуры тела от времени, отсчитываемого от начала опыта.

Решить задачи 3977–3978, учитывая, что если переменный электрический ток $I = I(t)$ течет по проводнику с коэффициентом индуктивности L и сопротивлением R, то падение напряжения вдоль проводника будет равно $L\frac{dI}{dt} + RI$.

3977. Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от $E_0 = 2$ *В* до $E_1 = 1$ *В* в течение 10 с. Каков будет ток в конце десятой секунды, если в начале опыта он был 162/3 А? Сопротивление катушки 0,12 *Ом*, коэффициент индуктивности 0,1 *Гн*.

3978°. Найти ток в катушке в момент t, если сопротивление ее R, коэффициент индуктивности L, начальный ток $I_0{=}0$, электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$.

14.1.4. Разные задачи (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные)

В задачах 3979–3997 найти общие решения уравнений.

3979. $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

3980. $x^2\,dy + (3 - 2xy)\,dx = 0$.

3981. $x(x^2+1)y' + y = x(1+x^2)^2$.

3982. $y' = \frac{y+1}{x}$.

3983. $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}4$.

3984. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$.

3985°. $x^3y' = y(y^2 + x^2)$.

3986. $\frac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

3987. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

3988. $y' = e^{2x} - e^x y.$

3989. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$

3990. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$

3991. $(x - 2xy - y^2)\,dy + y^2\,dx = 0.$

3992. $y' + y\cos x = \sin x\cos x.$

3993. $(x+1)y' - ny = e^x(x+1)^{n+1}.$

3994. $y\,dx = (y^3 - x)\,dy.$

3995. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$

* **3996°.** $yy'\sin x = \cos x(\sin x - y^2).$

3997. $y' = (x+y)^2.$

3998. Убедиться в том, что интегральными кривыми уравнения $(1 - x^2)y' + xy = ax$ являются эллипсы и гиперболы с центрами в точке $(0, a)$ и осями, параллельными координатным осям, причем каждая кривая имеет одну постоянную ось, длина которой равна 2.

В задачах 3999–4002 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

3999. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2,\ y\Big|_{x=1} = 1.$

4000°. $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x;\ y\Big|_{x=0} = 1.$

4001. $(1 + e^x)yy' = e^y;\ y\Big|_{x=0} = 0.$

4002. $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2;\ y\Big|_{x=0} = 1.$

4003. Доказать, что только прямые $y = kx$ и гиперболы $xy = m$ обладают следующим свойством: длина полярного радиуса любой их точки равна длине касательной, проведенной в этой точке.

4004. Найти линию, у которой длина нормали пропорциональна квадрату ординаты. Коэффициент пропорциональности равен k.

4005. Найти линию, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

4006°. Найти уравнение линии, пересекающей ось абсцисс в точке $x = 1$ и обладающей таким свойством: длина поднормали в каждой точке линии равна среднему арифметическому координат этой точки.

4007. Найти линию, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы.

4008. Найти линию, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, линией и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая — переменная, равна отношению куба переменной ординаты к переменной абсциссе.

4009. Найти линию, для которой площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и дугой MM' этой линии, пропорциональна дуге MM' при любом выборе точек M и M'.

4010°. Найти линию, для которой абсцисса центра масс криволинейной трапеции, образованной осями координат, прямой $x = a$ и линией, была бы равна $\frac{3a}{4}$ при любом a.

***4011.** Найти линию, все касательные к которой проходят через данную точку (x_0, y_0).

4012. Найти линию, проходящую через начало координат, все нормали к которой проходят через данную точку (x_0, y_0).

4013. Какая линия обладает следующим свойством: угол, составляемый с осью Ox касательной к линии в любой ее точке, вдвое больше угла, который составляет с той же осью полярный радиус точки касания.

4014. На тело массы $m = 1$ действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Кроме того, тело испытывает противодействие среды, пропорциональное скорости тела (коэффициент пропорциональности равен k_2). Найти закон движения тела (зависимость пути от времени).

4015°. Частица падает в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости частицы. Показать, что уравнение движения будет $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, где k — постоянная, g — ускорение силы тяжести. Проинтегрировать это уравнение и показать, что v стремится к $\sqrt{\frac{g}{k}}$ при $t \to +\infty$.

4016. Сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна угловой скорости вращения.

1) Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 3 оборота в секунду, через 1 мин вращается с угловой скоростью 2 оборота в секунду. Какова будет его угловая скорость через 3 мин после начала вращения?
2) Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 5 оборотов в секунду, через 2 мин вращается с угловой скоростью 3 оборота в секунду. Через сколько времени после начала вращения он будет обладать угловой скоростью, равной 1 обороту в секунду?

4017. Пуля входит в доску толщиной $h = 0{,}1$ м со скоростью $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из диска, пробив ее, со скоростью $v_1 = 80$ м/с. Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску.

***4018.** Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, движется по инерции с начальной скоростью v_0 см/с. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент ($t = 0$) она равна f_0 H. Найти зависимость скорости капли от времени.

***4019.** Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г, равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, свободно падает в воздухе. Сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения капли от времени, протекшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равнялась нулю. Считать, что $k \neq 2m$.

***4020.** Решить предыдущую задачу для капли сферической формы, предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли и площади ее поверхности. Плотность жидкости γ. (Привести к квадратурам.)

***4021°.** Если в каком-либо процессе одно вещество превращается в другое, причем скорость образования продукта пропорциональна наличному количеству превращающегося вещества, то такое явление называют процессом (или реакцией) первого порядка.

Некоторое вещество, начальное количество которого m_0, превращается в другое вещество, а из образовавшегося продукта немедленно начинает получаться второй продукт. Оба превращения происходят как процессы первого порядка; коэффициенты пропорциональности известны: k_1 — в первом процессе и k_2 — во втором.

Какое количество второго продукта образуется через t единиц времени после начала процесса?

4022. В резервуаре, объем которого 100 л, находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар емкостью также 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максимальное количество достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания.)

4023. Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от нуля до 120 *В* и от нуля до 120 *Ом* (см. задачи 3977–3978). Индуктивность цепи постоянна (1 *Гн*). Начальный ток I_0. Найти зависимость между током и временем в течение первой минуты опыта.

***4024.** В узкой горизонтальной цилиндрической трубке AB, герметически закрытой, заключен газ. Трубка равномерно вращается вокруг вертикальной оси OO_1 (рис. 14.1), проходящей через один из ее концов с угловой скоростью w. Длина трубки l см, поперечное сечение S см^2, масса заключенного в ней газа M г, давление в покоящейся трубке (постоянное вдоль всей трубки) p_0. Найти распределение давления вдоль трубки при ее вращении, т. е. выразить p как функцию от x.

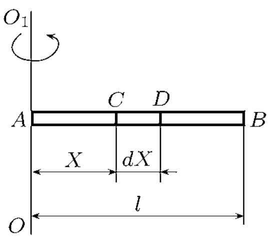

Рис. 14.1

14.1.5. Другие примеры уравнений первого порядка

В задачах 4025–4037 найти общие решения уравнений, приводя их с помощью замены переменных к уравнениям линейным или однородным.

4025°. $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

4026. $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

4027. $(x+y+1)\,dx = (2x+2y-1)\,dy$.

4028. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$.

4029. $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

4030°. $y' = \frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$.

4031. $(1-xy+x^2y^2)\,dx = x^2\,dy$.

4032. $(x^2y^2-1)y' + 2xy^3 = 0$.

4033. $yy' + x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

4034. $xy' + 1 = e^y$.

4035. $(x^2+y^2+1)\,dy + xy\,dx = 0$.

4036°. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4037. $(x^2+y^2+y)\,dx = x\,dy$.

В задачах 4038–4047 решить уравнения Бернулли.

4038. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

4039. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

4040°. $y^{n-1}(ay'+y) = x$.

4041. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

4042. $xy' + y = y^2\ln x$.

4043. $y' - y\operatorname{tg} x + y^2\cos x = 0$.

4044. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

4045°. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

4046. $y\,dy - \frac{ay^2}{x^2}\,dx = \frac{b\,dx}{x^2}$.

4047. $y' = \frac{y\varphi'(x)-y^2}{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ — заданная функция.

4048. Найти линию, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке:

1) пропорционален квадрату ординаты точки касания;
2) пропорционален кубу ординаты точки касания.

4049. Найти линии, заданные уравнениями вида $\rho = f(\varphi)$, для которых площадь секторов, ограниченных линией и полярным радиусом постоянной точки (ρ_0, φ_0) и текущей точки

(ρ, φ) линии, пропорциональна произведению полярных координат ρ и φ этой текущей точки. Коэффициент пропорциональности равен k.

14.1.6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU$ называется *уравнением в полных дифференциалах*. Достаточное условие существования функции U: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Общее решение уравнения $U = C$, где $U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$.

В задачах 4050–4057 найти общие решения уравнений.

4050°. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0.$

4051. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx.$

4052. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$

4053. $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0.$

4054. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}.$

4055°. $\frac{y+\sin x\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \sin y\,dy = 0.$

4056. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)y\,dy = 0.$

4057. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

14.1.7. Интегрирующий множитель

Функция $M(x,y)$ такая, что $M(P\,dx + Q\,dy) = dU$, называется *интегрирующим множителем*. Интегрирующий множитель $M(x)$, не зависящий от y, существует, если

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F(x).$$

При этом $\ln M(x) = \int F(x)\,dx$. Аналогично, $M(y)$ существует, если

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = G(y).$$

При этом $\ln M(y) = \int G(y)\,dx$.

В задачах 4058–4062 найти интегрирующий множитель и общие решения уравнений.

4058. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

***4059.** $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

4060°. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.

4061. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$.

4062. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$.

4063. Убедиться, что интегрирующим множителем линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ служит функция $e^{\int P(x)\,dx}$.

4064. Найти интегрирующий множитель уравнения Бернулли $y' + P(x)y = y^n Q(x)$.

4065°. Найти условия, при которых уравнение

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(x+y)$.

4066. Найти условия, при которых уравнение

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(xy)$.

14.1.8. Разные задачи

В задачах 4067–4088 найти общие решения уравнений.

4067. $y' = ax + by + c$.

4068. $ay' + by + cy^m = 0$.

4069. $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$.

4070°. $y' = \frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

4071. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$.

4072. $y'(y^2 - x) = y$.

4073. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0$.

4074. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.

4075°. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

4076. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4078. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0$.

4079. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$.

4080°. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

4081. $y' - y + y^2\cos x = 0$.

4082. $y' = \frac{\cos x\sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x\cos y}$.

4083. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

4084. $\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y\,dx + \left(x\cos\frac{y}{x} - y\sin\frac{y}{x}\right)x\,dy = 0$.

4085°. $y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y$.

4086. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$.

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x.$

4088. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$

4089. Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты, как ордината этой точки к ее абсциссе.

4090°. Найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок касательной в любой ее точке, заключенный между осью Ox и прямой $y = ax + b$, делится точкой касания пополам.

4091. Найти линию, для которой отношение расстояния от нормали в любой ее точке до начала координат к расстоянию от той же нормали до точки (a, b) равно постоянной k.

4092. Найти линию, для которой расстояние от начала координат до касательной в произвольной ее точке равно расстоянию от начала координат до нормали в той же точке.

***4093.** Найти линию, обладающую следующим свойством: ордината любой ее точки есть средняя пропорциональная между абсциссой и суммой абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

4094. В электрическую цепь с сопротивлением $R = \frac{3}{2}$ *Ом* в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 *В*). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найти зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

§ 14.2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

14.2.1. Поле направлений. Изоклины

Совокупность направлений $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ называется *полем направлений* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Кривые $f(x, y) = k$ называются *изоклинами*. Интегральные кривые пересекают их под постоянным углом.

4095. Дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

1) Построить поле направлений, устанавливаемое данным уравнением.

2) Выяснить расположение вектора поля относительно полярного радиуса любой точки поля.
3) Выяснить вид интегральных кривых уравнения, исходя из поля направлений.
4) Найти интегральные кривые, решая данное уравнение обычным методом (разделяя переменные).
5) Указать семейство изоклин данного уравнения.

4096. Написать дифференциальное уравнение, изоклинами которого служат:

1) равнобочные гиперболы $xy = a$;
2) параболы $y^2 = 2px$;
3) окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

4097°. Найти изоклины дифференциального уравнения семейства парабол $y = ax^2$. Сделать чертеж. Истолковать результат геометрически.

4098. Убедиться, что изоклинами однородного уравнения (и только однородного уравнения) служат прямые, проходящие через начало координат.

4099. Указать линейные уравнения, изоклинами которых являются прямые.

4100. Пусть y_1, y_2, y_3 — ординаты трех любых изоклин некоторого линейного уравнения, соответствующие одной абсциссе. Убедиться, что отношение $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ сохраняет одно и то же значение, какова бы ни была эта абсцисса.

14.2.2. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

4101. Дано уравнение $y' = \frac{x^2+y^2}{10}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $1 \leqslant x \leqslant 5$, проходящую через точку $M(1, 1)$.

4102. Дано уравнение $y'=\frac{1}{x^2+y^2}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $0{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5$ проходящую через точку $(0{,}5; 0{,}5)$.

4103°. Дано уравнение $y' = yx^3 + x^2$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 1$, если y — частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\Big|_{x=0} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

4104. Дано уравнение $y' = \sqrt{x} \cdot y^2 + 1$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 2$, если y — частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\Big|_{x=1} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

4105. Дано: уравнение $y' = \frac{xy}{2}$ и начальное условие $y\Big|_{x=0} = 1$. Решить это уравнение точно и найти значение y при $x = 0{,}9$. Далее, найти это значение при помощи приближенного метода разбивая отрезок $[0; 0{,}9]$ на 9 частей. Указать относительную погрешность последнего результата.

4106. Дано: уравнение $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$ и начальное условие $y\Big|_{x=1} = 0$. Решить уравнение точно и, пользуясь каким-либо из приближенных методов интегрирования уравнений, вычислить значение x при $y = 1$ (сравнить со значением x, получаемым при точном решении).

4107°. $y' = y^2 + xy + x^2$. Найти по методу последовательных приближений второе приближение для решения, удовлетворяющего начальном условию $y\Big|_{x=0} = 1$.

4108. $y' = xy^3 - 1$. Найти при $x = 1$ значение того решения данного уравнения, которое удовлетворяет начальном условию $y\Big|_{x=0} = 0$. Ограничиться третьим приближением по методу последовательных приближений. Вычисления вести с двумя десятичными знаками.

В задачах 4209–4116 найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решений уравнений при указанных начальных условиях.

4109. $y' = y^3 - x$; $y\Big|_{x=0} = 1$.

4110°. $y' = x^2y^2 - 1$; $y\Big|_{x=0} = 1$.

4111. $y' = x^2 - y^2$; $y\Big|_{x=0} = 0$.

4112. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$; $y\Big|_{x=0} = 1$.

4113. $y' = \frac{xy}{1+x+y}$; $y\Big|_{x=0} = 0$.

4114. $y' = e^y + xy$; $y\Big|_{x=0} = 0$.

4115°. $y' = \sin y - \sin x$; $y\Big|_{x=0} = 0$.

4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y\Big|_{x=1} = 1$.

14.2.3. Особые решения. Уравнения Клеро и Лагранжа

Уравнение $y = x\varphi(y') + \psi(y') = 0$ называется *уравнением Лагранжа*, его частный случай $y = xy' + \psi(y') = 0$ — *уравнением Клеро*. Вводя параметр $p = y'$, дифференцируем обе части уравнения Лагранжа и, учитывая, что $dy = pdx$, получаем линейное относительно x дифференциальное уравнение. При решении уравнения Клеро этим способом получаем уравнение, распадающееся на два множителя, один из них дает общее решение — семейство прямых $y = Cx + \psi(C)$, второй — *особое решение* — огибающую этого семейства.

В задачах 4117–4130 найти общие и особые решения уравнений Клеро и уравнений Лагранжа.

4117. $y = xy' + y'^2$.

4118. $y = xy' - 3y'^3$.

4119. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

4120°. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

4121. $y = xy' + \sin y'$.

4122. $xy' - y = \ln y'$.

4123. $y = y'^2(x + 1)$.

4124°. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.

4126. $y = x(1 + y') + y'^2$.

4127. $y' = \ln(xy' - y)$.

4128. $y = y'(x + 1) + y'^2$.

4129. $y = y'x + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$.

4130. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

В задачах 4131–4133 найти особые решения уравнений, применяя тот же прием, какой используется в случае уравнений Лагранжа и Клеро.

4131°. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

4132. $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

4133. $y'(y' - 2x) = 2(y - x^2)$.

4134. Доказать теорему: если линейное дифференциальное уравнение является уравнением Клеро, то семейство его интегральных кривых представляет собой пучок прямых.

4135°. Площадь треугольника, образованного касательной к искомой линии и осями координат, есть величина постоянная. Найти линию.

4136. Найти линию, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых равна $2a$.

4137. Найти линию, для которой произведение расстояний любой касательной до двух данных точек постоянно.

4138. Найти линию, для которой площадь прямоугольника, имеющего сторонами касательную и нормаль в любой точке, равна площади прямоугольника со сторонами, равными по длине абсциссе и ординате этой точки.

4139. Найти линию, для которой сумма нормали и поднормали пропорциональна абсциссе.

***4140.** Найти линию, для которой отрезок нормали, заключенный между координатными осями, имеет постоянную длину a.

4141. Скорость материальной точки в произвольный момент времени отличается от средней скорости (от начала движения до этого момента) на величину, пропорциональную кинетической энергии точки и обратно пропорциональную времени, считая от начала движения. Найти зависимость пути от времени.

14.2.4. Ортогональные и изогональные траектории и эвольвенты

Кривые, пересекающие линии данного семейства $F(x, y, a) = 0$ под постоянным углом φ, называются *изогональными траекториями*. Если $\varphi = 90^\circ$, траектории называются *ортогональными*. Если семейство линий задано уравнением $f(x, y, y') = 0$, подставляя в него вместо y' $\frac{y' + \operatorname{tg}\varphi}{1 - y' \operatorname{tg}\varphi}$, если $\varphi \neq 90^\circ$, или $-\frac{1}{y'}$ при $\varphi = 90^\circ$, получаем уравнение траекторий. Эвольвента — траектория, ортогональная к семейству касательных кривой.

В задачах 4142–4147 найти траектории, ортогональные данным.

4142. Эллипсам, имеющим общую большую ось, равную $2a$.

4143. Параболам $y^2 = 4(x - a)$.

4144. Окружностям $x^2 + y^2 = 2ax$.

4145°. Циссоидам $(2a - x)y^2 = x^3$.

4146. Равным параболам, касающимся данной прямой, причем для каждой параболы точкой касания служит ее вершина.

4147. Кругам одного радиуса, центры которых лежат на данной прямой линии.

4148. Найти семейство траекторий, пересекающих под углом $\alpha = 60^\circ$ линии $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$.

4149°. Найти изогональные траектории семейства парабол $y^2 = 4ax$; угол пересечения $\alpha = 45^\circ$.

***4150.** Найти линии распространения звука по плоскости от неподвижного источника звука, лежащего в той же плоскости, если вдоль какого-либо направления дует ветер с постоянной скоростью a.

В задачах 4151–4154 найти эвольвенты линий.

4151. Окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

4152. Цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

4153. Эвольвенты окружности

$$x = a(\cos t + t \sin t), \qquad y = a(\sin t - t \cos t).$$

4154°. Полукубической параболы $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

§ 14.3. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

14.3.1. Частные случаи уравнений второго порядка

Если уравнение не содержит y, порядок понижается подстановкой $y' = z$, $y'' = z'$. Если уравнение не содержит x, порядок понижается подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

В задачах 4155–4182 найти общие решения уравнений.

4155. $y'' = x + \sin x$.

4156. $y'' = \operatorname{arctg} x$.

4157°. $y'' = \ln x$.

4158. $xy'' = y'$.

4159. $y'' = y' + x$.

4160. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162°. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

4163. $(y'')^2 = y'$.

4164. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

4167°. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

4168. $a^2y'' - y = 0$.

4169. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.
4170. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.
4171. $yy'' + (y')^2 = 1$.
4172. $yy' = (y')^2$.
4173. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.
4174. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.
4175°. $y'' = 2yy'$.
4176. $\cos y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.
4177. $yy' - (y')^2 = y^2y'$.
4178. $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$.
4179. $y'' = y'\left(\frac{y'}{y} - 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4}\right)$.
4180. $(x+a)y'' + x(y')^2 = y'$.
* **4181°.** $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.
4182. $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$.

В задачах 4183–4188 решить уравнения при помощи подходящей подстановки $yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{y'}{y} = p$ и т. п.

4183. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.
4184. $xy'' = y'(e^y - 1)$.
4185°. $yy'' + (y')^2 = x$.
4186. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 0$.
4187. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$.
4188. $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$.

В задачах 4189–4199 найти частные решения уравнений при указанных начальных условиях.

4189. $y''(x^2+1) = 2xy'$; $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 3$.
4190°. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$; $y\big|_{x=2} = 2$, $y'\big|_{x=2} = 1$.
4191. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$; $y\big|_{x=2} = 0$, $y'\big|_{x=2} = 4$.
4192. $2y'' = 3y^2$; $y\big|_{x=-2} = 1$, $y'\big|_{x=-2} = -1$.
4193. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = -1$.
4194. $y^3y'' = -1$; $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 0$.
4195°. $y^4 - y^3y'' = 1$; $y\big|_{x=0} = \sqrt{2}$, $y'\big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4196. $y'' = e^{2y}$; $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.
4197. $2(y')^2 = y''(y-1)$; $y\big|_{x=1} = 2$, $y'\big|_{x=1} = -1$.
* **4198.** $x^4y'' = (y - xy')^3$; $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 1$.
4199. $y'' = xy' + y + 1$; $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

***4200.** Какая линия обладает тем свойством, что радиус кривизны в любой ее точке пропорционален длине нормали? Принять коэффициент пропорциональности $k = -1, +1, -2, +2$.

4201. Найти линию, для которой проекция радиуса кривизны на ось Oy есть величина постоянная, равная a.

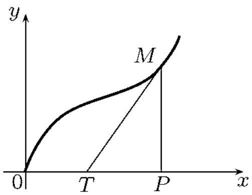

Рис. 14.2

4202°. Найти линию, проходящую через начало координат, у которой отношение площади треугольника MTP (рис. 14.2) образованного касательной в какой-нибудь точке M линии, ординатой этой точки MP и осью абсцисс, к площади криволинейного треугольника OMP равно постоянному числу k $(k > \frac{1}{2})$.

4203. Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

4204. Точка массы m вертикально брошена вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления воздуха равна kv^2. Поэтому, если принять вертикаль за ось Oy, то при движении вверх имеем $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kv^2$, а при падении $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kv^2$, где $v = \frac{dy}{dt}$. Найти скорость, которую будет иметь тело в тот момент, когда оно падает на землю.

4205°. Тонкая гибкая и нерастяжимая нить подвешена за оба конца. Какую форму в равновесии примет нить под действием нагрузки, равномерно распределяющейся по проекции нити на горизонтальную плоскость? (Весом нити пренебрегаем.)

4206. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа силы, действующей в направлении движения и зависящей от пути, пропорциональна времени, протекшему с момента начала движения. Коэффициент пропорциональности равен k.

***4207.** Луч света из воздуха (показатель преломления m_0) падает под углом α_0 с вертикалью в жидкость с переменным показателем преломления. Последний линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту; на поверхности жидкости он равен m_1, а на глубине h он равен

m_2. Найти форму светового луча в жидкости. (Показатель преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света.)

14.3.2. Частные случаи уравнений более высоких порядков

В задачах 4208–4217 найти общие решения уравнений.

4208. $y''' = \frac{1}{x}$.

4209. $y''' = \cos 2x$.

4210. $y^{\mathrm{X}} = e^{ax}$.

4211°. $x^2 y''' = (y'')^2$.

4212. $xy^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}$.

4213. $y''' = (y'')^3$.

4214. $y'y''' = 3(y'')^2$.

4215°. $yy''' - y'y'' = 0$.

4216. $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

14.3.3. Приближенные решения

4218. При исследовании колебания материальной системы с одной степенью свободы встречается дифференциальное уравнение вида $y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$. Решить это уравнение графически, если

1) $f_1(x)=0$, $f_2(y)=-\sqrt{y}$, $f_3(y')=0{,}5y'$ и $y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=0$;
2) $f_1(x)=-x$, $f_2(y)=0$, $f_3(y')=-0{,}1y'-0{,}1y'^3$ и $y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=1$.

4219. $y'' = yy' - x^2$; $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

1) Решить данное уравнение графически.
2) Найти несколько первых членов разложения решения в степенной ряд.

4220°. Найти шесть первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, удовлетворяющего начальным условиям $y\Big|_{x=1} = 1$, $y'\Big|_{x=1} = 0$.

4221. Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=1} = 0$, $y'\Big|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

4222. Найти в форме степеннóго ряда частное решение $y = f(x)$ уравнения $y'' = xyy'$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Если ограничиться пятью первыми членами разложения, то будет ли этого достаточно для вычисления $f(-0{,}5)$ с точностью до 0,001?

4223. Найти семь первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $yy''+y'+y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 0$. Какого порядка малости будет при $x \to 0$ разность $y - (2 - x - e^{-x})$?

4224. Найти 12 первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y''+yy'-2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 0$. Вычислить интеграл $\int_0^1 y\,dx$ с точностью до 0,001. Вычислить $y'\Big|_{x=0,5}$ с точностью до 0,00001.

***4225.** Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0{,}4$ *Гн* и электрической ванны. В ванне находится литр воды, подкисленной небольшим количеством серной кислоты. Вода разлагается током, при этом меняются концентрация, а следовательно и сопротивление раствора в ванне. Напряжение на клеммах поддерживается постоянным (20 *В*). Количество вещества, выделяющееся при электролизе, пропорционально току, времени и электрохимическому эквиваленту вещества (закон Фарадея). Электрохимический эквивалент воды равен 0,0000187 г/Кл. Сопротивление раствора в начале опыта $R_0 = 2$ *Ом*, начальный ток 10 А. Найти зависимость (в форме степенного ряда) объема воды в сосуде от времени.

***4226.** Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0{,}4$ *Гн* и электрической ванны, первоначальное сопротивление которой 2 *Ом*. В ванне в литре воды растворено 10 г хлористого водорода. Кислота разлагается током, при этом меняется концентрация раствора (ср. с предыдущей задачей, где количество растворенного вещества не менялось, а менялся объем растворителя). Напряжение на клеммах цепи 20 *В*, электрохимический эквивалент k хлористого водорода равен 0,000381 г/Кл, начальный ток 10 *А*. Найти зависимость (в форме степенного ряда) между количеством соляной кислоты в растворе и временем.

§ 14.4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функции $y_1, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми*, если из равенства $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = 0$ следует, что все $C_i = 0$. Общее решение *однородного линейного уравнения*

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = 0$$

имеет вид $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$, где $y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (*фундаментальная система*). Общее решение *неоднородного линейного уравнения*

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = f(x)$$

имеет вид $y = y_0 + y_1$, где y_0 — общее решение однородного уравнения, а y_1 — частное решение неоднородного уравнения.

4227°. Функции x^3 и x^4 удовлетворяют некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Убедиться, что они образуют фундаментальную систему, и составить уравнение.

4228. То же для функций e^x и $x^2 e^x$.

4229. Функции x, x^3 и e^x образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

4230. Функции x^2 и x^3 образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения второго порядка. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=1} = 1$, $y'\Big|_{x=1} = 0$.

4231. Функции $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ удовлетворяют некоторому линейному однородному уравнению второго порядка:

1) проверить, что они составляют фундаментальную систему решений;
2) составить уравнение;
3) показать, что другой фундаментальной системой этого уравнения являются функции 1 и $\cos 2x$.

***4232.** Если y_1 есть частное решение уравнения

$$y'' + y' P(x) + y Q(x) = 0,$$

то

$$y_2 = C y_1 \int e^{-\int P(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2} \quad (C \text{ — постоянная})$$

тоже является решением. Показать это тремя способами:

1) непосредственной проверкой;
2) заменой $y = y_1 z$;
3) из формулы Остроградского.

4233. Пользуясь формулой задачи 4232, найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, зная его частное решение $y_1 = x$.

4234°. Решить уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

4235. Уравнение $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ имеет решение $y = e^x$. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'\Big|_{x=1} = 0$, $y'\Big|_{x=1} = 1$.

***4236.** Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $y'' + y'O(x) - yQ(x) = 0$ имело два линейно независимых решения y_1 и y_2, удовлетворяющих условию $y_1 y_2 = 1$.

***4237.** Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, если его частное решение есть многочлен третьей степени.

В задачах 4238–4240 легко подобрать одно частное решение (не считая тривиального $y = 0$) для данного уравнения. Найти общие решения этих уравнений.

4238°. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$.

4239. $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

4240. $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

4241°. Найти общее решение уравнения $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$, зная частные решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$.

В задачах 4242–4244 найти общие решения неоднородных уравнений.

4242. $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$.

4243. $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$.

4244. $(3x + 2x^2)y'' - 6(1 + x)y' + 6y = 6$.

4245°. Уравнение $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ допускает частное решение $y = x^2$. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y\Big|_{x=-1} = 0$, $y'\Big|_{x=-1} = 0$.

4246. Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y\Big|_{x=0} = -2$, $y'\Big|_{x=0} = 2$.

4247. Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 0$.

4248. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1 = 0$; $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 0$.

4249. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y''=ye^x$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

4250°. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

14.4.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

Общее решение y_0 однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy = 0$ находится с помощью *характеристического уравнения* (х.у.) $k^2 + pk + q = 0$. Если последнее имеет два вещественных корня $t_1 \neq t_2$, $y_0 = C_1e^{t_1x} + C_2e^{t_2x}$; если х.у. имеет один корень t второй кратности, $y_0 = C_1e^{tx} + C_2xe^{tx}$; если корни х.у. комплексные сопряженные $t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$. Частное решение неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ в некоторых случаях может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

1. Если $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n и a — не корень х.у., то $y_1 = e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Если же a — корень х.у. кратности d, то $y_1 = x^de^{ax}Q_n(x)$.

2. Если $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx$, и $a+bi$ — не корень х.у., то $y_1 = e^{ax}(S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx)$, где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ — многочлены степени $N = \max(m, n)$. Если же $a + bi$ — корень х.у. кратности d, то $y_1 = e^{ax}x^d(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx)$.

В остальных случаях можно использовать метод *вариации произвольных постоянных.* Если y_1, y_2 —

фундаментальная система решений однородного уравнения, общее решение соответствующего неоднородного уравнения ищется в виде $C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где функции $C_i(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}.$$

В задачах 4251–4261 найти общие решения уравнений.

4251. $y'' + y' - 2y = 0$.

4252. $y'' - 9y = 0$.

4253. $y'' - 4y' = 0$.

4254. $y'' - 2y' - y = 0$.

4255°. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

4256. $y'' + y = 0$.

4257. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

4258. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

4259. $y'' - 2y' + y = 0$.

4260°. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

4261. $2y'' + y' + 2\sin^2 15°\cos^2 15°\cdot y = 0$.

В задачах 4262–4264 найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

4262. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 6$, $y'\Big|_{x=0} = 10$.

4263. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 15$.

4264. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 0$.

4265. Дано частное решение некоторого линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y_1 = e^{mx}$. Дискриминант соответствующего характеристического уравнения равен нулю. Найти частное решение этого дифференциального уравнения, обращающееся вместе со своей производной в 1 при $x = 0$.

4266°. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + 9y = 0$, проходящую через точку $M(\pi, -1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y + 1 = x - \pi$.

4267. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + ky = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой $y - y_0 = a(x - x_0)$.

В задачах 4268–4282 составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных.

4268. $2y'' + y' - y = 2e^x$.
4269. $y'' + a^2y = e^x$.
4270°. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
4271. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.
4272. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
4273. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.
4274. $y'' + 4y' - 5y = 1$.
4275. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) $10e^{-x}$;
2) $3e^{2x}$;
3) $2\sin x$;
4) $2x^3 - 30$;
5) $2e^x \cos \frac{x}{2}$;
6) $x - e^{-2x} + 1$;
7) $e^x(3 - 4x)$;
8) $3x + 5\sin 2x$;
9)° $2e^x - e^{-2x}$;
10) $\sin x \sin 2x$;
11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) $5x^2 - 2x - 1$;
2) e^x;
3) $29\cos x$;
4) $\cos^2 x$;
5) $0{,}1e^{-2{,}5x} - 25\sin 2{,}5x$;
6) $39x\sin x$;
7) $100xe^{-x}\cos x$;
8) $3\operatorname{ch}\frac{5}{2}x$.

4277. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) 1;
2) e^{-x};
3) $3e^{2x}$;
4) $2(\sin 2x + x)$;
5) $\sin x\cos 2x$;
6) $\sin^3 x$;
7) $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$;
8) $\operatorname{sh} 2x$;
9) $\operatorname{sh} x + \sin x$;
10) $e^x - \operatorname{sh}(x - 1)$.

4278. $y'' + y = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) $2x^3 - x + 2$;
2) $-8\cos 3x$;
3) $\cos x$;
4) $\sin x - 2e^{-x}$;
5) $\cos x\cos 2x$;
6) $24\sin^4 x$;
7) $\operatorname{ch} x$.

4279. $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) $5e^{\frac{3x}{5}}$;
2) $\sin\frac{4}{5}x$;
3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$;
4) $e^{\frac{3x}{5}}\cos x$;
5) $e^{\frac{3x}{5}}\sin\frac{4}{5}x$;
6) $13e^x\operatorname{ch} x$.

4280°. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
4281. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.
4282. $y'' - y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:
1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; 3) $e^{2x}\cos e^x$.

В задачах 4283–4287 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

4283. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3x}{2}}$; $y\Big|_{x=0} = 3$, $y'\Big|_{x=0} = -5{,}5$.

4284. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 3{,}2$.

4285. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 1$.

4286°. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 2$.

4287. $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y\Big|_{x=\pi} = y'\Big|_{x=\pi} = 1$.

***4288.** Показать, что частное решение $\bar{y}$ уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 — постоянные коэффициенты, p и A — действительные или комплексные числа) имеет вид $\bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)}e^{px}$, если p не является корнем характеристического уравнения $\varphi(r) \equiv a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)}e^{px}$, если p — простой корень характеристического уравнения; $\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)}e^{px}$, если p — двойной корень характеристического уравнения.

В задачах 4289–4292 найти общие решения уравнений Эйлера.

4289. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$.
4290°. $x^2y'' + xy' + y = x$.
4291. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.
4292. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

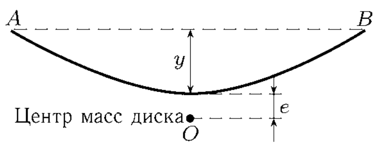

Рис. 14.3

4293. Если ось вала турбины расположена горизонтально и если центр масс диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y оси вала (рис. 14.3) при его вращении удовлетворяет уравнению $\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right)y = g\cos\omega t + \omega^2 e$, где m — масса диска, α — постоянное число, не зависящее от рода закрепления концов A и B; ω — угловая скорость вращения, e — эксцентриситет центра масс диска. Найти общий интеграл этого уравнения.

4294. Материальная точка массы 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость — нулю. Найти закон движения.

4295. Частица массы 1 г движется по прямой к точке A под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки A. На расстоянии 1 см действует сила 10^{-6} H. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно $4 \cdot 10^{-6}$ H при скорости 1 см/с. В момент $t = 0$ частица расположена на расстоянии 10 см от точки A и скорость ее равна нулю. Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t = 3$ с (с точностью до 0,01 см).

4296°. Материальная точка массы m движется по прямой из A в B под действием постоянной силы F. Сопротивление среды пропорционально расстоянию тела от B и в начальный момент (в точке A) равно f $(f < F)$. Начальная скорость точки равна нулю. Сколько времени точка будет двигаться из A в B $(AB = a)$?

4297. Тело массы 200 г подвешено на пружине и выведено из состояния покоя вытягиванием пружины на 2 см, после чего отпущено (без начальной скорости). Найти уравнение движения тела, считая, что сопротивление среды пропорционально скорости движения. Если тело движется со скоростью 1 см/с, то среда оказывает сопротивление 10^{-3} H; сила напряжения пружины при растяжении ее на 2 см равна 100 H. Весом пружины пренебрегаем.

4298. Деревянный цилиндрический чурбанчик ($S = 100\,\text{см}^2$, $h = 20$ см, $\gamma = 0{,}5$ г/см^3) полностью погружен в воду и отпущен без начальной скорости. Считая, что сила трения пропорциональна высоте погруженной части, выяснить, каков должен быть коэффициент пропорциональности k, чтобы в результате первого подъема над поверхностью воды показалась ровно половина чурбанчика.

Сколько времени (t_1) будет продолжаться первый подъем? Каково будет уравнение движения при первом подъеме?

*__4299.__ Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. В начальный момент на расстоянии a_0 от оси внутри трубки находился шарик массы m. Считая, что в начальный момент скорость шарика относительно трубки была равна нулю, найти закон движения шарика относительно трубки.

4300. Решить предыдущую задачу в предположении, что шарик прикреплен к точке O пружиной. Сила действия пружины на шарик пропорциональна деформации пружины, сила $k \cdot 10^{-5}$ H вызывает изменение длины пружины на 1 см. Длина пружины в свободном состоянии равна a_0.

14.4.2. Уравнения высших порядков

В задачах 4301–4311 найти общие решения уравнений.

4301. $y''' + 9y' = 0$.

4302°. $y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{\mathrm{IV}} = 8y'' - 16y$.

4304. $y^{\mathrm{IV}} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

4306. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0$.

4308°. $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{\mathrm{IV}} + y = 0$.

4310. $64y^{\mathrm{VIII}} + 48y^{\mathrm{VI}} + 12y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}y' + y = 0$.

4312. $y''' = -y'$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 0$, $y''\Big|_{x=0} = -1$.

4313°. $y^{\mathrm{V}} = y'$; $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 1$, $y''\Big|_{x=0} = 0$,
$y'''\Big|_{x=0} = 1$, $y^{\mathrm{IV}}\Big|_{x=0} = 2$.

В задачах 4314–4320 составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных.

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

4315. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

4316. $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = \cos x$.

4317°. $y^{\mathrm{IV}} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

4318. $y^{\mathrm{V}} + y''' = x^2 - 1.$

4319. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^x + \cos x.$

4320. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x).$

4321. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 1$, $y''\Big|_{x=0} = 1.$

4322°. $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y\Big|_{x=0} = y'\Big|_{x=0} = y'''\Big|_{x=0} = 1.$

4323. Решить уравнение Эйлера $x^3y''' + xy' - y = 0.$

§ 14.5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения *нормальной* системы двух дифференциальных уравнений (д.у.) первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases}$$

одно из уравнений дифференцируют по t и сводят решение системы к решению линейного д.у. второго порядка.

4324.

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$ (корни характеристического уравнения $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 5$).

7)° $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$ (корни характеристического уравнения $r_1 = 2$, $r_{2,3} = 3 \pm i$).

4325. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

4326°. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy' = x\left(y' = \frac{dy}{dx}\right), \\ y^2z' = x\left(z' = \frac{dz}{dx}\right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{z}, \\ z' = \frac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330. $\begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}, \\ z' = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z = y'(z-y)^2, \\ y = z'(z-y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

4333°. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$

4335. $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$.

В задачах 4336–4339 найти частные решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям.

4336. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-yz}{x^2-yz}, & y\Big|_{x=0} = 1; \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z(x+y)}{x^2-yz}, & z\Big|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{2x}{t}, & x\Big|_{t=1} = \frac{1}{3}; \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 1 + \frac{2x}{t}, & y\Big|_{t=1} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x - y, \quad x\Big|_{t=0} = 1; \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z, \quad y\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

4339. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \quad x\Big|_{t=0} = -1; \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \quad y\Big|_{t=0} = 1; \\ \frac{dz}{dt} = x + y, \quad z\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

4340°. Найти пару линий, обладающих следующими свойствами:

1) касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси ординат;
2) нормали, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс;
3) одна из линий проходит через точку $(1, 1)$, другая — через точку $(1, 2)$.

4341. Даны две линии: $y = f(x)$, проходящая через точку $(0, 1)$, и $y = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, проходящая через точку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Касательные, проведенные к обеим линиям в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс. Найти линию $y = f(x)$.

4342. Найти линию в пространстве, проходящую через точку $(0, 1, 1)$ и обладающую следующими свойствами:

1) след касательной на плоскости Oxy при перемещении точки касания вдоль линии описывает биссектрису угла между положительными направлениями осей Ox и Oy;
2) расстояние этого следа от начала координат равно координате z точки касания.

4343. Два шарика, масса каждого из которых m, соединены очень легкой пружиной (удлинение ее пропорционально растягивающей силе). Длина нерастянутой пружины l_0. Пружина растянута до длины l_1, а затем в момент $t = 0$ оба шарика, расположенные вертикально один над другим, начинают падать (сопротивлением среды пренебрегаем). Через время T длина нити сокращается до l_0. Найти закон движения каждого из шариков.

4344. Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 2 радиана в секунду. В трубке находятся два шарика с массами 300 и 200 г, соединенные невесомой упругой нерастянутой пружиной длиной 10 см, причем более тяжелый шарик дальше от оси вращения. Сила 0,24 H растягивает пружину на 1 см, а центр масс системы шариков удален от оси вращения на 10 см. Шарики удерживаются в указанном положении некоторым механизмом. В момент, который считаем началом отсчета времени, действие механизма прекращается, и шарики приходят в движение. Найти закон движения каждого шарика относительно трубки. (Трением пренебрегаем.)

4345°. Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству и количеству питательных веществ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов (коэффициент пропорциональности равен k_1). В начале опыта в сосуде имелось A_0 микроорганизмов и B_0 питательных веществ. Найти зависимость количества A микроорганизмов и количества B питательных веществ от времени ($k > 0$, $k_1 > 0$).

***4346.** Допустим, что бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их наличному количеству (коэффициент пропорциональности равен a), но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их со скоростью, пропорциональной количеству яда и количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен b). Далее, допустим, что скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен c). Число бактерий сначала возрастает до некоторого наибольшего значения, а затем убывает, стремясь к нулю. Показать, что для любого момента t число N бактерий дается формулой

$$N = \frac{4M}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

где M — наибольшее число бактерий и время t измеряется от того момента, когда $N = M$, k — некоторая постоянная.

4347. Два цилиндра, основания которых лежат в одной плоскости, соединенные внизу капиллярной трубкой, наполнены жидкостью до разной высоты (H_1 и H_2). Через трубку в единицу времени протекает объем жидкости, пропорциональный разности высот, т. е. равный $\alpha(h_1 - h_2)$, где α — коэффициент пропорциональности. Найти закон изменения высоты жидкости в сосудах над капиллярной трубкой. Поперечное сечение сосудов S_1 и S_2.

§ 14.6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

4348. 1 кг воды, теплоемкость которой считается постоянной, а начальная температура равна θ_0, нагревается погруженным в воду электрическим прибором, сопротивление которого R зависит от температуры θ линейно: $R = R_0(1 + 0{,}004\theta)$, где R_0 — сопротивление при 0°C (закон, справедливый для большинства чистых металлов). Термоизоляция сосуда настолько хороша, что теплоотдачей пренебрегаем.

Найти зависимость между температурой θ и временем t при $0 \leqslant t \leqslant T$, если:

1) Напряжение E вводится равномерно от $E = 0$ до $E = E_1$ в течение T с. Вычислить с точностью до 1°C, на сколько градусов повысится температура воды к концу 10-й минуты, если $\theta_0 = 0$°C, $E_1 = 110$ *В*, $R_0 = 10$ *Ом* и $T = 10$ мин.
2) Напряжение изменяется по закону $E = E_0 \sin 100\pi t$. Вычислить с точностью до 1°C, на сколько градусов повысится температура воды к концу 10-й минуты, если $\theta_0 = 0$°C, $E_0 = 100$ *В* и $R_0 = 10$ *Ом*.

4349. Литр воды нагревается спиралью, сопротивление которой 24 *Ом*. При этом вода отдает тепло окружающей среде, имеющей температуру 20°C (скорость охлаждения пропорциональна разности между температурами тела и среды). Известно также, что если ток выключить, то температура воды понизится с 40°C до 30°C за 10 мин. Начальная температура воды 20°C. До какой температуры нагреется вода за 10 мин, если:

1) Напряжение вводится равномерно от $E_0 = 0$ до $E_1 = 120$ *В* в течение 10 мин? Погрешность 0,1°C.
2) Ток переменный, и напряжение изменяется по формуле $E = 100 \sin 100\pi t$? Погрешность 0,1°C.

4350. Дано уравнение $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Составить таблицу значений решения, удовлетворяющего начальному условию $y\Big|_{x=1} = 1$, давая x значения от 1 до 1,5 через 0,05. Вычисления вести до третьего десятичного знака.

4351. Вычислить при $x = 1$ значение частного решения дифференциального уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию $y\Big|_{x=0} = 1$. Вычислить затем первые пять приближений y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (до четвертого десятичного знака) по методу последовательных приближений. Сравнить результаты.

4352. Известно, что интеграл $\int e^{-x^2}\,dx$ не берется в конечном виде в элементарных функциях. Пользуясь тем, что функция $y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ является решением уравнения $y' = 2xy + 1$, вычислить $\int_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$. Воспользоваться методом последовательных приближений, ограничиваясь пятым приближением. Сравнить результат с приближенным значением, вычисленным по правилу Симпсона.

4353. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = y^2 - x$ при начальном условии $y\Big|_{x=0} = 1$. Найти по методу последовательных приближений четвертое приближение (y_4), ограничиваясь таким количеством слагаемых, которое необходимо, чтобы вычислить $y_4(0{,}3)$ с тремя десятичными знаками. Найти затем несколько первых членов разложения $f(x)$ в степенной ряд; вычислить $f(0{,}3)$ также с тремя знаками после запятой и, считая $f(0{,}3)$ более точным результатом, оценить погрешность значения $y_4(0{,}3)$.

4354. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ при начальных условиях $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 0$. Найти $f(1{,}6)$ с точностью до 0,001.

***4355**°. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = y' - y + x$ при начальных условиях $y\Big|_{x=1} = 1$, $y'\Big|_{x=1} = 0$. Найти $f(1{,}21)$ с точностью до 0,000001.

*__4356.__ Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = xy' - y + e^x$ при начальных условиях $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 0$. Найти $f(\frac{1}{2})$ с точностью до 0,0001.

4357. Линия задана уравнением $y = f(x)$. Найти разложение функции $f(x)$ в ряд, зная, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = xy$ и начальным условиям $y\Big|_{x=0}$, $y'\Big|_{x=0} = 1$. Вычислить с точностью до $0,0001$ кривизну линии в точке с абсциссой 1.

Глава 15

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

§ 15.1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

4358. Пользуясь формулами Эйлера $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, доказать, что функции $\sin^n x$ и $\cos^n x$ могут быть представлены в виде тригонометрических многочленов n-го порядка.

4359. Доказать соотношения:

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin mx\,dx = \\ = \int_0^{2\pi} \cos^n x \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \sin mx\,dx = 0,$$

если $m > n$ (m и n — целые числа).

4360°. Показать, что всякий тригонометрический многочлен n-го порядка, составленный из одних косинусов, можно представить в виде $P(\cos\varphi)$, где $P(x)$ — многочлен n-й степени относительно x.

4361. С помощью формулы Эйлера (см. задачу 4358) доказать соотношение

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

4362. Доказать соотношения:

1) $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$;

2) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

4363°. Найти корни тригонометрических многочленов $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$ и $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

4364. Показать, что тригонометрический многочлен

$$\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\sin n\varphi}{n}$$

на отрезке $[0, \pi]$ имеет максимумы в точках $\frac{\pi}{n+1}$, $3\frac{\pi}{n+1}$, $\ldots$, $(2q-1)\frac{\pi}{n+1}$ и минимумы в точках $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}$, $\ldots$, $(q-1)\frac{2\pi}{n}$, где $q = \frac{n}{2}$, если n четное, и $q = \frac{n+1}{2}$, если n нечетное.

***4365.** Доказать, что тригонометрический многочлен без свободного члена $\Phi_n(\varphi) = a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + {}+b_n\sin n\varphi$, не равный тождественно нулю, не может сохранять для всех φ постоянного знака.

§ 15.2. РЯДЫ ФУРЬЕ

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ ограничена на интервале $(-\pi, \pi)$, имеет на этом интервале не более, чем конечное число точек разрыва первого рода и не более, чем конечное число точек строгого экстремума, то она может быть разложена в *ряд Фурье*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

где коэффициенты задаются как

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Если функция $f(x)$ четная,

$$b_n = 0, \;\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Если функция $f(x)$ нечетная,

$$a_n = 0, \;\; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx$$

Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть разложена по желанию как по синусам, так и по косинусам.

4366. Убедиться, что функция $y = x^3 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывна вместе со своей первой производной, но не удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Можно ли ее разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$?

Решить задачи 4367–4371 в предположении, что $f(x)$ — непрерывная функция.

4367. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x+\pi) = -f(x)$. Доказать, что все ее четные коэффициенты Фурье равны нулю ($a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0$).

4368. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x + \pi) = f(x)$. Доказать, что все ее нечетные коэффициенты Фурье равны нулю.

4369. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(-x)=f(x)$ и $f(x + \pi) = -f(x)$.

Доказать, что $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ и $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$.

4370°. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(-x) = -f(x)$ и $f(x + \pi) = -f(x)$. Доказать, что $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ и $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$.

4371. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(-x) = f(x)$ и $f(x + \pi) = f(x)$;
2) $f(-x) = -f(x)$ и $f(x + \pi) = f(x)$. Какие из ее коэффициентов Фурье обращаются в нуль?

4372. Разложить в ряд Фурье функцию, равную -1 в интервале $(-\pi, 0)$ и 1 в интервале $(0, \pi)$.

4373. Разложить в ряд по синусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$.

4374. Используя результаты задач 4372 и 4373, получить разложения для функций $y = x$ и $y = \frac{\pi - x}{2}$. Указать интервалы, в которых полученные формулы будут справедливы.

4375. Разложить функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд по косинусам.

4376. Разложить функцию $y = x^2$ в ряд Фурье:

1)° в интервале $(-\pi, \pi)$,
2) в интервале $(0, 2\pi)$ (рис. 15.1 и 15.2).

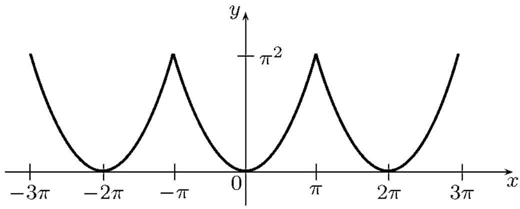

Рис. 15.1

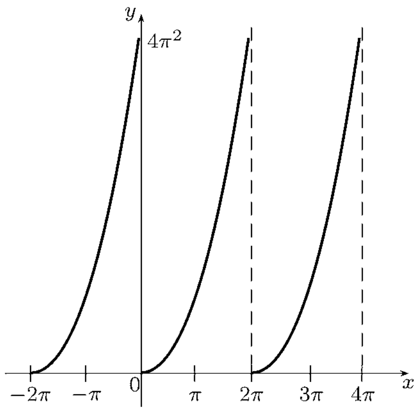

Рис. 15.2

При помощи полученных разложений вычислить суммы рядов.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$
$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots,$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

В задачах 4377–4390 разложить в ряд Фурье данные функции в указанных интервалах:

4377. Функцию $y = x^2$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

4378. Функцию $y = x^3$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4379. Функцию $f(x)$, равную 1 при $-\pi < x < 0$ и равную 3 при $0 < x < \pi$.

4380°. Функцию $f(x)$, равную 1 в интервале $(0, h)$ и равную 0 в интервале (h, π), в ряд косинусов $(0 < h < \pi)$.

4381. Непрерывную функцию $f(x)$, равную 1 при $x = 0$, равную 0 в интервале $(2h, \pi)$ и линейную в интервале $(0, 2h)$, в ряд косинусов $\left(0 < h < \frac{\pi}{2}\right)$.

4382. Функцию $y = |x|$ в интервале $(-l, l)$.

4383. Функцию $y = e^x - 1$ в интервале $(0, 2\pi)$.

4384. Функцию $y = e^x$ в интервале $(-l, l)$.

4385. Функцию $y = \cos ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое число).

4386°. Функцию $y = \sin ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое число).

4387. Функцию $y = \sin ax$ (a — целое число) в интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.

4388. Функцию $y = \cos ax$ (a — целое число) в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

4389. Функцию $y = \operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4390°. Функцию $y = \operatorname{ch} x$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов и ряд синусов.

4391. Разложить в ряд Фурье функцию, график которой изображен на рис. 15.3.

***4392.** Разложить в ряд Фурье функцию, график которой изображен на рис. 15.4.

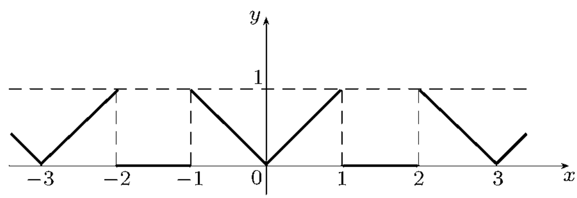

Рис. 15.3

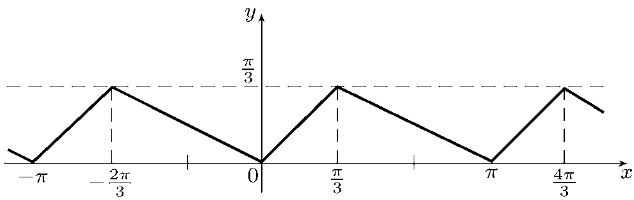

Рис. 15.4

***4393.** Разложить в ряд Фурье функции, графики которых приведены на рис. 15.5 и 15.6.

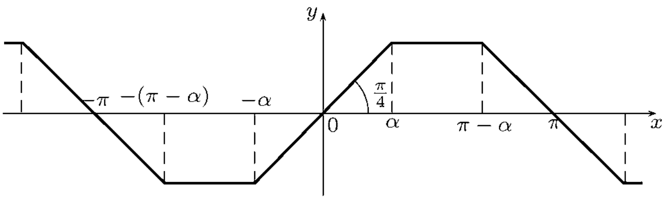

Рис. 15.5

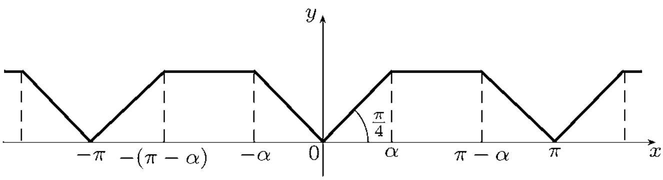

Рис. 15.6

4394. Разложить функцию $y = x(\pi - x)$ в ряд синусов в интервале $(0, \pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$$

4395°. Дана функция $\varphi(x) = (\pi^2 - x^2)^2$.

1) Убедиться, что имеют места равенства

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \qquad \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi) \qquad \text{и}$$
$$\varphi''(-\pi) = \varphi''(\pi), \qquad [\text{но } \varphi'''(-\pi) \neq \varphi'''(\pi)].$$

2) Используя полученные равенства, разложить функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.
3) Вычислить сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} + \ldots$$

§ 15.3. МЕТОД КРЫЛОВА. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В задачах 4396–4399 улучшить сходимость тригонометрических рядов, доведя коэффициенты до указанного в скобках порядка k.

***4396.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin nx$ $(k = 4)$.

***4397.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1} \sin nx$ $(k = 2)$.

***4398°.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \cos nx$ $(k = 4)$.

***4399.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} \cos nx$ $(k = 5)$.

4400. Функции $f_i(x)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ заданы в полуинтервале $[0, 2\pi)$ следующей таблицей:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f_1(x)$	27	32	35	30	26	20
$f_2(x)$	0,43	0,87	0, 64	0,57	0,28	0
$f_3(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	– 0,4	– 0,2

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f_1(x)$	18	22	26	30	32	36
$f_2(x)$	– 0,30	– 0,64	– 0,25	0,04	0,42	0,84
$f_3(x)$	– 0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6

Найти приближенное выражение этих функций в виде тригонометрического многочлена второго порядка.

Глава 16

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ*

§ 16.1. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ, ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР

Векторное поле определяется вектор-функцией точки $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. *Векторные линии* векторного поля определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Дивергенцией векторного поля называется число

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротором векторного поля называется вектор

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

4401. Найти векторные линии однородного поля $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, где a, b и c — постоянные.

4402. Найти векторные линии плоского поля $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, где ω — постоянная.

4403°. Найти векторные линии поля $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, где ω и h — постоянные.

4404. Найти векторные линии поля:

1) $\boldsymbol{A}(P) = (y + z)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$;
2) $\boldsymbol{A}(P) = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$;
3) $\boldsymbol{A}(P) = x(y^2 - z^2)\boldsymbol{i} - y(z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

---

*Задачи на свойства скалярного поля и его градиента помещены в 11.4.1. главы 11.

В задачах 4405–4408 вычислить дивергенцию (расходимость) и ротор (вихрь) заданных векторных полей.

4405. $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4406. $\boldsymbol{A}(P) = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

4407°. $\boldsymbol{A}(P) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

4408. $\boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

4409. Векторное поле образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной оси абсцисс. Вычислить дивергенцию и ротор этого поля.

4410. Плоское векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от точки ее приложения до начала координат и направленной к началу координат. (Например, плоское электрическое поле, образованное точечным зарядом.) Найти дивергенцию и ротор этого поля.

4411. Найти дивергенцию и ротор пространственного поля, если силы поля подчинены тем же условиям, что и в задаче 4410.

4412. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию от точки ее приложения до оси Oz, перпендикулярной к этой оси и направленной к ней. Вычислить дивергенцию и ротор этого поля.

4413°. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию от точки ее приложения до плоскости xOy и направленной к началу координат. Вычислить дивергенцию этого поля.

В задаче 4414 и дальше $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, $r = |\boldsymbol{r}|$ — его модуль.

4414. Вычислить $\operatorname{div}(a\boldsymbol{r})$, где a — постоянный скаляр.

4415. Доказать соотношение $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

4416. Вычислить $\operatorname{div}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

4417. Вычислить $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

4418. Не переходя к координатам, вычислить дивергенцию векторного поля:

1) $\boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a}r^2$,

2) $\boldsymbol{A}(P) = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$,

3) $\operatorname{grad}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$.

4419°. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\boldsymbol{A}(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Доказать, что дивергенция поля равна нулю только тогда, когда $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{r^2}$, если поле пространственное, и $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}$, если поле плоское, где C — произвольное постоянное число.

4420. Доказать, что

$$\mathrm{rot}[\boldsymbol{A}_1(\mathrm{P}) + \boldsymbol{A}_2(\mathrm{P})] = \mathrm{rot}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_1(\mathrm{p}) + \mathrm{rot}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_2(\mathrm{p}).$$

4421. Вычислить $\mathrm{rot}[\varphi \boldsymbol{A}(\mathrm{P})]$, где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — скалярная функция.

4422. Вычислить $\mathrm{rot}\,\mathrm{r}\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

4423. Вычислить $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор.

4424°. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси. Найти дивергенцию и ротор поля линейных скоростей.

4425. Доказать соотношение

$$\boldsymbol{n}(\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}) - \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n})) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A},$$

если $\boldsymbol{n}$ — единичный постоянный вектор.

Дифференциальные операции векторного анализа (grad, div, rot) удобно представлять с помощью символического вектора ∇ («набла» — оператор Гамильтона): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

Применение этого оператора к той или иной (скалярной или векторной) величине нужно понимать так: следует проделать по правилам векторной алгебры операцию умножения этого вектора на данную величину, а затем умножение символа $\frac{\partial}{\partial x}$ и т. п. на величину S рассматривать как нахождение соответствующей производной. Тогда $\mathrm{grad}\,u = \nabla u$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A}$; $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

При помощи оператора Гамильтона можно записывать и дифференциальные операции второго порядка:

$$\nabla\nabla u = \mathrm{div\ grad\ u}; \qquad \nabla \times \nabla \mathrm{u} = \mathrm{rot\ grad\ u};$$
$$\nabla(\nabla\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad\ div}\,\boldsymbol{A};$$
$$\nabla(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{A}; \qquad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{A}.$$

4426. Доказать, что $\boldsymbol{r} \cdot \nabla r^n = n r^n$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор.

4427. Доказать соотношения:

1) $\mathrm{rot\ grad\ u} = 0$; 2) $\mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{A} = 0$.

4428. Доказать, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathrm{u} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}^2}$.

(Это выражение называется оператором Лапласа и обычно обозначается Δu. При помощи оператора Гамильтона его можно записать в виде $\Delta u = (\nabla\nabla)u = \nabla^2 u$.)

4429. Доказать, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A}(\mathrm{P}) - \Delta \boldsymbol{A}(\mathrm{P})$, где $\Delta \boldsymbol{A}(P) = \Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k}$.

§ 16.2. ПОТЕНЦИАЛ

4430. Векторное поле образовано постоянным вектором $\boldsymbol{A}$. Убедиться, что это поле имеет потенциал, и найти его.

4431°. Векторное поле образовано силой, пропорциональной расстоянию от точки приложения до начала координат и направленной к началу координат. Показать, что это поле консервативное, и найти потенциал.

4432. Силы поля обратно пропорциональны расстоянию точек их приложения от плоскости xOy и направлены к началу координат. Будет ли поле консервативным?

4433. Силы поля пропорциональны квадрату расстояния точек их приложения от оси аппликат и направлены к началу координат. Будет ли поле консервативным?

4434°. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию точки ее приложения от оси Oz, перпендикулярной к этой оси и направленной к ней. Показать, что это поле консервативно, и найти его потенциал.

4435. Векторное поле образовано линейными скоростями точек твердого тела, вращающегося вокруг своей оси. Имеет ли это поле потенциал?

4436. Силы поля задаются так: $\boldsymbol{A}(P) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (так называемое центрированное поле). Показать, что потенциал поля равен

$$u(x, y, z) = \int_a^r f(r)\, dr \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Получить отсюда как частный случай потенциал поля сил притяжения точечной массы и потенциал поля задачи 4431.

4437. Найти работу сил поля $\boldsymbol{A}(p) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ при перемещении точки массы m по замкнутой линии, состоящей из отрезка прямой $x + z = 1$, $y = 0$, четверти окружности

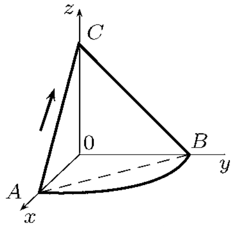

Рис. 16.1

$x^2+y^2=1$, $z=0$ и отрезка прямой $y+z=1$, $x=0$ (рис. 16.1) по направлению, указанному на чертеже. Как изменится работа, если дуга BA будет заменена ломаной BOA или отрезком BA?

§ 16.3. ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ПРИТЯЖЕНИЯ*

4438. Дан в плоскости $O\xi\eta$ однородный стержень AB длины $2l$ с линейной плотностью δ, расположенный на оси $O\xi$ симметрично относительно начала координат (рис. 16.2).

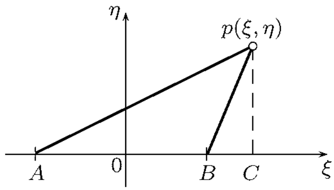

Рис. 16.2

1) Найти потенциал $u(x,y)$ стержня.
2) Показать, что проекции X и Y силы притяжения, действующей на точку P массы m с координатами $\xi = x$, $\eta = y$, равны
$$X = mk\delta\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right), \quad Y = -\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right),$$
а результирующая сила R по величине равна $R = \frac{2mk\delta}{y}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, где k — постоянная тяготения (C — проекция точки P на ось $O\xi$, α — угол APC, β — угол BPC).

*Здесь (в задачах 4438–4449) везде имеется в виду сила тяжести, действующая по закону Ньютона. Вместо выражения «потенциал массы, расположенной на (или в) данном геометрическом объекте», для краткости мы говорим «потенциал данного объекта».

4439. Найти потенциал окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ в точке $(R, 0, 2R)$, если плотность в каждой точке равна абсолютной величине синуса угла между радиус-вектором точки и осью абсцисс.

4440°. Найти потенциал первого витка однородной (плотность δ) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ в начале координат.

4441. Найти потенциал однородного квадрата со стороной a (поверхностная плотность δ) в одной из его вершин.

4442. На плоскости xOy распределена масса с плотностью δ, убывающей с расстоянием ρ от начала координат по закону $\delta = \frac{1}{1+\rho^2}$. Найти потенциал в точке $(0, 0, h)$. (Рассмотреть три случая: $h < 1$, $h = 1$ и $h > 1$.)

***4443.** Вычислить потенциал однородной боковой поверхности круглого цилиндра:

1) в центре его основания;
2) в середине его оси (радиус цилиндра R, высота H, поверхностная плотность δ).

4444. Вычислить потенциал однородной боковой поверхности прямого круглого конуса (радиус цилиндра R, высота H) в его вершине.

4445. Дан прямой круглый однородный цилиндр (радиус основания R, высота H, плотность δ).

1)° Найти потенциал в центре его основания.
2) Найти потенциал в середине его оси.

4446. Дан прямой круглый однородный конус (радиус основания R, высота H, плотность δ). Найти потенциал конуса в его вершине.

4447. Найти потенциал однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant 0)$ с плотностью δ в точке $A(0, 0, a)$. (Рассмотреть два случая: $a \geqslant R$ и $a \leqslant R$.)

***4448.** Найти потенциал однородного тела, ограниченного двумя концентрическими сферами с радиусом R и r $(R > r)$ и плотностью δ, в точке, удаленной от центра шара на расстояние a. (Рассмотреть три случая: $a \geqslant R$, $a \leqslant r$ и $r \leqslant a \leqslant R$.) Показать, что если точка находится во внутренней полости тела, то сила притяжения, действующая на эту точку, равна нулю.

4449. Найти потенциал неоднородного сплошного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R$ в точке $A(0, 0, a)$ $(a > R)$, если плотность $\delta = \lambda z^2$, т. е. пропорциональна квадрату расстояния точки от плоскости xOy.

§ 16.4. ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ (ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ)

Потоком векторного поля через поверхность S в сторону, определяемую единичным нормальным вектором $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ называется интеграл

$$\iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dq.$$

Циркуляцией векторного поля вдоль замкнутой кривой L называется

$$\oint\limits_L a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz.$$

4450. Вычислить поток и циркуляцию постоянного вектора A вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4451. Вычислить поток и циркуляцию вектора $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{r}$, где a — постоянный скаляр, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки P, вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4452. Вычислить поток и циркуляцию вектора $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4453°**.** Вычислить поток и циркуляцию вектора $\boldsymbol{A}(P) = (x^3 - y)\boldsymbol{i} + (y^3 + x)\boldsymbol{j}$ вдоль окружности радиуса R с центром в начале координат.

4454. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Определить количество жидкости, вытекающей из замкнутого контура L, окружающего начало координат, в единицу времени (поток) и количество жидкости, протекающей в единицу времени вдоль этого контура (циркуляция). Как изменится результат, если начало координат лежит вне контура?

4455. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u = \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Определить поток и циркуляцию вектора вдоль замкнутого контура L.

4456. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$. Вычислить количество жидкости, протекающей за единицу времени через отрезок прямой линии, соединяющей начало координат с точкой $(1, 1)$.

§ 16.5. ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ (ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ)

4457. Доказать, что поток радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ через любую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

4458.° Вычислить поток радиус-вектора через боковую поверхность круглого цилиндра (радиус основания R, высота H), если ось цилиндра проходит через начало координат.

4459. Пользуясь результатами задач 4457 и 4458, установить, чему равен поток радиус-вектора через оба основания цилиндра предыдущей задачи.

4460. Вычислить поток радиус-вектора через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости xOy, а ось совпадает с осью Oz. (Высота конуса 1, радиус основания 2.)

4461. Найти поток вектора $\boldsymbol{A}(P) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ через границу части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

***4462.** Найти поток вектора $\boldsymbol{A}(P) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $S(0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ и$B(0, 1, 0)$.

4463.° Вычислить циркуляцию радиус-вектора вдоль одного витка AB винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где A и B — точки соответствующие значению параметра 0 и 2π.

4464. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности радиуса R, центр которой лежит на оси вращения, а плоскость окружности перпендикулярна к оси вращения в направлении вращения.

***4465°.** Вычислить поток ротора поля векторов $\boldsymbol{A}(P) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через поверхность параболоида вращения $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, отсеченную плоскостью $z = 0$.

ОТВЕТЫ

К ГЛАВЕ 1

1. Все числа n натурального ряда, кроме $n = 1$ и $n = 2$. Если сумма углов S, а число сторон n, то $S = \pi(n - 2)$.

4. 1) При $x = -2$, $x = 1$, $x = 6$ функция обращается в нуль; 2) при $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 6$ функция положительна; 3) при $1 < x < 6$ функция отрицательна.

6. $r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}}$.

7. $S = \frac{a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

8. $b = \sqrt{25 - a^2}$.

9. $f(0) = 2$; $f(1) = -0{,}5$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 4$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$; $f(\sqrt{2}) = -0{,}242\ldots$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi(1) = 0{,}5$; $\varphi(2) = 0$; $\varphi(-2) = -4$; $\varphi(4) = 0{,}4$; $f(-1)$ не существует; $\varphi(-1)$ не существует.

10. $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a-1) = a^3 - 3a^2 + 3a + 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$.

11. $F(0) = \frac{1}{4}$; $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(-1) = \frac{1}{8}$; $F(2{,}5) = \sqrt{2}$; $F(-1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0) = \frac{1}{4}$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(-1) = \frac{1}{2}$; $\varphi(x) = 2^{x-2}$ при $x > 0$ и $\varphi(x) = 2^{-x-2}$ при $x < 0$; $\varphi(-1) + F(1) = 1$.

12. $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = a$; $\psi(-1) = -\frac{1}{a}$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a) = a^{a+1}$; $\psi(-a) = -a^{1-a}$.

13. $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$.

20. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно тангенсу угла между секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, и положительным направлением оси Ox.

22. 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

23°. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

25°. 4 и -2; -2, 2, 4, 10.

26. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

27°. $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 2$.

28. $a = 4$, $b = -1$.

29°. $a = -\frac{1}{2\sin 0{,}5} \approx -1{,}04$ (полагая $\sin 0{,}5 \approx 0{,}48$); $b=1$; $c=-\frac{1}{2}+2k\pi$ или $a=\frac{1}{2\sin 0{,}5}\approx 1{,}04$; $b=-1$; $c=\frac{1}{2}+(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2, \ldots)$, или ответы, получаемые из данных одновременным изменением знаков b и c.

33. $u = \sqrt{1 + (\lg \sin x)^2}$.

34. $v = \sin(1 + x)$.

35. 1) $y = v^3$, $v = \sin x$; 2) $y = \sqrt[3]{v}$, $v = u^2$, $u = x + 1$; 3) $y = \lg v$, $v = \operatorname{tg} x$; 4) $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 2x+1$; 5)° $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 3x + 1$.

36. 1) $-\frac{3}{8}$; 2) 0; 3) $\sin 12$; 4) $-\sin 2x \cos^2 2x$; 5) $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$; 6) 0; 7) $\sin(2 \sin 2x)$.

38. 1) $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; 3) $y = \sqrt{a^3 - x^3}$; 4) $y = \frac{C}{x}$; 5) $y = \frac{\log_2 5}{x}$; 6) $y = \frac{10000}{x} - 1$; 7) $y = \log_2(x^3 + 7) - \log_2(x^2 - 2) - x$; 8) $y = \operatorname{Arccos} \frac{x^2}{1+x}$.

***39.** Пусть $x > 0$ и $y > 0$, тогда $y + y - x - x = 0$; $y = x$ (график — биссектриса первого координатного угла). Пусть $x > 0$ и $y < 0$, тогда $y - y - x - x = 0$; $x = 0$ (график — отрицательная полуось Oy). Пусть $x < 0$ и $y > 0$, тогда $y + y - x + x = 0$; $y = 0$ (график — отрицательная полуось Ox). Пусть $x < 0$ и $y < 0$, тогда $y - y - x + x = 0$ — тождество (график — множество всех внутренних точек третьего координатного угла).

41.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

42.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	4	0	2	2	3	0	4	0	4

43. Если $f(x)$ — масса отрезка AM, то $f(x) = 2x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{2}(x - 1)$ при $1 < x \leqslant 3$, $f(x) = x + 2$ при $3 < x \leqslant 4$. Функция определена при $0 \leqslant x \leqslant 4$.

45. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

47. 1) $x > 0$; 2) $x > -3$; 3) $x \leqslant \frac{5}{2}$; 4) $-\infty < x \leqslant 0$; 5) вся числовая ось, кроме точек $x = \pm 1$; 6) вся числовая ось; 7) не определена только при $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 8) вся числовая ось, кроме точек $x = 1$ и $x = 2$; 9) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 10) $-\infty < x < 0$ и $4 < x < +\infty$; 11) $-\infty < x \leqslant 1$ и $3 \leqslant x < +\infty$; в интервале $(1, 3)$ функция не определена; 12) $-\infty < x < 1$ и $2 < x < +\infty$; на отрезке $[1, 2]$ функция не определена; 13) $-4 \leqslant x \leqslant 4$; 14) $1 \leqslant x \leqslant 3$;

15) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$; 17) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; 18) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 19)° $-\infty < x < 0$; 20) не имеет смысла; 21) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 22) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, где k — целое число; 23) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, где k — целое число; 24) $0 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

48. 1) $-2 \leqslant x < 0$ и $0 < x < 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $1 \leqslant x < 4$; 4) $\frac{3}{2} < x < 2$ и $2 < x < +\infty$; 5) область определения состоит только из одной точки $x = 1$; 6) $-1 < x < 0$ и $1 < x < 2$; $2 < x < +\infty$; 7) $3 - 2\pi < 3 - \pi$ и $3 < x \leqslant 4$; 8)° $-4 \leqslant x \leqslant -\pi$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 9) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, где k — целое число; 10) $4 < x < 5$ и $6 < x < +\infty$; 11) нигде не определена; 12) $-1 < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < 3$; 13) вся числовая ось; 14) $4 \leqslant x \leqslant 6$; 15) $2 < x < 3$.

49. 1) Да; 2) тождественны на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$; 3) тождественны на полуинтервале $[0, +\infty)$; 4) тождественны на интервале $(0, +\infty)$.

50. 1) Например, $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) например, $y = \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$; 3) например, $y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$.

51. 1) $1 < x \leqslant 3$; 2)° $0 \leqslant x < +\infty$ для двух ветвей и $1 \leqslant x < +\infty$ для двух других ветвей.

52. $-\infty < x < +\infty$.

53. 1) $y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$; $y = 0$ при $x = 2$; 2) $y > 0$ при $x < 2$ и $x > 3$; $y < 0$ при $2 < x < 3$; $y = 0$ при $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$; 3) $y > 0$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, функция корней не имеет; 4) $y > 0$ в интервалах $(0, 1)$, $(2, +\infty)$; $y < 0$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$; $y = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 5) $y > 0$ при $x \neq 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15)° четные, 5), 6), 9), 12), 14), 17) нечетные; 2), 4), 7), 13), 16) ни четные, ни нечетные.

55. 1) $y = (x^2 + 2) + 3x$; 2) $y = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)$; 3) $y = (\sin 2x + \operatorname{tg} x) + \cos \frac{x}{2}$.

57. 1) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2} + \frac{a^x - a^{-x}}{2}$;

2) $y = \frac{(1+x)^{100} + (1-x)^{100}}{2} + \frac{(1+x)^{100} - (1-x)^{100}}{2}$.

59. Функции 1), 5), 6), 8).

60. Графики см. на рис. 16.3 и 16.4.

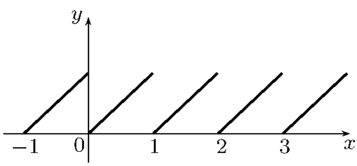

Рис. 16.3

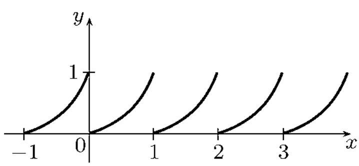

Рис. 16.4

61. 1) В интервале $(-\infty, 0)$ убывает, в интервале $(0, +\infty)$ возрастает; 2) в интервале $(-\infty, 0)$ убывает, в интервале $(0, +\infty)$ сохраняет постоянное значение — нуль.

62. 1) Наибольшее 1; наименьшее 0; 2) наибольшее 1, наименьшее -1; 3) наибольшее 2, наименьшее 0; 4) наибольшего значения не имеет, наименьшее 1.

76. $x = 3$; при графическом решении ищется точка пересечения графика функции $y = \varphi(x)$ и прямой $y = 2x - 4$.

78. Следует обратить внимание на то, что из всегда справедливого соотношения $|f(x) + \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)|$ в условии задачи исключен знак равенства. Строгое неравенство будет иметь место при $x < 3$ и $x > 4$. Можно решить задачу путем построения графиков функций $\Phi(x) = |f(x) + \varphi(x)|$ и $\psi(x) = |f(x)| + |\varphi(x)|$.

82°.

$$y = \begin{cases} 0 & \text{на интервале } (-\infty, -3), \\ -\frac{5}{9}x^2 + 5 & \text{на отрезке } [-3, 3], \\ \frac{2}{3}x - 2 & \text{на отрезке } [3, 6]. \end{cases}$$

105. $x_1 = -3$, $x_2 = 8$. При графическом решении ищется точка пересечения графика функции $y = \varphi(x)$ и параболы $y^2 = 7x + 25$.

106. Если $b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$, то функция определена на всей числовой оси, кроме интервала $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. При $b^2 - 4ac > 0$ и $a < 0$ функция определена только при $x_1 < x < x_2$. Если $b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$, то функция определена на всей числовой оси. Если $b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$, то функция нигде не определена. Наконец, при $b^2 - 4ac = 0$ функция будет определена на всей числовой оси, кроме одной ее точки $x = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$, и нигде не определена, если $a < 0$.

107°. $f(x + 1) = 2x^2 + 5x + 3$.

***108.** Пусть $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c} = m$, где m — произвольное действительное число; тогда $(m - 1)x^2 + 2(2m - 1)x + c(3m - 1) = 0$. Аргумент x должен быть действительным числом, следовательно, $(2m - 1)^2 - (m - 1)(3mc - c) \geqslant 0$, или $(4 - 3c)m^2 + 4(c - 1)m - (c - 1) \geqslant 0$; но так как m — действительное число, то это неравенство в свою очередь справедливо лишь при условии, что $4 - 3c > 0$, $4(c - 1)^2 + (4 - 3c)(c - 1) \leqslant 0$; отсюда $0 \leqslant c \leqslant 1$, но по условию $c \neq 0$, следовательно, $0 < c \leqslant 1$.

117. 1) $y = x$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{1-x}{3}$; 4) $y = \pm\sqrt{x - 1}$; 5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{x-1}{x}$; 7) $y = 1 \pm \sqrt{x + 1}$; 8) $y = \pm\sqrt{x^3 - 1}$; 9) $y = \lg \frac{x}{10}$; 10) $y = -2 + 10^{x-1}$; 11) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 12) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$; 13) $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{2-x}$; 14) $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$; 15) $y = \frac{1+\arcsin \frac{x-1}{2}}{1-\arcsin \frac{x-1}{2}}$; 16) $y = \pm\cos \frac{x}{4}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

119. $d = -a$.

122°. $1 < x \leqslant 3$; $y = 1 + 2^{1-x^2}$.

123. $y = \arcsin \sqrt[3]{x - x^2 - 2}$.

128. Если $y_1 = x^n$, $y_2 = \sqrt[n]{x}$, то при $n > 1$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 > y_2$; при $0 < n < 1$ для $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 < y_2$; при $-1 < n < 0$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 > y_2$, при $n < -1$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 < y_2$.

135. $n = 15$.

136. Исходя из определения гиперболических функций, можно доказать, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Периодическими эти функции не являются.

141°. График функции симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная. $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

146°. Область определения $(0, \pi)$. Площадь будет наибольшей при $x = \frac{\pi}{2}$.

155. 1) Период $\frac{\pi}{2}$. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция может быть представлена так: $y = \sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$, $y = -\sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$, $y = -\sin(x) - \cos(x)$ на отрезке $[\pi, 3\pi/2]$, $y = -\sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$. 2) Период 2π. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция может быть представлена так: $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$ на полуинтервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $y = -\operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $y = 0$ на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

156. 1) Область определения состоит из бесчисленного множества интервалов вида $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$; ни четная и ни нечетная; периодическая, период 2π. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ синус возрастает от 0 до 1, следовательно, $\lg \sin x$, оставаясь отрицательным, возрастает до 0. В интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ синус убывает от 1 до 0, следовательно, убывает и $\lg \sin x$. В интервале $(\pi, 2\pi)$ синус имеет отрицательные значения, следовательно, функция $\lg \sin x$ не определена. 2) Область определения состоит из отдельных точек вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В этих точках $y = 0$. График состоит из отдельных точек оси абсцисс. 3) Функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

161.

1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$;	6) $-\infty < x < 0$;
2) $0 \leqslant x \leqslant 1$;	7) $0 \leqslant x < +\infty$;
3)° $0 \leqslant x \leqslant 1$;	8) $-\infty < x \leqslant 0$;
4) $-1 \leqslant x \leqslant 0$;	9) $-\infty < x < 1$;
5) $0 < x < +\infty$;	10) $1 < x < +\infty$.

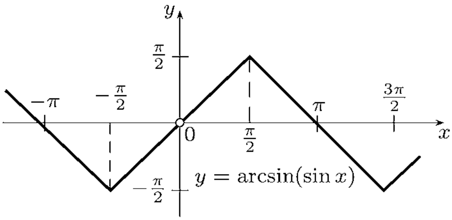

Рис. 16.5

163. Период 2π. График см. на рис. 16.5.

Указание. На интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем $y = \arcsin(\sin x) \equiv$ $\equiv x$ по определению функции $\arcsin x$. Для получения графика функции на интервале $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ полагаем $z = x - \pi$, тогда $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$, $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin\sin(z+\pi) = -\arcsin(\sin z) =$ $= -z$; $y = \pi - x$ и т. д.

К ГЛАВЕ 2

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n \geqslant 4$.

177°. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

178. $n = 19999$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, $n \geqslant 1000$. Величина v_n бывает то больше своего предела, то меньше, то равна ему (последнее при $n = 2k+1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$).

180°. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \geqslant 14$; $n \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

181. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, если $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n = 0$, если $\varepsilon > \frac{5}{6}$.

182. $n \geqslant \frac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+e)}}$; последовательность u_n убывающая.

183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n достигает своего предела при $n = m+1$, так как, начиная с этого значения n, $v_n = 0$.

185. 0.

186. 1) Нет. 2) Да.

189. При $a = 0$ этот предел может равняться любому числу или не существовать.

190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$.

191°. $\delta < 2 - \sqrt{3}$.

192. $\delta < \frac{2}{13}$.

193°. $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}133$.

194. $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, если $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, если $\varepsilon > 1$.

195°. $N \geqslant \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3}$, если $\varepsilon \leqslant \frac{4}{3}$; $N = 0$, если $\varepsilon > \frac{4}{3}$.

196. $n > \frac{N-1}{2}$.

197. u_n — положительная бесконечно большая величина, если разность прогрессии $d > 0$, и отрицательная, если $d < 0$. Для геометрической прогрессии утверждение справедливо только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине больше 1.

198°. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$.

199. $\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}$.

200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} = 0{,}01$.

201. $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M \geqslant 10^N = 10^{100}$.

203. $\sin x$, $\cos x$ и все обратные тригонометрические функции.

205°. Нет. Да.

206. Нет.

207. 1) Например, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и $x_n = 2\pi n$. 2) Нет.

209. Если $a > 1$, то функция при $x \to +\infty$ не ограничена (но не бесконечно большая); при $x \to -\infty$ она стремится к нулю. Если $0 < a < 1$, то функция при $x \to -\infty$ не ограничена (но не бесконечно большая); при $x \to +\infty$ она стремится к нулю. При $a = 1$ функция ограничена на всей числовой оси.

210. 1)°, 3) и 5) нет; 2) и 4) да.

213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$.

214°. $N \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$.

215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

***216.** Сравнить u_n с суммой членов геометрической прогрессии $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ..., $\frac{1}{3^n}$, ...

220°. 3.

221. Да.

222. $f(x) = 9\pi$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$; $f(x) = 4\pi$ при $5 < x \leqslant 10$; $f(x) = \pi$ при $10 < x \leqslant 15$. Функция разрывна при $x = 5$ и при $x = 10$.

223. $a = 1$.

224°. $A = -1$, $B = 1$.

225. $x = 2$; $x = -2$.

226. $\frac{2}{3}$.

227. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв, $y = \frac{\cos x}{x}$ — разрыв второго рода (бесконечный).

228. Функция разрывна при $x = 0$.

229°. Функция имеет три точки разрыва. При $x = 0$ разрыв устранимый, при $x = \pm 1$ разрыв второго рода (бесконечный).

230. Нет. Если $x \to 0$ справа, то $f(x) \to \frac{\pi}{2}$, если $x \to 0$ слева, то $f(x) \to -\frac{\pi}{2}$.

231. Функция разрывна при $x = 0$.

232. 0.

234. Нет. Если $x \to 1$ справа, то $y \to 1$; если $x \to 1$ слева, то $y \to 0$.

235. Если $x \to 0$ справа, то $y \to 1$; если $x \to 0$ слева, то $y \to -1$.

236°. Функция разрывна при $x = 0$ (разрыв первого рода).

237. Функция имеет разрывы первого рода в точках $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

238. При $x = 0$ функция непрерывна, при $x \neq 0$ функция разрывна.

239. Все три функции разрывны, когда x равен целому числу (положительному или отрицательному) или нулю.

***241.** Записать многочлен в виде $x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$ и исследовать его поведение при $x \to \pm\infty$.

***244.** Построить схематично график функции $y = \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3}$, исследовав ее поведение в окрестности точек λ_1, λ_2 и λ_3.

245. 1.

246. $\frac{1}{2}$.

247°. 3.

248. ∞.

249. 0.

250. 0.

251. $\frac{15}{17}$.

252. 1.

253. 0.

254. 4.

255. 1.

256°. 0.

257°. 0.

258. 0.

259. 1.

260. $\frac{4}{3}$.

261. $\frac{1}{2}$.

262°. $-\frac{1}{2}$.

263. -1.

***264.** 1. Заметить, что $\frac{1}{(n-1)^n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

265. $\frac{1}{2}$.

266. 1.

267. 0.

268. 9.

269. $\frac{3}{4}$.

270. ∞.

271°. 0.

272. 0.

273°. $-\frac{2}{5}$.

274. $\frac{1}{2}$.
275. 6.
276. ∞.
277. -1.
278. ∞.
279. 0.
280°. $\frac{m}{n}$.
281. 0.
282. ∞.
283. $\frac{1}{2}$.
284. -1.
285°. 0.
286. $\frac{1}{4}$.
287. $-\frac{1}{2}$.
288. 100.
289. -1.
290. 1.
291°. ∞.
292. 0.
293. 0.
294. ∞.
295°. 4.
296. $\frac{1}{4}$.
297. 3.
298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, если $x > 0$; ∞, если $x = 0$.
299. $\frac{1}{3}$.
300. $\frac{2}{3}$.
301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.
302. $\frac{m}{n}$.
* **303.** $\frac{1}{2}$. К числителю прибавить и отнять единицу.
304. $-\frac{1}{4}$.
305°. Один корень стремится к $-\frac{c}{b}$, другой — к ∞.
306. 0.
307. 0.
308. 0, если $x \to +\infty$; ∞, если $x \to -\infty$.
309°. $\frac{1}{2}$, если $x \to +\infty$; $-\infty$, если $x \to -\infty$.
310. $\frac{a+b}{2}$, если $x \to +\infty$; ∞, если $x \to -\infty$.
311. $\pm\frac{5}{2}$.
312. 0.
313. 1.
314. 3.
315. k.

316°. $\frac{\alpha}{\beta}$.
317. $\frac{2}{5}$.
318. 0, если $n > m$; 1, если $n = m$; ∞, если $n < m$.
319. $\frac{2}{3}$.
320. $\frac{1}{3}$.
321°. $\frac{1}{2}$.
322. $\frac{3}{4}$.
323. ∞.
324. -1.
325. $\frac{1}{2}$.
326. ∞.
327. 0.
328. $\frac{1}{2}$.
329°. ∞.
330. $-\frac{3}{2}$.
331. 1.
332. $\frac{\pi}{2}$.
333. $\frac{2}{\pi}$.
334. $-\frac{a}{\pi}$.
335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
336°. 2.
337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
338. -2.
339. $-2\sin a$.
340. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.
341. $\cos^3 \alpha$.
342. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$.
343°. $-\sin a$.
344. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$
345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
346. 1.
347. 6.
348°. $\frac{3}{2}$.
349. -1.
* **350.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Положить $\arccos x = y$.
351. $\frac{1}{e}$.
352. $\frac{1}{e}$.
353. 1.
354. e^{mk}.
355°. e^6.
356. $e^{-\frac{2}{3}}$.

357. e^2.

358. 0, если $x \to +\infty$; ∞, если $x \to -\infty$.

359°. ∞, если $x \to +\infty$; 0, если $x \to -\infty$.

360. 1.

361. ∞, если $x \to +\infty$; 0, если $x \to -\infty$.

362. e^2.

363. e.

364. $\sqrt{e}$.

365. k.

366. $\frac{1}{a}$.

367. a.

368. $\frac{1}{e}$.

369. $\ln a$.

370. $\frac{2}{3}$.

371. e.

* **372.** $\frac{3}{2}$; к числителю прибавить и отнять единицу.

373°. 2.

374. 1.

375. $a - b$.

376. 1.

377. 0, если $x \to +\infty$; ∞, если $x \to -\infty$.

378°. 1, если $x \to +\infty$; -1, если $x \to -\infty$.

379. 1) a^n; 2) 0, если $A \neq 0$, a^n, если $A = 0$ и $a \neq 0$, и ∞, если $A = a = 0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380°. 0, если $x \to +\infty$; $-\infty$, если $x \to -\infty$.

381. При $a > 1$ предел равен 1, если $x \to +\infty$, и 0, если $x \to -\infty$. При $a < 1$ предел равен 0, если $x \to +\infty$, и 1, если $x \to -\infty$. При $a = 1$ предел равен $\frac{1}{2}$.

382. При $a > 1$ предел равен 1, если $x \to +\infty$, и -1, если $x \to -\infty$. При $a < 1$ — наоборот. При $a = 1$ предел равен 0.

383. 0.

384. 0.

385°. 1.

386. 0.

387°. $-\cos a$.

388. $\frac{1}{12}$.

389°. $\frac{1}{8}$.

* **390.** $\frac{\sin x}{x}$. Умножить и разделить на $\sin \frac{x}{2^n}$.

391. $\frac{1}{2}$.

392°. 0.

* **393.** $-\frac{1}{2}$. Воспользоваться формулой $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+ab}$.

394. $\frac{1}{2}$.

* **395.** $\frac{1}{2}$. Заменить $\arcsin x$ на $\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и воспользоваться указанием к задаче 393.

396. ∞, если $n < 1$; e, если $n = 1$; 1, если $n > 1$.

* **397.** 1. Взять вместо $\cos x$ выражение $1 - (1 - \cos x)$.

398. $-\frac{1}{2}$.

399. $\frac{1}{e}$.

400°. e.

401. e^{ab}.

402. v_n высшего порядка малости.

403. u_n и v_n — эквивалентные бесконечно малые.

405. Одного порядка.

406. При $x = 0$ порядок малости различен. При $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ величины Δy и Δx эквивалентны.

407. Нет.

408°. Третьего порядка.

409. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 10.

410°. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$.

411. $a = k$.

412. Нет.

414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) эквивалентная x бесконечно малая; 5) эквивалентная x бесконечно малая; 6) 1; 7) эквивалентная x бесконечно малая; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) $\frac{2}{3}$; 12) 2.

415°. $a^2\sqrt{3}$.

416. $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. Из того, что ломаная линия стремится к прямой (в смысле сближения их точек), не следует, что длина ломаной стремится к длине отрезка.

419°. a.

420. a, $\frac{\pi a}{2}$.

421. $2\pi(R + r)$.

422. И отрезок и угол имеют порядок $\frac{1}{2}$.

425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.

426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04.

427. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}01$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$.

К ГЛАВЕ 3

428. 1) 5; 2) 4.

429. 1) $v = 0{,}25$ м/с; 2) $v = 0{,}55$ м/с; 3) $\frac{t_1+t_2}{1200}$ м/с.

430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05.

431°. 53,9 м/с; 49,49 м/с; 49,25 м/с; 49,005 м/с; $v_5 = 49{,}0$ м/с; $v_{10} = 98{,}0$ м/с; $v = 9{,}8t$ м/с.

432. 1) 4 г/см; 2) 40 г/см; 3) $4l$ г/см, где l — длина отрезка AM.

433. 1) 95 г/см; 2) 35 г/см; 3) 5 г/см; 4) 185 г/см.

434. 1) 4195 *Дж*/кг $\cdot$ *К*; 2) 4241 *Дж*/кг $\cdot$ *К*.

* **435.** Ввести среднюю угловую скорость, затем путем перехода к пределу получить искомую величину.

438. $k = \frac{f'(t)}{f(t)}$, где k — коэффициент линейного расширения.

439. $k = S\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$.

440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.

441. 1) 4,52; 2) $-0{,}249$; 3)° 0,245.

442. 1) 6,5; 2) 6,1; 3) 6,01; 4) 6,001.

443.° $f'(5) = 10$; $f'(-2) = -4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$.

444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.

445. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

446. Для функции $f(x) = x^3$ не будет.

447. 1.

448. 0,4343.

449. 2,303.

454. 1) 0; 2) 6; 3) -4; 4) $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.

455. $(1, 1)$; $(-1, -1)$.

456. 1) $(0, 0)$; 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

457. Не может.

458.° $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{13}$.

459. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

460. $\operatorname{arctg} 3$.

461.° $y = 12x - 16$; $x + 12y - 98 = 0$; подкасательная равна $\frac{2}{3}$, поднормаль равна 96.

462. При $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

463. 1) $(2, 4)$; 2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; 3) $(-1, 1)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

466. 1) $6x - 5$; 2) $4x^3 - x^2 + 5x - 0{,}3$; 3) $2ax + b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5)° $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0{,}2}{\sqrt[4]{y^3}} - 10y^2 - \frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n} - \frac{n}{x^2} + \frac{2x}{m^2} - \frac{2m^2}{x^3}$; 8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x} + \frac{7}{6}n\sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mz+n}{p+q}$; 10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}} + 7{,}28t^{-2{,}4} - \frac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x-1$; 12) $3{,}5x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2 + 2v - 1$; 14) $6(a - x)$; 15) $\frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$.

467. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$; $f(4) = 8$, $f'(4) = 2{,}5$; $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$, $f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}$.

468. $f(-1) = -5$; $f'(-1) = -8$; $f'(2) = \frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right) = 3a^4 + 10a^3 - a^2$.

469. 13.

471. 1) $4x^3-3x^2-8x+9$; 2) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$; 3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{x}}-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[6]{27x^2}\right)$; 5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+$ $+\frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $2x(3x^4-28x^2+49)$; 7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.

472. $-\frac{2}{(x-1)^2}$.

473. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

474. $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$.

475. $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$.

476. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

477°. $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$.

478. $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$.

479. $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$.

480. $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$.

481. $\frac{2v-1}{a^2-3}$.

482. $-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$.

483. $-\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$.

484. $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$.

485. $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$.

486. $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$.

487. $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$.

488. $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$.

489. $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

490. $f'(0)=0$, $f'(1)=6$.

491. $F'(0)=11$, $F'(1)=2$, $F'(2)=-1$.

492. $F'(0)=-\frac{1}{4}$, $F'(-1)=\frac{1}{2}$.

493. $s'(0)=\frac{3}{25}$, $s'(2)=\frac{17}{15}$.

494. $y'(1)=16$, $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^2}-1$.

495. $\rho'(2)=\frac{5}{9}$, $\rho'(0)=1$.

496. $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$.

497. $z'(0)=1$.

498. 1) $4x^3-3x^2(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-$ $-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x(x^2+1)^3$; 3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x(1-x^9)^2$; 6) $5(15x^2+2x)(5x^3+x^2-4)^4$; 7) $6(3x^2-1)(x^3-x)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; 10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$; 12) $24(x^2+x+1)(2x^3+3x^2+6x+1)^3$.

499. $\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

500. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$.

501. $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$.

502°. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

503. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

504. $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$.

505. $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$.

506. $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$.

507. $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

508. $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

509. $\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$.

510. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

511. $\frac{x(x^2+2a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

512. $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$.

513°. $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$.

514. $u'(1)=9$.

515. $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

516. 0.

517. $\cos x-\sin x$.

518. $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

519. $\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$.

520. $\varphi\cos\varphi$.

521. $(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$.

522. $\frac{1}{1+\cos t}$.

523. $\frac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}4$.

524. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$.

525. $-\sin 2x$.

526. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$.

527. $-\sin^3 x$.

528. $\frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$.

529°. $\operatorname{tg}^4 x$.

530. $2x\frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

531. $-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$.

532. $3\cos 3x$.

533. $-\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}$.

534. $9\cos(3x+5)$.
535. $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$.
536. $\frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}\cdot\cos^2 x}$.
537. $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$.
538. $\cos(\sin x)\cos x$.
539. $-12\cos^2 4x\sin 4x$.
540. $\frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}$.
541. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.
542. $-\frac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.
543. $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$.
544. $\frac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$.
545. $\frac{\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.
546. $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.
548. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
549. $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$.
550. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
551°. $\arcsin x$.
552. $-\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.
553. $\sin x\operatorname{arctg}x+x\cos x\operatorname{arctg}x+\frac{x\sin x}{1+x^2}$.
554. $-\frac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
555. $\frac{\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.
556. 0.
557. $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
558. $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.
559. $\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.
560. $\frac{2x}{\operatorname{arctg}x}-\frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}$.
561. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.
562. $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}4$.
563. $\frac{2x}{1+x^4}$.
564. $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.
565°. $\frac{\cos x}{|\cos x|}$.
566. $-\frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

567. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

568. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

569. $\frac{x+1}{8\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$.

570. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$.

571. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$.

572. $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

573. $2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$.

574. $\frac{2\ln x}{x}$.

575. $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$.

576. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

577. $\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\ln 2$.

578. $\sin x\ln x + x\cos x\ln x + \sin x$.

579. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$.

580. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

581°. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

582. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$.

583. $x^{n-1}(n\ln x+1)$.

584. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

585. $-\frac{2}{1-2x}$.

586. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$.

587. $\operatorname{ctg} x$.

588. $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$.

589. $\frac{2}{\sin 2x}$.

590°. $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$.

591. $4\ln^3\sin x\operatorname{ctg} x$.

592. $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$.

593. $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\operatorname{ctg} x$.

594. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$.

595. $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

596. $\frac{6x^2\arcsin[\ln(a^3+x^3)]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$.

597°. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$.

598. $2^x\ln 2$.

599. $10^x\ln 10$.

600. $-\frac{\ln 3}{3^x}$.

601. $4^{-x}(1-x\ln 4)$.

602. $10^x(1+x\ln 10)$.

603. $e^x(1+x)$.
604. $\frac{1-x}{e^x}$.
605. $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$.
606. $e^x(\cos x-\sin x)$.
607. $\frac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$.
608. $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.
609°. $\frac{1-\ln 2}{2^{\ln x}}$.
610. $3x^2-e^x\ln 3$.
611. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.
612. $e^x(x^2+1)$.
613. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.
614. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$.
615. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
616°. $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$.
617. $-e^{-x}$.
618. $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.
619. $\frac{e^{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$.
620. $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$.
621. $3^{\sin x}\cos x\ln 3$.
622. $3\sin^2 x\cos x a^{\sin^3 x}\ln a$.
623. $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.
624. $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\ln 3$.
625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.
626. $\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.
627. $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cos 3x$.
628. $\frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.
629°. $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$.
630. $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.
631. $\frac{2}{a^2}xe^{-\frac{x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$.
632. $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\sin(\omega x+\alpha)]$.
633. $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$.
634. $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x$.
635. $\operatorname{th} x$.
636°. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.
637. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x)^2}$.
638. $2\operatorname{sh} 2x$.
639. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$.

640. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.
641. $e^{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{sh} 2x$.
642. $\frac{1}{x \operatorname{ch}^2(\ln x)}$.
643. $x \operatorname{ch} x$.
644. $\frac{3 \operatorname{th} x}{2 \operatorname{ch}^2 x \sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$.
645. $\frac{1}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2}}$.
646. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$.
647°. $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.
648. $\frac{x(4+\sqrt{x}) \operatorname{sh} 2x + 2(2x^2\sqrt{x}-1) \operatorname{ch} 2x}{2x^2}$.
649. $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x}[(3x+2)\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x]$.
650. $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$.
651°. $x^{x^x}\left(\ln^2 x + \ln + \frac{1}{x}\right)$.
652. $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right)$.
653. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x\right)$.
654. $2^x\sqrt{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$.
655. $x^2 e^{x^2} \sin 2x(3 + 2x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2x)$.
656. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.
657. $2x^{\ln x - 1} \ln x$.
658. $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.
659°. $\frac{1}{2}\sqrt{x \sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{1-e^x}\right)$.
660. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}[(\arcsin x)^2-1]}\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.
661. $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$.
662. $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.
663. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1}\right)$.
664. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x)$.
665. $(x^2+1)^{\sin x}\left[\frac{2x \sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1)\right]$.
666. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.
667. $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.
668. $\frac{a}{k \cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$.
669. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.
670. $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)}$.
671. $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$.
672°. $\frac{3}{2}\sin 2x(\cos x - 2)$.
673. $\sec^2 \frac{x}{5}$.

674. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.
675. $2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin 2x$.
676. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.
677. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[4]{(x^6-8)^2}}$.
678. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$.
679. $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$.
680. $-\frac{1}{1+x^2}$.
681. $2x^2e^{2x+3}$.
682. $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.
683. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$.
684. $-\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$.
685. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$.
686. $-\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^3}}$.
687°. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
688. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.
689. $\frac{\operatorname{tg}x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$.
690. $\frac{\cos 2x}{x}-2\sin 2x\ln x$.
691°. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$.
692. $\frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\sin^2 x}}$.
693. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$.
694. $\sin^5 3x\cos^3 3x$.
695. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
696. $-\frac{1}{2}\sin\frac{\arcsin x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
697°. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.
698. $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.
699. $\frac{\ln x-2}{x^2}\sin\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$.
700. $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$.
701. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.
702. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}$.
703°. $\arcsin(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.
704. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.
705. $-\frac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
706. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}08x\right)\left(\sin\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$.

707. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.
708. $-\frac{4}{\operatorname{tg}2x\sin^2 2x}$.
709°. $-\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$.
710. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
711. $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$.
712. $\frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.
713. $-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$.
714. $3x^2\operatorname{arctg}x^3+\frac{3x^5}{1+x^6}$.
715. $\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.
716. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
717. $\frac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}+\arcsin 4x\right)$.
718. $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$.
719. $\frac{1}{e^x-1}$.
720. $10^{x\operatorname{tg}x}\ln 10\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.
721°. $2\sin x(x\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2)$.
722. $\frac{2\sin x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.
723. $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.
724°. $\frac{x^2}{1-x^4}$.
725. $2^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$.
726. $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.
727. $-\frac{2(2\cos^2 x+1}{\sin^2 2x}$.
728. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.
729°. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.
730. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
731. $-\cos 2x$.
732°. $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.
733. $(a^2+1)\sin xe^{ax}$.
734. $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$.
735. $\frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg}e^{-2x})^2}$.
736. $10e^x\sin 3x$.
737°. $9x^2\arcsin x$.
738. $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$.
739. $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

740°. $\frac{(\cos x-\sin x)(e^x+e^{-x})}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$.

741. $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

742. $\frac{\sin(x-\cos x)(1+\sin x)}{\cos^2(x-\cos x)}$.

743. $e^x\sin x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x)$.

744. $\frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{\left(9+6\sqrt[5]{x^9}\right)^{10}}}$.

745. $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

746°. $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $\frac{e^{x^2}}{(e^x+e^{-x})^2}[2x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})]$.

748. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.

749. $\frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$.

750. $\frac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$.

751°. $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

752. $\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}+\operatorname{ctg} x$.

753. $\frac{(1+2x^2)\sin x+x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

754. $\frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

755. $\frac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$.

756°. $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

757. $\frac{1}{\cos^5 x}$.

758. $\frac{e^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}\left[1+x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}-\frac{5}{\ln x}\right]$.

759. $\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left[\frac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg} x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$.

760°. $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$.

761°. $(\arcsin x)^2$.

762. $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

763. $\frac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.

764. $\frac{1}{x^3+1}$.

765°. $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\frac{\ln\operatorname{tg} 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

767. $\frac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

768°. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$.

769. $-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, если n — четное число, и $-\frac{2nx^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, если n — нечетное число.

770. $\frac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$.

***774.** 1) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; 2) $\frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$.
Указание. Использовать значение суммы $x+x^2+\ldots+x^n$.

776°. $\sqrt{1-y^2}e^{-\arcsin y}$ и $\frac{\cos\ln x}{x}$.

777. $\frac{1}{3(s^2-1)}$.

779. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

780°. $\alpha'(x)=\frac{1}{x[1+\ln\alpha(x)]}$.

781. $(\operatorname{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\operatorname{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

782. $\frac{e^t}{1-t}$.

783°. $\frac{-(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$.

784. $\frac{1}{3y^2-4}$.

785. $\frac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg}t$.

789. $-\sqrt{2}$.

790. $-\frac{1}{a}$.

791°. $-\frac{1}{4}$.

792. $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

793. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

794°. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

795. $\frac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$.

796. $\frac{2a}{3(1-y^2)}$.

797. $\frac{y}{y-x}$.

798. $\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2-2x^2}{2yi^2-x^2}$.

799. $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

800°. $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}4$.

801. $2^{x-y}\frac{2y-1}{1-2x}$.

802. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

803. $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}4$.

804°. $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

805. $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

806. $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

807. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

808. $\frac{e^y}{2-y}$.

809. $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$.

810°. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$.

811. $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

812. $\frac{1+y^2}{y^2}$.

814. $(2,4)$.

816. $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; подкасательная равна $\frac{1}{2}$, поднормаль равна -8.

819. 1) $t_1=0$, $t_2=8$; 2) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$.

820°. 0,01815 *Дж*.

821. $\omega=13$ рад/с.

822. $\omega=2\pi$ рад/с.

823. $\omega(2at-b)$ рад/с; скорость обратится в нуль при $t=\frac{b}{2a}$ *с*.

824. 23 А.

825°. $(0,0)$; $(1,1)$; $(2,0)$.

827. $(1,0)$; $(-1,-4)$.

828. $y=2x-2$; $y=2x+2$.

829°. $3x+y+6=0$.

830. Касательная $y-y_0=(x-x_0)\cos x_0$; нормаль $y-y_0=-(x-x_0)\sec x_0$.

831. Касательная $x_0(y-y_0)=x-x_0$; нормаль $(y-y_0)+x_0(x-x_0)=0$.

832°. Касательная $x+2y=4a$; нормаль $y=2x-3a$.

833. Касательная $y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0)$; нормаль $y-y_0=-\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)$.

835°. Подкасательные равны соответственно $\frac{x}{3}$, $\frac{2x}{3}$ и $-2x$; поднормали равны соответственно $-3x^5$, $-\frac{3x^2}{2}$ и $\frac{x^2}{2}$.

836. $y=\frac{x_0}{2a}\left(x-\frac{x_0}{2}\right)$; $y-y_0=-\frac{2a}{x_0}(x-x_0)$.

837°. $2x-y+1=0$.

838. $27x-3y-79=0$.

839. $2x-y-1=0$.

840°. $4x-4y-21=0$.

842°. 3,75.

844°. $x+25y=0$; $x+y=0$.

845. $(0,1)$.

846°. $y=x$.

848. $x-y-3e^{-2}=0$.

849°. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

850. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

857. $2x-y+1=0$.

858. Если $y=f(x)$ — уравнение данной кривой, то уравнением искомого геометрического места будет $y=xf'(x)$.

1) Парабола $y^2=\frac{1}{2}px$; 2) прямая, параллельная оси Ox, $y=\frac{1}{\ln b}$; 3) кривая каппа $y\sqrt{a^2-x^2}+x^2=0$; 4)° окружность $x^2+y^2=a$.

859. 1) $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{18}{31}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

860. 1) $\operatorname{arctg}3$. 2) 45°.

861. 90°.

862°. 45° и 90°.

863°. $\operatorname{arctg} 3$.

864. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$.

865. При нечетном n касательная $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, нормаль $ax-by=$ $=a^2-b^2$. При четном n касательные $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}-2$, нормали $ax\pm+by=$ $=a^2-b^2$.

879. $\Delta y = 1,461$; $dy = 1,4$.

880. $\Delta y = 0,1012$; $dy = 0,1$; $\frac{dy}{\Delta y} = 0,9880$.

881. 4.

882°. -2.

883. $\Delta y = 1,91$; $dy = 1,9$; $\Delta y - dy = 0,01$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0,0052$.

884. $\Delta y = 0,1$; $dy = 0,1025$; $\Delta y - dy = -0,0025$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} =$ $= -0,025$.

885.

$\Delta x = 1$	0,1	0,01
$\Delta y = 18$	1,161	0,110601
$dy = 11$	1,1	0,11
$\Delta y - dy = 7,$	0,061	0,000601
$\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0,39$	0,0526	0,0055

886. $\Delta y \approx 1,3$; $dy \approx 1,1$; $\Delta y - dy \approx 0,2$; $\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \approx 0,15$.

887. 1)° $dy = 16$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 5,88\%$; 2) $dy = 8$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 3,03\%$; 3) $dy = 1,6$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 0,62\%$.

888. 1) $dy = 4,8\,\text{см}^2$; 2) $dy = 6,0\,\text{см}^2$; 3) $dy = 9,6\,\text{см}^2$.

889. 1) $\frac{0,125}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\frac{5\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\frac{4\,dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^5}$; 5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$; 6) $-\frac{dx}{3nx\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$; 8) $-\frac{p\ln q}{q^x}\,dx$; 9) $-\frac{0,2(m-n)}{x^{1,2}}\,dx$; 10) $-\frac{(m+n)\,dx}{2x\sqrt{x}}$; 11) $\left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$; 12) $-\frac{6x^2\,dx}{(x^3-1)^2}$; 13) $\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$; 14) $3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx$; 15) $\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx$; 16) $5^{\ln\operatorname{tg}x}\frac{2\ln 5}{\sin 2x}dx$; 17) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 18)° $-\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}$; 19) $\frac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}\,dx$; 20) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)dx$; 21) $\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$; 22) $\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot\ln 3+9x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

890. 1) $-0,0059$; 2) $-0,0075$; 3) 0,0086; 4) 0; 5) 0,00287.

891. $\Delta y \approx 0,00025$; $\sin 30^\circ 1' \approx 0,50025$.

892°. 0,00582.

893. $-0,0693$.

894. $d\rho = -\frac{k\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$.

895. 0,3466.

896. $\sin 60^\circ 03' = 0,8665$; $\sin 60^\circ 18' = 0,8686$.

899. 0,995.

900°**.** $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$; $\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx 0{,}770$.

901. 0,355.

902. 0,52164.

903°**.** 1) Изменение длины нити: $2s = \frac{8f}{3l}\,df$; 2) изменение стрелки провеса: $df = \frac{3l}{4f}\,ds$.

904. Погрешность при определении угла по его синусу: $\Delta x_S = \operatorname{tg} x \Delta y$; погрешность при определении угла по его тангенсу: $\Delta x_T = \frac{1}{2}\sin 2x \Delta z$ (где Δy, Δz — погрешности, с которыми даны величины y и z); $\frac{\Delta x_S}{\Delta x_T} = \frac{1}{\cos^2 x}$; точность определения угла по логарифму его тангенса выше, чем при определении по логарифму его синуса.

905. 0,3 %.

906. 1) $dy = \frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)\,dt}{d\sqrt[3]{[(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)]^2}}$; 2) $ds = -\frac{t}{2}\sin\frac{t^2-1}{2}\,dt$; 3) $dz = -ds$; 4) $dv = \frac{2\ln 3}{3^{1/\ln \operatorname{tg} s}\ln^2 \operatorname{tg} s \sin 2s}\,\frac{ds}{\sin 2s}$; 5) $ds = \frac{(4u-3)\,du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 6)$^\circ$ $dy = -\frac{2ds}{\cos 2s}$.

908. Непрерывна и дифференцируема.

909. $f(x)$ непрерывна всюду, кроме точек $x = 0$ и $x = 2$; $f'(x)$ существует и непрерывна всюду, кроме точек $x = 0$, 1, 2, где она не существует.

910. При $x = k\pi$, где k — произвольное целое число.

911. Непрерывна, но недифференцируема.

912°**.** $f'(0) = 0$.

913. Непрерывна, но недифференцируема.

914. Δy и Δx — величины различных порядков малости.

915°**.** Непрерывна, но недифференцируема.

916°**.** Да; нет.

917. a.

918. $a\omega e^{a\varphi}$.

919°**.** Абсцисса изменяется со скоростью $v_x = -2r\omega\sin 2\varphi$; ордината изменяется со скоростью $v_y = -2r\omega\cos 2\varphi$.

920. Скорость изменения абсциссы $v_x = v(1+\cos\varphi)$; скорость изменения ординаты $v_y = v\sin\varphi$ (φ — угол между осью ординат и полярным радиусом точки).

921°**.** $-\frac{p\ln 2}{5540} \approx -0{,}000125p$.

922. 2 ед./с в точке $(3, 6)$ и -2 ед./с в точке $(3, -6)$.

923. 2 см/с в точке $(3, 4)$ и -2 см/с в точке $(-3, 4)$.

924°**.** В точках $\left(3, \frac{16}{3}\right)$ и $\left(-3, -\frac{16}{3}\right)$.

925. $4v$ и $2av$.

926. $2\pi v$ и $2\pi r v$.

927°**.** $4\pi r^2 v$ и $8\pi r v$.

928. При $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и при $x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$.

929. При $x = 2\pi k$.

930°. В $1/n^2$ раз.

932. 1) Да; 2) нет.

934. 1) $x^2 - 18x + 9y = 0$; 2) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$; 3) $y^3 = (x-1)^2$; 4) $x = \operatorname{Arccos}(1-y) \mp \sqrt{2y - y^2}$; 5) $y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$.

935. 1)° $t = (2k+1)\pi$; 2) $t = 1$; 3) $t = \frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

936. $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi$.

937°. $-\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$.

938. $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$.

939. $\frac{3t^2-1}{2t}4$.

940. -1.

941°. $\frac{t}{2}$.

942. $\frac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$.

943. $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.

944. $\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$.

945°. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

946. $-\frac{4}{3}$.

947. 0 и $\frac{1}{3}$.

948. Не существует.

949. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

950. 1) $t = \frac{\pi}{2} - \alpha$; 2)° $t = \pi - \alpha$; 3) $t = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3}$, где α — угол, образованный касательной с осью Ox.

956. 1)° Кривые пересекаются в двух точках под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{41}{2} \approx 87^\circ 12'$; 2) кривые пересекаются в трех точках под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$ и $\alpha_3 = 0^\circ$.

958. Длина касательной $T = \left|\frac{y}{\sin\frac{3}{2}t}\right|$; длина нормали $N = \left|\frac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$; длина подкасательной $S_T = \left|y \operatorname{ctg}\frac{3}{2}t\right|$; длина поднормали $S_N = \left|y \operatorname{tg}\frac{3}{2}t\right|$.

959°. $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $|y \operatorname{tg} t|$ и $|y \operatorname{ctg} t|$.

960°. $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $|y \operatorname{ctg} t|$ и $|y \operatorname{tg} t|$.

963. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$.

964. $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$.

965. $y = 2$, $x = 1$.

966. 1)° $4x + 3y - 12a = 0$; $3x - 4y + 6a = 0$; 2) $x + y = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; $y - x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $y = 1 + x\ln a$.

969. $\rho = 2a\cos t$.

970°. $\theta = \varphi$, $\alpha = 2\varphi$.

974. 3, -3.

975. 1) 0; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$.

977°. $\frac{f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t)} = \operatorname{tg}\theta$.

978. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}bt^2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\varphi$.

979. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)$; тангенс угла между касательной и полярным радиусом равен $\frac{2ab}{(b^2-a^2)\sin 2t}$.

980°. Полярная подкасательная $S_T = \frac{\rho^2}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)}$; полярная поднормаль $S_N = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

983°. $\frac{\rho}{\ln a}$.

984°. $\rho\ln a$.

985. $\sqrt{1+a^2}$.

986. $\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r}{y}$.

987°. $\frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$.

988. $\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx$ или $\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{y}\,dx$.

989. $\sqrt{1+\frac{4}{9ax}}$.

990°. $\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$.

991. $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y$.

992. r.

993°. $2a\sin\frac{t}{2}$.

994. $3a\cos t\sin t\,dt$.

995. $a\sqrt{1+t^2}\,dt$.

996°. $4a\sin\frac{t}{2}\,dt$.

997. $a\operatorname{ctg} t\,dt$.

998°. at.

999. $a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$.

1000°. $\frac{3}{2}$ м/мин; вектор скорости направлен вертикально вниз.

1001. $10\sqrt{26} \approx 51$ км/ч; вектор скорости параллелен гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого горизонтален и равен 50 км, а другой вертикален и равен 10 км.

1002. 14,63 км/ч.

1006. 2.

1007. $-24x$.

1008. 207360.

1009°. 360.

1010. $6(5x^4+6x^2+1)$.

1011°. $4\sin 2x$.

1012. $\frac{4}{e}$.

1013. $-\frac{1}{2}$.

1014. $\frac{5!}{(1-x)^6}$.

1015°. $\frac{6}{x}$.

1016. $\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$.
1017. $16a\sin 2\varphi$.
1018°. $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.
1019. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$.
1020. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.
1021°. $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$.
1022. $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.
1023. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
1024. $\frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$.
1025°. $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.
1026. $-\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.
1027°. $\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$.
1028. $x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]$.
1029. $a^n e^{ax}$.
1030. $(-1)^n e^{-x}$.
1031°. $a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)$.
1032. $2^{n-1}\sin\left[2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right]$.
1033°. $e^x(x+n)$.
1034. $\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.
1035. $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.
1036°. $\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$.
1037. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}$.
1038°. $(-1)^n\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.
1039. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.
1040°. $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.
1054. $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$.
1056. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$.
1057°. $-\frac{3r^2x}{y^5}$.
1058. $-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.
1059. $\frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$.
1060. $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.
1061. $-\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$.
1062. $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

1063°. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$.

1064. $\frac{1}{e^2}$.

1065°. $-\frac{p^2}{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}$.

1069. $-\frac{2a}{9b^2t^4}$.

1070. $-\frac{a^2}{y^3} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$.

1071°. $-\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$.

1072. $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$.

1073. 1) $\frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$; 2) 0, так как $x + y = a$.

1074. 1) $4t^2$; 2)° $-\frac{2}{1-t^2}$.

1075. $\frac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$.

1080. 16 м/с^2.

1081. $v = 2t - 4$, $a = 2$.

1082. $-\frac{\pi^2}{18}$ см/с^2.

1084. $-0{,}0015$ м/с^2.

1085°. $-\frac{1}{8}$ м/с^2.

1088. 1)° $(x^2 - 379)\sin x - 40x\cos x$; 2) $e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$;

$$3)\quad \alpha^n x^3 \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3n\alpha^{n-1}x^2 \sin\left[ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right] + \\ + 3n(n-1)\alpha^{n-2}x\sin\left[\alpha x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right] + \\ + n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}\cdot\sin\left[\alpha x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right].$$

1093. $y^{(2n)}(0) = 0$; $y^{(2n+1)}(0) = [1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)]^2$.

1095°. $y^{(2n-1)}(0) = 0$; $y^{(2n)}(0) = 2\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)]^2$.

1096. $-\frac{2\,dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$.

1097. $m(m-1)(m-2)x^{m-3}\,dx^3$.

1098. $4(x+1)(5x^2 - 2x - 1)\,dx^2$.

1099. $4^{-x^2}\cdot 2\ln 4\cdot(2x^2\ln 4 - 1)\,dx^2$.

1100°. $\frac{ab(a^2-b^2)\sin 2x\,dx^2}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$.

1101. $\frac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}\,dx^2$.

1102. $-4\sin 2x\,dx^3$.

1103°. $\pm\frac{3a\sec^2\varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}(1 + 5\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi^2$.

1104. $\frac{a^{\frac{2}{3}}\,dx^2}{3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$.

1105. 1) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1}\,d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}\,dx^2$; 2) $d^2y = -4\sec^2 2t\,dt^2$.

1106°. 1) $d^2y = \cos z d^2z - \sin z\, dz^2$;
2) $d^2y = a^x \cos(a^x) \ln a d^2x - a^x \ln^2 a(a^x \sin a^x - \cos a^x)\, dx^2$;
3) $d^2y = a^{t^3} \ln a \left[\cos a^{t^3}(6t + 9t^4 \ln a) - a^{t^3} \sin a^{t^3} \cdot 9t^4 \ln a\right] dt^2$.

К ГЛАВЕ 4

1110. 1) Точка максимума; 2) убывает; 3) возрастает; 4) точка минимума; 5) точка максимума; 6) точка минимума; 7) точка минимума; 8) точка максимума; 9) точка минимума.

1112. В точке $x_1 = 0$ возрастает, в точке $x_2 = 1$ убывает, в точке $x_3 = -\pi/2$ возрастает и в точке $x_4 = 2$ убывает.

1113°. Убывает в точке $x_1 = 1/2$, возрастает в точках $x_2 = 2$ и $x_3 = e$; $x_4 = 1$ — точка минимума.

1114. Возрастает в точке $x_1=1$, убывает в точке $x_2=-1$; $x_3 = 0$ — точка минимума.

1115. Убывает в точке $x_1 = 1/2$, возрастает в точке $x_2 = -1/2$; $x_3 = 0$ — точка максимума.

1125°. Три корня, принадлежащих соответственно интервалам $(1, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, 4)$.

1127. $\sin 3x_2 - \sin 3x_1 = 3(x_2 - x_2) \cos 3\xi$, где $x_1 < \xi < x_2$.

1128. $a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b) = (b - a) \ln \xi$, где $a < \xi < b$.

1129. $\arcsin [2(x_0 + \Delta x)] - \arcsin 2x_0 = 2\Delta x/\sqrt{1 - 4\xi^2}$, где $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

1135. При $x \to 0$ ξ стремится к нулю, принимая не все промежуточные значения, но лишь такую их последовательность, при которой $\cos \frac{1}{\xi}$ стремится к нулю.

1136°. 0,833.

1137. 0,57.

1138. 1,0414.

1139. 0,1990.

1140. 0,8449.

1141. 1,7853.

* **1149.** Требуемое неравенство вытекает из возрастания функции $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в интервале $(0, \pi/2)$.

1150. $(-\infty, -1)$ возрастает, $(-1, 3)$ убывает, $(3, +\infty)$ возрастает.

1151. $(-\infty,1)$ убывает, $(-1,0)$ возрастает, $(0,1)$ убывает, $(1,+\infty)$ возрастает.

1152°. $(-\infty, -1/2)$ возрастает, $(-1/2, 11/18)$ убывает, $(11/18, +\infty)$ возрастает.

1153. $(-\infty, 2a/3)$ возрастает, $(2a/3, a)$ убывает, $(a, +\infty)$ возрастает.

1154. $(-\infty, -1)$ возрастает, $(-1, 1)$ убывает, $(1, +\infty)$ возрастает.

1155. $(-\infty,0)$ убывает, $(0,1/2)$ убывает, $(1/2,1)$ возрастает, $(1,+\infty)$ убывает.

1156. $(-\infty,0)$ возрастает, $(0,+\infty)$ убывает.

1157. $(-\infty,0)$ убывает, $(0,2)$ возрастает, $(2,+\infty)$ убывает.

1158. $(0,1)$ убывает, $(1,e)$ убывает, $(e,+\infty)$ возрастает.

1159. $(0,1/2)$ убывает, $(1/2,+\infty)$ возрастает.

1160°. $(0,\pi/3)$ убывает, $(\pi/3,5\pi/3)$ возрастает, $(5\pi/3,2\pi)$ убывает.

1161. $(0,\pi/6)$ возрастает, $(\pi/6,\pi/2)$ убывает, $(\pi/2,5\pi/6)$ возрастает, $(5\pi/6,3\pi/2)$ убывает, $(3\pi/2,2\pi)$ возрастает.

1162. Монотонно возрастает.

1163. Монотонно возрастает.

1164°. $(0,3a/4)$ возрастает, $(3a/4,a)$ убывает.

1165. $y_{\text{макс}}=0$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=-1$ при $x=1$.

1166. $y_{\text{макс}}=17$ при $x=-1$, $y_{\text{мин}}=-47$ при $x=3$.

1167. $y_{\text{макс}}=4$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=8/3$ при $x=-2$.

1168. $y_{\text{макс}}=2$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=\sqrt[3]{4}$ при $x=2$.

1169. $y_{\text{макс}}=1/\ln 3$ при $x=-3$.

1170. $y_{\text{макс}}=0$ при $x=0$.

1171. $y_{\text{макс}}=0$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=-2/3$ при $x=1$.

1172. $y_{\text{мин}}=2$ при $x=2/3$.

1173. $y_{\text{макс}}=\sqrt{205}/10$ при $x=12/5$.

1174. $y_{\text{макс}}=\sqrt[3]{a^4}$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=0$ при $x=\pm a$.

1175°. $y_{\text{мин}}=0$ при $x=0$.

1176. Монотонно возрастает.

1177. $y_{\text{макс}}=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ при $x=1/2$, $y_{\text{мин}}=0$ при $x=-1$ и при $x=5$.

1178. $y_{\text{макс}}=2{,}5$ при $x=1$, $y_{\text{мин}}=e(4-e)/2\approx 1{,}76$ при $x=e$.

1179. $y_{\text{макс}}=1/2$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=\pi/8$ при $x=1$.

1180°. $y_{\text{макс}}=0$ при $x=0$, $y_{\text{мин}}=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$ при $x=1/2$.

1181. $y_{\text{макс}}=\frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}\approx 1{,}13$ при $x=\pm\pi/3$, $y_{\text{мин}}=1$ при $x=0$.

1182. $y_{\text{макс}}=\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y_{\text{мин}}=\frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144}$ при $x=\pi/6$.

1183. $y_{\text{макс}}=1/\pi$ при $x=1$, $y_{\text{мин}}=-1/\pi$ при $x=3$.

1184°. Если $ab\leqslant 0$, экстремумов нет. Если $ab>0$ и $a>0$, то $y_{\text{мин}}=2\sqrt{ab}$ при $x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$, если $ab>0$ и $a<0$, то $y_{\text{макс}}=-2\sqrt{ab}$ при $x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.

1185. 13 и 4.

1186. 8 и 0.

1187°. 2 и -10.

1188. 2 и -12.

1189. 10 и 6.

1190. 1 и 3/5.

1191. 3/5 и -1.

1192. Наименьшее значение равно $(a+b)^2$, наибольшего нет.

1193. $\pi/2$ и $-\pi/2$.

1194°. Наибольшее значение равно 1, наименьшего нет.

1195°. Наименьшее значение равно $(1/e)^{1/e}$, наибольшего нет.

1196. $\sqrt[3]{9}$ и 0.

1197. $\pi/4$ и 0.

1208. 4 и 4.

1209. 1.

1210°. 6 и 6.

1211. 3, 6 и 4 см.

1212. 3 см.

1213. 1 см.

1214°. $\sqrt[3]{4v}$.

1215. Радиус основания и высота равны $\sqrt[3]{v/\pi}$.

1216. $H = 2R$.

1217. $20\sqrt{3}/3$ см.

1218°. $2\pi\sqrt{2/3} \approx 293°56'$.

1219. Боковая сторона равна $3p/4$, основание равно $p/2$.

1220. Боковая сторона равна $3p/5$, основание равно $4p/5$.

1221. $2R\sqrt{3}/3$.

1222°. $4R/3$.

1223. $\frac{2m_0}{3k}$, $\frac{2}{27}\frac{m_0^3g^2}{k^2}$.

1224. $\sqrt{2aP/k}$.

1225. 20 км/ч, 720 руб.

1226°. Через $1\frac{27}{43}$ часа $\approx$ 1 час 38 мин.

1227. Расстояние хорды от точки A должно равняться 3/4 диаметра окружности.

1228. $4R\sqrt{5}/5$ и $R\sqrt{5}/5$.

1229. Высота прямоугольника равна $\frac{\sqrt{8R^2+h^2}-3h}{4}$, где h — расстояние от центра хорды, стягивающей дугу сегмента, а R — радиус круга.

1230. Радиус основания конуса должен быть в полтора раза больше радиуса цилиндра.

1231. $4R$.

1232°. $\approx 49°$.

1233. $60°$.

1234. $R\sqrt{3}$.

1235. $4R/3$.

1237°. $x/3 + y/6 = 1$.

1238. $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$.

1239. Площадь прямоугольника $= \frac{2}{\pi}\times$ площадь эллипса.

1240. Через точку $(2, 3)$.

1241. $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

1242. $x = a - p$, если $a > p$; $x = 0$, если $a \leqslant p$.

1243°. Сечение желоба имеет форму полукруга.

1244. Длина балки равна 13 1/3 м, сторона поперечного сечения равна $2\sqrt{2}/3$ м.

1245. Искомое значение равно среднему арифметическому результатов измерений: $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

1246°. В 3 км от лагеря.

1247. На высоте $R\sqrt{2}/2$.

1248. Расстояние от источника силы I_1 равно $\frac{3\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$; иными словами, расстояние l делится искомой точкой в отношении $\sqrt[3]{I_1} : \sqrt[3]{I_2}$.

1249. 2,4 м.

1250. $F_{\text{наим}} = kP/\sqrt{1+k^2}$ при $\varphi = \operatorname{arctg} k$.

1251. $\approx 4{,}5$.

1252°. $2b + \sqrt{Sb/a}$ и $2a + \sqrt{Sa/b}$.

* **1253.** $\frac{RHL}{(L-R)(L+2R)}$, где L — образующая конуса. Принять во внимание, что разность между расстоянием от центра шара до вершины конуса и радиусом шара равна разности между высотой конуса и высотой погруженного сегмента.

1254. $R/4$.

1255. $R/2$.

1256. $P(p, \pm p\sqrt{2})$.

* **1263.** 3/4. Так как функция есть константа ($y' = 0$), то значение этой константы равно значению данной функции при любом значении x, например при $x = 0$.

1264°. π.

1265. 0.

1267. $y_{\text{макс}} = 4a^3/27$ при $x = a/3$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = a$.

1268. $y_{\text{макс}} = a^4/16$ при $x = a/2$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$.

1269°. $y_{\text{макс}} = -2a$ при $x = -a$, $y_{\text{мин}} = 2a$ при $x = a$.

1270. $y_{\text{макс}} = 5/4$ при $x = 3/4$.

1271. $y_{\text{макс}} = 1$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = -1$.

1272. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = 0$.

1273. $y_{\text{макс}} = 4/e^2$ при $x = 2$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$.

1274. $y_{\text{мин}} = e$ при $x = e$.

1275°. $y_{\text{макс}} = \sqrt[e]{e}$ при $x = e$.

1276. При $a = 2$ максимум.

1277. $a = -2/3$, $b = -1/6$.

1278. Выпукла в окрестности точки $(1, 11)$, вогнута в окрестности точки $(3, 3)$.

1279. Выпукла в окрестности точки $(1, \pi/4)$, вогнута в окрестности точки $(-1, -\pi/4)$.

1280°. Выпукла в окрестности точки $(1/e^2, -2/e^4)$, вогнута в окрестности точки $(1, 0)$.

1287. Точка перегиба $(5/3, -250/27)$. Интервалы: выпуклости — $(-\infty, 5/3)$, вогнутости — $(5/3, +\infty)$.

1288. Точек перегиба нет, график вогнутый.

1289. Точки перегиба $(2, 62)$ и $(4, 206)$. Интервалы: вогнутости — $(-\infty, 2)$, выпуклости — $(2, 4)$, вогнутости — $(4, +\infty)$.

1290. Точки перегиба $(-3, 294)$ и $(2, 114)$. Интервалы: выпуклости — $(-\infty, -3)$, вогнутости — $(-3, 2)$, выпуклости — $(2, +8)$.

1291°. Точка перегиба $(1, -1)$. Интервалы: выпуклости — $(-\infty, 1)$, вогнутости — $(1, +\infty)$.

1292. Точек перегиба нет, график вогнутый.

1293. Точки перегиба $(-3a, -9a/4)$, $(0, 0)$, $(3a, 9a/4)$. Интервалы: вогнутости — $(-\infty, 3a)$, выпуклости — $(-3a, 0)$, вогнутости — $(0, 3a)$, выпуклости — $(3a, +\infty)$.

1294. Точка перегиба (b, a). Интервалы: выпуклости — $(-\infty, b)$, вогнутости — $(b, +\infty)$.

1295. Точка перегиба $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{(\sqrt{5}-1)/2}\right)$. Интервалы: вогнутости — $\left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, выпуклости — $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. Точки перегиба $(\pm 1, \ln 2)$. Интервалы: выпуклости — $(-\infty, -1)$, вогнутости — $(-1, 1)$, выпуклости — $(1, +\infty)$.

1297. Точка перегиба $\left(ae^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$. Интервалы: выпуклости — $(0, ae^{3/2})$, вогнутости — $(a, e^{3/2}, +\infty)$.

1298. Точек перегиба нет, график вогнутый.

1299. Точка перегиба $\left(1/2, e^{\operatorname{arctg} 1/2}\right)$. Интервалы: вогнутости — $\left(-\infty, -1/2\right)$, выпуклости — $\left(1/2, +\infty\right)$.

1300. Точка перегиба $(1, -7)$. Интервалы: выпуклости — $(0, 1)$, вогнутости — $(1, +\infty)$.

1305. $a = -3/2$, $b = 9/2$

1306°. $\alpha = -20/3$, $\beta = 4/3$. Точками перегиба будут также точки $(-2, -2{,}5)$ и $(0, 0)$.

1307. При $a \leqslant -e/6$ и при $a > 0$.

1316. Точки перегиба $(1, 4)$ и $(1, -4)$.

1317. Точки перегиба при $t = 3\pi/4 \pm k\pi$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

1318. $\frac{\sin b - \sin a}{\ln\frac{b}{a}} = \xi\cos\xi$, где $a < \xi < b$.

1319. $e^b + e^a = 2e^{\xi}$, где $a < \xi < b$.

1324. $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$.

1325. 0.

1326. 1.
1327. α/β.
1328. 1/3.
1329. $a/\sqrt{b}$.
1330°. $-1/2$.
1331. 2.
1332. $\frac{m}{n}a^{m-n}$.
1333. $\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$.
1334. -2.
1335. 2.
1336. $\ln\frac{a}{b}$.
1337°. $\cos a$.
1338. 2.
1339. 1.
1340. 1.
1341. 1/128.
1342. 16.
1343. 1.
1344. 1.
1345°. -2.
1346. 0.
1347. 0.
1348. a.
1349. 1/2.
1350. $4a^2/\pi$.
1351. -1.
1352°. 0.
1353. ∞.
1354. $\frac{a+b+c}{3}$.
1355. 1.
1356. ∞.
1357. 1.
1358°. 1.
1359. e.
1360. 1.
1361. e^2.
1362°. $e^{\frac{2}{\pi}}$.
1363. 1.
1364. 1/2.
1366. Значения x^x больше, чем значения $a^x x^a$.
1367. Значения $f(x)$ больше, чем значения $\ln f(x)$.

1374°. $f(115) \approx 1520990$; $f(120) = 1728120$; $\delta\Big|_{x=100} \approx 0{,}03$ (абсолютная погрешность).

1375. $y = \pm\frac{b}{a}x$.

1376. $x = 0$, $y = 0$.

1377. $y = 0$.

1378. $x = b$, $y = c$.

1379°. $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$.

1380. $x + y = 0$.

1381. $y = x + 2$.

1382. $y = \pm x$.

1383. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$.

1384. $x = b$, $x = 2b$, $y = x + 3(b - a)$.

1385. $y + 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$.

1386°. $x = -1/e$, $y = x + 1/e$.

1387. $x = 0$, $y = x$.

1388. $x = 0$, $y = x + 3$.

1389. $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

1390. $y = 2x \pm \pi/2$.

1391. $y = x$, если $f(x)$ не есть тождественная постоянная.

1392. Если $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = b$, то $y = b$ — асимптота; если $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$, то $x = a$ — асимптота.

1393°. $x = -1$, $y = 0$.

1394. $y = \frac{1}{2}x + e$.

1395. $y = \pm\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

1396. $x + y + a = 0$.

1397°. $x = 2$, $2x + 8y + 1 = 0$, $6x - 40y + 9 = 0$.

1398. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = 1/2$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -1/2$ при $x = -1$. Точки перегиба графика $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. Асимптота $y = 0$.

1399. Определена везде, кроме значений $x = \pm 1$. График симметричен относительно оси ординат. Максимумов нет. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = 0$. Точек перегиба нет. Асимптоты $x = \pm 1$, $y = 0$.

1400. Определена везде, кроме значений $x = \pm 1$. График симметричен относительно начала координат. Экстремумов нет. Точка перегиба $(0, 0)$. Асимптоты $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

1401. Определена везде, кроме значений $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. $y_{\text{макс}} \approx -2{,}60$ при $x \approx 2{,}58$, $y_{\text{мин}} \approx 2{,}60$ при $x \approx 1{,}42$. Точек перегиба нет. Асимптоты $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

1402°. Не определена при $x = \pm 1$. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$. Минимумов нет. При $x < -1$ возрастает, при $x > 1$ убывает. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pm 1$, $y = 1$.

1403. Определена везде, график симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = 0$; $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ — точки перегиба графика с горизонтальной касательной; $(\pm\sqrt{5}/5, -64/125)$ — точки перегиба. Асимптот нет.

1404. Определена везде; график симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = -27/8$ при $x = \pm 1/2$. Точки перегиба графика с горизонтальной касательной $(\pm 1, 0)$. При $x \approx \pm 0{,}7$ и $x \approx \pm 0{,}26$ — еще четыре точки перегиба графика. Асимптот нет.

1405. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{\text{мин}} = 3$ при $x = 1/2$. Максимумов нет. Точка перегиба графика $(-\sqrt[3]{2}/2, 0)$. Асимптота $x = 0$.

1406. Определена везде, кроме $x = 0$. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = 2$ при $x \pm 1$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптота $x = 0$.

1407. Определена везде, кроме $x = 1$. $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = 0$. Максимумов нет. Точка перегиба графика $(-1/2, -8/9)$. Асимптоты $x = 1$ и $y = 0$.

1408. Определена везде, кроме $x = \pm\sqrt{3}$. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = -4{,}5$ при $x = 3$, $y_{\text{мин}} = 4{,}5$ при $x = -3$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $x + y = 0$.

1409°. Определена везде, кроме $x = -1$. Минимумов нет. $y_{\text{макс}} = -3\frac{3}{8}$ при $x = -3$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптоты $x = -1$ и $y = \frac{1}{2}x - 1$.

1410. Определена везде, кроме $x = 1$. Максимумов нет. $y_{\text{мин}} = 27/4$ при $x = 3/2$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптота $x = 1$.

1411. Определена везде, кроме $x = 1$. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ при $x = \sqrt[3]{4}$. Точка перегиба графика $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоты $x = 1$ и $y = x$.

1412. Определена везде, кроме $x = -1$. $y_{\text{макс}} = 2/27$ при $x = 5$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 1$. Абсциссы точек перегиба графика $5 \pm 2\sqrt{3}$. Асимптоты $x = -1$ и $y = 0$.

1413. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{\text{макс}} = 7/2$ при $x = 1$, $y_{\text{макс}} = -11/6$ при $x = -3$, $y_{\text{мин}} = 27/8$ при $x = 2$. Абсцисса точки перегиба графика $9/7$. Асимптоты $x = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$.

1414. Определена везде, кроме $x = 0$, максимумов нет. $y_{\text{мин}} \approx -0{,}28$ при $x \approx 1{,}46$. Абсцисса точки перегиба графика $-\sqrt[3]{2}$. Асимптота $x = 0$.

1415. Определена везде, кроме $x=0$. $y_{\text{макс}}=-2{,}5$ при $x=-2$; минимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x=0$ и $y=x$.

1416. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 1/e$ при $x = 1$. Минимумов нет. Точка перегиба графика $(2, 2/e^2)$. Асимптота $y = 0$.

1417°. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 4/e^2$ при $x = 2$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. Абсциссы точек перегиба графика $2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$.

1418. Определена везде, кроме $x=0$. $y_{\text{мин}}=e$ при $x=1$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x=0$, $y=0$.

1419. Определена при $x > -1$. $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптота $x = -1$.

1420. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. Максимумов нет. Точки перегиба графика $(\pm 1, \ln 2)$. Асимптот нет.

1421. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 1/e$ при $x = \pm 1$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. Абсциссы точек перегиба графика $\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}/2$. Асимптота $y = 0$.

1422. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 27/e^3$ при $x = 3$. Минимумов нет. Абсциссы точек перегиба 0 и $3 \pm \sqrt{3}$. Асимптота $y = 0$.

1423. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = 1/\sqrt{e}$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -1/\sqrt{e}$ при $x = -1$. Точки перегиба графика $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$ и $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2})$. Асимптота $y = 0$.

1424. Определена везде, кроме $x = 0$. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$ и $y = -1$.

1425°. Определена при $x > 0$. Экстремумов нет. Точка перегиба графика $\left(e^{3/2}, e^{3/2} + \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$. Асимптоты $x = 0$ и $y = x$.

1426. Функция определена при $-\infty < x < -1$ и при $0 < x < +\infty$. В интервале $(-\infty, -1)$ возрастает от e до $+\infty$; в интервале $(0, +\infty)$ возрастает от 1 до e. График состоит из двух отдельных ветвей. Асимптоты $y = e$ и $x = -1$.

1427. Определена везде. Экстремумов нет. При $x = \pm k\pi$ ($k = 1$, 3, 5, ...) стационарна. График симметричен относительно начала координат, не имеет асимптот; точки перегиба $(k\pi, k\pi)$ ($k = 0$, ± 1, ± 2, ...) в точках перегиба график пересекает прямую $y = x$.

1428. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. Точки экстремума удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = -x$. Абсциссы точек перегиба удовлетворяют уравнению $x \operatorname{tg} x = 2$. Асимптот нет.

1429. Определена в интервалах $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Период 2π. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 2k\pi$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi/2 + k\pi$.

1430°. Определена в интервалах $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Период 2π. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = 2k\pi$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi/2 + k\pi$.

1431. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = \pi/2 - 1$ при $x = -1$, $y_{\text{мин}} = 1 - \pi/2$ при $x = 1$. Точка перегиба $(0, 0)$. Асимптоты $y = x \pm \pi$.

1432. Определена везде, кроме $x = 1$ и $x = 3$. $y_{\text{макс}} = 1/e$ при $x = 2$. Минимумов нет. Асимптоты $x = 1$, $x = 3$ и $y = 1$.

1433. Определена везде. Период 2π. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y_{\text{макс}} = e - 1$ при $x = \pi/2 + 2k\pi$ и $y_{\text{макс}} = 1 + 1/e$ при $x = 3\pi/2 + 2k\pi$. Асимптот нет.

1434. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 4/27$ при $x = 8/27$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот.

1435. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = -3$ при $x = \pm 1$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот.

1436. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = 2/3$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -2/3$ при $x = -1$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптот нет.

1437°. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 2$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = -1$. Точка перегиба графика $(-1/2, 1)$. Асимптота $y = 1$.

1438. Определена везде. $y_{\text{макс}} \approx 2{,}2$ при $x = 7/11$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 1$. Абсциссы точек перегиба графика -1 и $\frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{11}$. Асимптот нет.

1439. Определена везде. $y_{\text{макс}} = 2\sqrt[3]{4}$ при $x = 4$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. Точка перегиба графика $(6, 0)$. Асимптота $x + y = 2$.

1440. Функция определена при $x \geqslant 0$, двузначна. Функция $y = x + \sqrt{x^5}$ (верхняя ветвь графика) монотонно возрастает. Функция $y = x - \sqrt{x^5}$ (нижняя ветвь графика) имеет максимум при $x = \sqrt[3]{20}/5$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот.

1441. Определена при $x \geqslant 0$, двузначна. Функция $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ (верхняя ветвь графика) монотонно возрастает. Функция $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ (нижняя ветвь графика) имеет максимум при $x = 16/25$. Абсцисса точки перегиба нижней ветви графика $64/225$. Асимптот нет.

1442. Определена при $x \geqslant -1$, двузначна. Экстремумов нет. График симметричен относительно оси абсцисс, имеет точки перегиба $(0, 1)$ и $(0, 1)$. Асимптот нет.

1443°. Определена на отрезке $[-1, 0]$ и в интервале $[1, +\infty)$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt[4]{12/3}$ при $x = -\sqrt{3}/3$. Абсцисса точек перегиба графика $\sqrt{1 + \sqrt{12}/3}$. Асимптот нет.

1444. Определена при $x \geqslant 0$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt{12}/9$ при $x = 1/3$. График не имеет точек перегиба. Асимптот нет.

1445. Определена при $x = 0$ и при $x \geqslant 1$. Начало координат — изолированная точка. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $(4/3, \pm 4\sqrt{3}/9)$. Асимптот нет.

1446. Определена при $x < 0$ и при $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = -1$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$ и $y = \pm x\sqrt{3}/3$.

1447. Определена при $x \leqslant -2$ и при $x > 0$, двузначна. График симметричен относительно прямой $y = x$. $y_{\text{макс}} = -2$ при $x = 1$, График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 0$.

1448°. Определена при $-a \leqslant x < a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ при $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Точек перегиба нет. Асимптота $x = a$.

1449. Определена при $0 \leqslant x \leqslant 4$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt{3}$ при $x = 3$. Абсцисса точек перегиба графика $3 - \sqrt{3}$. Асимптот нет.

1450. Определена при $-2 \leqslant x \leqslant 2$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 3\sqrt{3}/5$ при $x = \pm 1$. Точки перегиба графика $(0, 0)$ и $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/5)$. Асимптот нет.

1451. Определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 1/2$ при $x = \pm\sqrt{2}/2$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптот нет.

1452. Определена при $x \geqslant 1$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 2$. Абсцисса точек перегиба $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Асимптота $y = 0$.

1453°. Определена при $0 \leqslant x < 2a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точек перегиба нет. Асимптота $x = 2a$.

1454. Определена при $x < 0$, при $0 < x \leqslant 1$ и при $x \geqslant 2$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс, имеет асимптоты $x = 0$ и $y = \pm 1$ и две точки перегиба. Экстремумов нет.

1455. Определена при $-a \leqslant x < 0$ и при $0 < x \leqslant a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $[a(\sqrt{3} - 1), \pm a\sqrt[4]{27/4}]$. Асимптота $x = 0$.

1456. Определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и при $x = \pm 2$, двузначна. График симметричен относительно осей координат и имеет две изолированные точки: $(\pm 2, 0)$, $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 0$. Точек перегиба и асимптот нет.

1457. Определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 0$. Точки перегиба графика $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$. Асимптот нет.

1458. Определена при $x \leqslant -1$ и при $x \geqslant 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $\left(\pm\sqrt{2}, \pm 1/2\right)$. Асимптоты $y = \pm x$.

1459°. Определена при $x \geqslant 0$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 1/2$. Абсцисса точек перегиба графика $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Асимптота $y = 0$.

1460. Определена везде, кроме $x = 0$. Экстремумов нет. Точка перегиба графика $\left(-1/2, e^{-2} + 1/2\right)$. Асимптоты $x = 0$ и $x + y = 1$.

1461. Определена везде, кроме $x = \pi/2 + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Период π. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi/2 + k\pi$.

1462. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. Точки экстремумов удовлетворяют уравнению $x = \operatorname{tg} x$. Асимптота $y = 0$.

1463°. Определена везде. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. При $x \leqslant 0$ функция тождественно равна линейной функции $y = 1 - x$. Асимптота $x + y = 3$. $(0, 1)$ — угловая точка графика с двумя различными касательными.

1464. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 3$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = \pm 2$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот, и правая его часть представляет собой часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$, лежащую правее оси ординат. $(0, 3)$ — угловая точка графика с двумя различными касательными.

1465. $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, а $y(x)$ — при всех x. $(-3, 3)$ — максимум, $(5, -1)$ — минимум, $(1, 1)$ — точка перегиба. Асимптот нет. При $x \to \infty$ угол наклона линии к оси абсцисс стремится к 45°.

1466. $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, а $y(x)$ — при всех x. Асимптоты $y = x$ и $y = x + 6\pi$; $-1 - 3\pi, -1 + 3\pi/2)$ — максимум, $(1 - 3\pi, 1 - 3\pi/2)$ — минимум, $(-3\pi, 0)$ — точка перегиба.

1467. $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, кроме $t = -1$. Асимптота $x + y + 1 = 0$. $(0, 0)$ — точка самопересечения, касательными в этой точке служат оси координат. Точек перегиба нет. В первом квадранте — замкнутая петля.

1468. $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t. Функция $y(x)$ при $x < -1/e$ не определена, при $-1/e < x < 0$ эта функция двузначна, при $x > 0$ — однозначна. Линия симметрична относительно прямой $x + y = 0$. Максимум — $(e, 1/e)$. Имеются две точки перегиба. Координатные оси служат асимптотами.

1469. Замкнутая линия, симметричная относительно оси абсцисс, с точкой возврата $(a, 0)$.

1470. Замкнутая трехлепестковая роза. Функция определена на отрезках $[0, \pi/3]$, $[3\pi/3, \pi]$, $[4\pi/3, 5\pi/3]$. Экстремумы при $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ и $\varphi = 3\pi/2$.

1471°. Функция определена в полуинтервалах $[0, \pi/2)$, $[\pi, 3\pi/2)$. График функции симметричен относительно полюса. Прямые $x = a$ и $x = -a$ являются асимптотами.*

1472. Функция определена в полуинтервалах $[0,\pi/2)$, $[3\pi/4, 3\pi/2)$ и на отрезке $[7\pi/4, 2\pi]$. График функции симметричен относительно полюса. Асимптоты $x = a$ и $x = -a$. В полюсе кривая касается прямой $\varphi = 3\pi/4$.

1473. Существует при всех значениях φ. При $\varphi = 0$ максимум равен $2a$, при $\varphi = \pi$ минимум равен 0. Линия замкнута, симметрична относительно полярной оси. Полюс — точка возврата.

1474. Функция определена на отрезках $[0, \pi/2 + \arccos 1/b]$, $[3\pi/2 - \arccos 1/b, 2\pi]$. В точке $\varphi = 0$ функция имеет максимум, равный $a(1 + b)$, в точках $\varphi = \pi/2 + \arccos 1/b$ и $\varphi = 3\pi/2 - \arccos 1/b$ — минимум, равный 0. График функции симметричен относительно полярной оси.

1475°. Существует при $\varphi > 0$. Точка перегиба $(\sqrt{2\pi}; 0{,}5)$. Полярная ось является асимптотой. Линия спирально завивается вокруг полюса, асимптотически приближаясь к нему.

1476. Существует при $\varphi \geqslant 0$. График — спираль, исходящая из полюса и асимптотически приближающаяся к окружности $\rho = 1$.

1477. Существует при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, расположена целиком правее оси ординат. Замкнутая линия. Максимум при $t = 0$ ($\varphi = 1$ радиану, $\rho = 1$). Точек перегиба нет. При $t = \pm 1$ касается оси ординат.

1478. Четырехлепестковая роза. Начало координат — двойная точка самоприкосновения.

1479. Линия целиком лежит в полосе $-a\sqrt{2}/2 \leqslant x \leqslant a\sqrt{2}/2$. Симметрична относительно начала. Асимптота $x = 0$. $(0, 0)$ — точка перегиба с осью абсцисс в качестве касательной. Имеются еще две точки перегиба.

1480. Симметричная относительно четырех осей $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ замкнутая линия с четырьмя точками возврата: $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ и $(0, -a)$. Начало координат — изолированная точка.

1481°. Симметричная относительно осей координат и биссектрис координатных углов линия. Асимптоты $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$. Начало координат — четырехкратная точка самопересечения; в ней ветви линии касаются координатных осей. Линия имеет форму «мельницы».

---

*В этой и следующих задачах асимптоты даны в декартовой системе координат, у которой осью абсцисс служит полярная ось, а осью ординат — перпендикуляр к полярной оси, проходящей через полюс.

1485. Остальные корни простые.

1486. $0{,}1 < x < 0{,}2$.

1487. $-0{,}7 < x_1 < -0{,}6$ и $0{,}8 < x_2 < 0{,}9$.

1488°. $0{,}32 < x < 0{,}33$.

1489. $-3{,}11 < x_1 < -3{,}10$, $0{,}22 < x_2 < 0{,}23$ и $2{,}88 < x_3 < 2{,}89$.

1490. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$ и $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

1491. $-0{,}20 < x < -0{,}19$.

1492. $0{,}84 < x < 0{,}85$.

1493. $1{,}63 < x < 1{,}64$.

1494°. $1{,}537 < x < 1{,}538$.

1495. $0{,}826 < x < 0{,}827$.

1496. $1{,}096 < x << 1{,}097$.

1497. $0{,}64 < x < 0{,}65$. При $0 < a < 1$ существует единственное действительное число, равное своему логарифму, притом меньшее 1. При $1 < a < e^{1/e}$ существуют два различных числа, равных своим логарифмам; одно из интервала $(1, e)$, другое из интервала $(e, +\infty)$. При $a = e^{1/e}$ единственным числом, равным своему логарифму, будет число e (оно является двукратным корнем уравнения $\log_a x = x$). При $e^{1/e} < a < +\infty$ не существует действительных чисел, равных своим логарифмам.

1498. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

1499. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

1500°. $(x-1)^{10}+10(x-1)^9+45(x-1)^8+120(x-1)^7+210(x-1)^6+$ $+249(x-1)^5+195(x-1)^4+90(x-1)^3+15(x-1)^2-5(x-1)-1$.

1501. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$.

1502. $f(-1) = 143$; $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$.

1503. $-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, где $0 < \theta < 1$.

1504. $x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x + n + 1)e^{\theta x}$, где $0 < \theta < 1$.

1505. $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)!\cdot 2^{4n-2}} +$ $+ \frac{(-1)^n(2n)!(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, где $0 < \theta < 1$.

1506. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}$, где $0 < \theta < 1$.

1507°. $(x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \ldots +$ $+ \frac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \frac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, где $0 < \theta < 1$.

1508. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} +$ $+ \frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin 2\theta x$, где $0 < \theta < 1$.

1509. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, где $0 < \theta < 1$.

1510. $x + \frac{x^3}{3}\frac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$, где $0 < \theta < 1$.

1511. $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!}\frac{9\theta x + 6\theta^3 x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$, где $0 < \theta < 1$.

1512. $1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}(x-1)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\frac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^9}}$, $0 < \theta < 1$.

***1513.** В силу существования третьей производной имеем $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h)$. Сравнивая с выражением в тексте, получаем $\frac{h^2}{2!}[f''(a+\theta h) - f''(a)] = \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h)$, т. е. $\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h} = \theta\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h} = \frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h)$. Остается совершить предельный переход при $h \to 0$.

1514. Функция убывает. $(0,3)$ — точка перегиба графика.

1515. Функция имеет минимум, равный 1.

1516°. Функция имеет минимум, равный 2.

1517. Функция имеет максимум, равный -11.

1518. Функция возрастает. $(0,0)$ — точка перегиба графика.

1519. Функция возрастает. $(0,4)$ — точка перегиба графика.

1520°. $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}03) \approx 0{,}82$.

1521. $f(x) = 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}02) \approx 343{,}4$; $f(1{,}97) \approx 289{,}9$.

1522. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}005) \approx 1{,}364$.

1523. $f(x) = -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}1) \approx -3{,}4$; $f(2{,}1) \approx -3{,}36399$; $\delta = 0{,}036$; $\delta' \approx 0{,}011 = 1{,}1\%$.

1524. 1,65.

1525°. $0{,}78$, $\delta < 0{,}01$.

1526. 0,342020.

1527. 0,985.

1528. $0{,}40$, $\delta < 0{,}01$.

1529. $\sqrt{2}/4$.

1530°. a/b^2; b/a^2.

1531. 36.

1532. 0,128.

1533. $\sqrt{2}/4$.

1534. 0.

1535. 1.

1536°. $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$.

1537. $6|x|/(1+9x^4)^{3/2}$.

1538. $a^4b^4/(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}$.

1539. $|\cos x|$.

1540. $\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}$.

1541°. $\frac{|(m-1)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}|}{(b^{2m}x^{2m-2} + a^{2m}y^{2m-2})^{3/2}}$.

1542. $\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$.

1543. 1/6.
1544. $\frac{2}{3a|\sin 2t_1|}$.
1545. $\frac{2}{\pi a}$.
1546°. $\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$.
1547. $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.
1548. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{3/2}}$.
1549°. $\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{3/2}}$.
1550. $\frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{2ab\sqrt{2}}$.
1554. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.
1555. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.
1556. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.
1557. $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{6}$.
1558°. $\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}a\right)^2=\frac{125}{9}a^2$.
1559. $(a/4, a/4)$.
1560. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.
1561. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
1562. При $t=k\pi$.
1563. $\frac{3}{4}a$.
1566°. $a=3$, $b=-3$, $c=1$.
1567. $y=-x^5-0{,}6x^4+4{,}5x^3+0{,}1x^2$.
1568. $\xi=x-\frac{[1+n^2x^{2(n-1)}]x}{n-1}$, $\eta=x^n+\frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)x^{n-2}}$.
1569. $\xi=(a^2+b^2)x^3/a^4$, $\eta=-(a^2+b^2)y^3/b^4$;
$(a\xi)^{2/3}-(b\eta)^{2/3}=(a^2+b^2)^{2/3}$.
1570. $\xi=x+3x^{1/3}y^{2/3}$, $\eta=y+3x^{2/3}y^{1/3}$; $(\xi+\eta)^{2/3}=2a^{2/3}$.
1571°. $\xi=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}(3y+a)$, $\eta=-\frac{9y^2+2ay}{2a}$.
1572°. $\xi=-\frac{4}{3}t^3$, $\eta=3t^2-\frac{3}{2}$, $\xi^2=\frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3$.
1573. $(3\eta/8)^4+6a^2(3\eta/8)^2+3a^2\xi=0$.
1574. $\xi^{2/3}+\eta^{2/3}=(2a)^{2/3}$.
1576. Да, можно.
1579. $2p\left[\sqrt{\left(\frac{x+p}{3p}\right)^3}-1\right]$.
1580°. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.
1581. $6a$.

***1582.** $16a$. Получив параметрические уравнения эволюты, преобразовать их к новым координатам и параметру, положив $x=-x_1$, $y=-y_1$, $t=t_1+\pi$.

***1583.** Воспользоваться зависимостью между длиной эволюты и приращением радиуса кривизны.

К ГЛАВЕ 5

1592. 1) $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$; 2) $\int_a^b (e^x+2)\,dx$; 3) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; 4) $\int_{-2}^2 (8-2x^2)\,dx$; 5) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$; 6) $\int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx$.

1593°. $20-4/n$ и $20+4/n$; $\alpha = 4/n$; $\sigma = \frac{1}{5n}$.

1594. $\alpha = 149/600 \approx 0{,}248$, $\delta \approx 0{,}039$.

1595. 31,5.

1596. 10 2/3.

1597. $\frac{2}{3}ah = 40\,\text{см}^2$.

1598. 10 2/3.

1599. 8.

1600°. 21 1/3.

1601. 2 7/8.

1602. 140 см.

1603. $\approx 122{,}6$ м.

1604. 20 5/6 см.

1605°. 625 *Дж.*

1606. 4 см.

1607. 1) $m_n = \sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; 2) $m = \int_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$.

1608. 1) $\theta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; 2) $\theta = \int_{T_0}^{T_1} \psi(t)\,dt$.

1609. $Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = 0$, $t_n = T$; $Q = \int_0^T I(t)\,dt$.

1610. 1) $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; 2) $A = \int_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1611. 1500 *Кл.*

1612°. ≈ 67600 *Дж.*

1613. 2880 *Дж.*

1614. 1) $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} a\xi_i(x_{i+1}-x_i)$, $x_0 = 0$, $x_n = b$; 2) $P = \int_0^b ax\,dx$

1615. 1) $ab^2/2 = 187{,}5$ Н; 2) прямая должна быть проведена на расстоянии $h/\sqrt{2} \approx 17{,}7$ см от поверхности.

1616. $e-1$.

1617°. $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

1618. 1) 50; 2) $4a$; 3) $\frac{7a^3}{24}$; 4) $\frac{7}{3}ab^2$; 5) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$; 6) $\frac{4}{3}m$; 7) 31,5; 8) $\frac{(a-b)^3}{6}$; 9) $\frac{a^2}{3}$; 10) $\frac{a(a^2-3ab+3b^2)}{3(a-b)^2}$; 11) 4; 12) 16 2/15; 13) 0.

***1619.** $\frac{1}{k+1}$; $\approx 1{,}67\cdot 10^{11}$. Записать выражение, предел которого ищется, в виде n-й интегральной суммы некоторой функции.

1620. $\ln 2$.

1621°. $\ln 2$.

***1622.** $\ln a$, $\ln 3 \approx 1{,}1$. См. задачи 1620 и 1621.

****1623.** 1) $ae^a - e^a + 12$; 2) $a\ln a - a + 1$; 3)$^\circ$ $\frac{(\ln b)^2 - (\ln a)^2}{2}$. Выражение $q + 2a^2 + \ldots + nq^n$ находится при помощи дифференцирования суммы членов геометрической прогрессии.

1624. $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

1625. 1/2.

1626. 64/3.

1627. 8/5.

1630. $8 < I < 9{,}8$.

1631. $3 < I < 5$.

1632. $\pi < I < 2\pi$.

1633°. $20/29 < I < 1$.

1634. $\pi/9 < I < 2\pi/3$.

1635. $\frac{e^2-1}{e^{e^2}-1} < I < \frac{e^2-1}{e^2}$.

1636. 1) Первый; 2) второй.

1637. 1) Первый; 2) второй; 3) первый; 4) второй.

1640. $0{,}85 < I < 0{,}90$.

1641°. 1) $1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$; 2) $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$; 3) $1 < I < \sqrt{6/5} \approx 1{,}095$.

1642. $y_{\text{ср}} = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + b$; $\frac{x_1+x_2}{2}$.

1643. $y_{\text{ср}}\frac{a}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$. Если $x_1x_2 \geqslant 0$, то в одной точке; если $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$, то при соблюдении неравенств $-x_1/2 \leqslant x_2 \leqslant -2x_1$ в двух точках, в противном случае — в одной.

1644. 24,5.

1645. $\pi a/4$.

1646. 0.

1647. $\frac{2}{3}h = 1$ м.

1648°. 11 А.

1649. ~ 1558 Вт.

1650. 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6-a^6}{6}$; 3) $\frac{x^4-x^5}{20}$.

1651. $s = \frac{2}{3}t^3$.

1652. $A = 100s + 25s^2$ *Дж*, s — путь в метрах.

1653°. $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2}{3}t^3 + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t\right)$, где $\alpha = \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2-E_2t_1}{t_2-t_1}$.

1654. $Q = c_0t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$.

1655. $dS = 10$, $\Delta S = 10{,}10033\ldots$.

1656. $dS = 1$.

1657.

Δx	ΔS	dS	α	δ
1	92,25	64	28,25	0,442
0,1	6,644	6,4	0,244	0,0382
0,01	0,6424	0,64	0,0024	0,00376

1658. $\frac{1}{3}$.

1659. 0; $\sqrt{2}/2$; 1.

1660. $\frac{d}{dx}\int_x^a f(x)\,dx = -f(x)$.

1661. -1, $-5/4$.

1662°. $\frac{\sin 2x}{x}$.

1663. 1) x; 2) $-4x\ln x$.

***1664.** $2\ln^2 2x - \ln^3 x$. Представить интеграл $\int_x^{2x} \ln^2 x\,dx$ в виде суммы интегралов $\int_x^a \ln^2 x\,dx + \int_a^{2x} \ln^2 x\,dx$, где $a > 0$.

1665. $y' = -\frac{\cos x}{e^y}$.

1666. 1) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$; 2)° $\frac{dy}{dx} = -t^2$.

1667. -2.

1668. Минимум при $x = 0$. $I(0) = 0$.

1669. 1.

1670. $y_{\text{макс}} = 5/6$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = 2/3$ при $x = 2$. Точка перегиба графика $\left(3/2, 3/4\right)$.

1672. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{15}{32}$; 3) 52; 4) $4\frac{5}{6}$; 5) $45\frac{1}{6}$; 6) $\approx 0{,}08$; 7) $2-\sqrt{2}$; 8) $6\frac{2}{3}$; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{3\sqrt{b}}\right)$; 10) $\frac{z_1^2-z_0^2}{2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_0^3}\right) + z_1 - z_0$.

1673. 1) 2; 2) 0; 3) $e^3 - 1$; 4) 1; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/6$.

1674. 0.

1675°. $1 - \sqrt{3}$; -1.

К ГЛАВЕ 6

1676. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

1677. $\frac{mx^{n/m+1}}{n+m} + C$.

1678. $C - \frac{1}{x}$.

1679. $\approx 0{,}4343 \cdot 10^x + C$.

1680°. $\frac{(ae)^x}{1+\ln a} + C$.

1681. $\sqrt{x} + C$.

1682. $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$.

1683. $\approx 4{,}1x^{0{,}83} + C$.

1684. $u - u^2 + C$.

1685. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$.

1686°. $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$.

1687. $C - 10x^{-0{,}2} + 15x^{0{,}2} - 3{,}62x^{1{,}38}$.

1688. $z - 2\ln|z| - \frac{1}{z} + C$.

1689. $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + C$.

1690. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C$.

1691. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

1692. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$.

1693. $3x - \frac{2\cdot 1{,}5^x}{\ln 1{,}5} + C$.

1694. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C$.
1695. $C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.
1696°. $\operatorname{tg} x - x + C$.
1697. $C - \operatorname{ctg} x - x$.
1698. $x - \sin x + C$.
1699. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$.
1700°. $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$.
1701. $\operatorname{tg} x + C$.
1702. $\frac{\pi}{2}x + C$.
1703. $\frac{\sin^2 x}{2} + C$.
1704. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.
1705. $2\sqrt{1 + x^2} + C$.
1706. $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$.
1707. $C - \frac{4}{8(2x-3)^4}$.
1708°. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)} + C$.
1709. $C - \frac{5}{33}(8 - 3x)^{11/5}$.
1710. $C - \frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$.
1711. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a + bx} + C$.
1712. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$.
1713. $C - \frac{1}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3}$.
1714. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 + 2)^6} + C$.
1715°. $\sqrt{x^2 + 1} + C$.
1716. $\frac{2}{5}\sqrt{4 + x^5} + C$.
1717. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4 + 1)^2} + C$.
1718. $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + C$.
1719. $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$.
1720. $\sec x + C$.
1721. $3\sqrt[3]{\sin x} + C$.
1722°. $C - \frac{2}{5}\cos^5 x$.
1723. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$.
1724. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3} + C$.
1725. $C - \frac{1}{2(\arcsin x)^2}$.
1726. $2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + C$.
1727. $\sin x + C$.
1728. $\operatorname{tg}(1 + \ln x) + C$.
1729. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$.
1730. $x\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.
1731. $C - \frac{1}{2}\cos(2x - 3)$.
1732. $C - \frac{1}{2}\sin(1 - 2x)$.
1733. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$ или $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 4x - \sec 4x) + C$.

1734°. $C - \cos(e^x)$.
1735. $\ln(1 + x^2) + C$.
1736. $\ln|\arcsin x| + C$.
1737. $\ln(x^2 - 3x + 8) + C$.
1738. $\frac{1}{2}\ln|2x - 1| + C$.
1739. $\frac{1}{c}\ln|cx + m| + C$.
1740. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$.
1741°. $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 1| + C$.
1742. $\ln(e^x + 1) + C$.
1743. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x} + a^2) + C$.
1744. $C - \ln|\cos x|$.
1745. $\ln|\sin x| + C$.
1746°. $C - \frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.
1747. $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x + 1)| + C$.
1748. $C - \ln(1 + \cos^2 x)$.
1749. $\ln|\ln x| + C$.
1750. $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1} + C$, если $m \neq -1$, и $\ln|\ln x| + C$, если $m = -1$.
1751. $e^{\sin x} + C$.
1752. $e^{\sin x} + C$.
1753. $\frac{a^{3x}}{3\ln a} + C$.
1754. $C - \frac{a^{-x}}{\ln a}$.
1755. $C - \frac{e^{1-3x}}{3}$.
1756. $0{,}5e^{x^2} + C$.
1757°. $C - \frac{1}{3}e^{-x^3}$.
1758. $\arcsin\frac{x}{3} + C$.
1759. $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$.
1760. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$.
1761. $\arcsin\frac{x}{2} + C$.
1762°. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x + C$.
1763. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C$.
1764. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$.
1765. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a} + C$.
1766. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C$.
1767. $\frac{1}{4}\arcsin x^4 + C$.
1768. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2} + C$.
1769°. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$.
1770. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{a} + C$.
1771. $e^x + e^{-x} + C$.
1772. $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x + x + C$.
1773. $\arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$.

1774. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$
1775°. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$
1776. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C.$
1777. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C.$
1778. $\frac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+C.$
1779. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}.$
1780. $C-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3].$
1781. $x-4\ln|x+4|+C.$
1782°. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C.$
1783. $\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln|bx+a|\right]+C.$
1784. $C-x-6\ln|3-x|.$
1785. $2x+3\ln|x-2|+C.$
1786. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C.$
1787. $x+\ln(x^2+1)+C.$
1788. $x-2\operatorname{arctg}x+C.$
1789°. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|.$
1790. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$
1791. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$
1792. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$
1793. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C.$
1794°. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C.$
1795. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$
1796. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C.$
1797. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C.$
1798. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C.$
1799. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$
1800. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$
1801. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$
1802°. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C.$
1803. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C.$
1804. $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C.$
1805. $\arcsin(x-2)+C.$
1806. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C.$
1807°. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C4.$
1808. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$
1809. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$
1810. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

1811. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.
1812°. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$.
1813. $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-x+C$.
1814. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.
1815. $\ln(2+\sin 2x)+C$.
1816. $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right)$.
1817. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$.
1818. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$.
1819°. $\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$.
1820. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.
1821. $\ln(1+\sin x)+C$.
1822. $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$.
1823. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.
1824°. $2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C$.
1825. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.
1826. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.
1827. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C$.
1828. $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$.
1829°. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.
1830. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$.
1831. $C-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$.
1832. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$.
1833. $x\sin x+\cos x+C$.
1834. $C-e^{-x}(x+1)$.
1835°. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$.
1836. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$.
1837. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$.
1838. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.
1839. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.
1840°. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.
1841. $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$.
1842. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.
1843. $C-\frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e})$.
1844. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.
1845. $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$.
1846°. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.
1847. $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.
1848. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$.
1849. $(x^3+1)\ln(1+x)/3-x^3/9+x^2/6-x/3+C$.
1850. $C-e^{-x}(2+2x+x^2)$.

1851. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.
1852°. $a^x(x^2/\ln a - 2x/\ln^2 a + 2/\ln^3 a) + C$.
1853. $C - x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x$.
1854. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$.
1855. $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$.
1856. $C - \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.
1857°. $C - \frac{2}{3\sqrt{x^3}}\left(\ln^3 x + 2\ln^2 x + \frac{8}{3}\ln x + \frac{16}{9}\right)$.
1858. $x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2} - 2x + C$.
1859. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.
1860. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.
1861. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x) + C$.
1862. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx + a\cos nx) + C$.
1863°. $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.
1864. $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$.
***1865.** $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. (Положить $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и далее $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ преобразовать к виду $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.)
***1866.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$. (Положить $u = \sqrt{a^2+x^2}$.)
1867. $\frac{x-2}{x+2}e^x + C$.
1868. $\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x\right]e^x + C$.
1869°. $2\left[\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})\right] + C$.
1870. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C$.
1871. $C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$.
1872. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$.
1873. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$.
1874. $2[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C$.
1875. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.
1876. $2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C$.
1877. $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 3(x+1)^{1/3} + 3\ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + C$.
1878. $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b} - m\ln|\sqrt{ax+b} + m|] + C$.
1879°. $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$.
1880. $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x} - 1| + C$.
1881. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x}) + C$.
1882. $\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 1\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right|\right] + C$.
1883. $\frac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$.
1884°. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$.
1885. $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x} - 1| + C$.
1886. $0{,}4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3 - 2\cos^2 x) + C$.
1887. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg} x + C$.

1888. $C - \frac{2}{9}\sqrt{a^3 - x^3}(2a^3 + x^3)$.
1889. $\frac{x^2-4}{2} + \frac{8}{x^2-4} + 4\ln|x^2 - 4| + C$.
1890°. $C - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$.
1891. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$.
1892. $C - \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}$.
1893. $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.
1894. $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$.
1895. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$.
1896°. $C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}$.
1897. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$.
1898. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + C$.
1899. $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.
1900. $\frac{x}{4}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$.
1901°. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C$.

***1902.** $\arccos\frac{1}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$. (Можно применить подстановку $x = \frac{1}{z}$.)

***1903.** $2\arcsin\sqrt{x} + C$. (Можно применить подстановку $x = \sin^2 z$.)

***1904.** $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C$. (Умножить числитель и знаменатель на e^x и положить $xe^x = z$.)

1905. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$.
1906°. $3\left[\left(2 - \sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right] + C$.
1907. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + C$.
1908. $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2 + C$.
1909. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2 + C$.
1910. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 2x)^3} + C$.
1911. $\frac{1}{9}(1 + e^{3x})^3 + C$.
1912. $2e^{\sqrt{x}} + C$.
1913°. $e^{-\cos x} + C$.
1914. $C - \frac{2}{3}(1 - e^x)^{3/2}$.
1915. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$.
1916. $C - \frac{5}{24}(2 - 3x^{4/3})^{6/5}$.
1917. $C - \frac{1}{3}\ln|1 + 3x^3 - x^6|$.
1918. $\frac{2}{3}\ln(1 + x^{3/2}) + C$.
1919. $C - \ln(3 + e^{-x})$.
1920. $C - \arcsin e^{-x}$.

1921°. $2\sqrt{1+x^2}+3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.
1922. $\frac{1}{9}\left[2\sqrt{9x^2-4}-3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|\right]+C$.
1923. $2\sin\sqrt{x}+C$.
1924. $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$.
1925. $C-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$.
1926. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.
1927. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1}+C$, если $n\neq -1$, и $\ln|\operatorname{arctg} x|$, если $n=-1$.
1928. $C-2\operatorname{ctg} 2\varphi$.
1929°. $2x-\operatorname{tg} x+C$.
1930. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$.
1931. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}(5\operatorname{tg}^2 x+9)+C$.
1932. $\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 3x+\ln\cos^2 3x)+C$.
1933. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$.
1934. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.
1935°. $\frac{\sqrt{2+4x}(x-1)}{6}+C$.
1936. $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.
1937. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$.
1938. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\sin^3 x}+\cos x+C$.
1939. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$.
1940. $C-\ln[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}]$.
1941. $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$.
1942. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.
1943°. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.
1944. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.
1945. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}$.
1946. $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.
1947. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.
1948. $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$.
1949. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$.
1950. $C-\ln|2x^2-3x+1|$.
1951°. $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$.
1952. $\frac{61}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.
1953. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$.
1954. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$.
1955°. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.
1956. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.
1957. $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.
1958. $\frac{1}{\omega^3}\left[(\omega^2x^2-2)\sin\omega x+2\omega x\cos\omega x\right]+C$.

1959. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + C.$
1960°. $\operatorname{tg} x \ln\cos x + \operatorname{tg} x - x + C.$
1961. $\ln|\ln\sin x| + C.$
1962. $\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4}\right] + C.$
1963. $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right| + \cos 3x\right) + C.$
1964. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) + C.$
1965. $C - \frac{1}{8}\ln\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}.$
1966°. $\ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$
1967. $2\ln(e^{x/2} + e^{-x/2}) + C.$
1968. $e^{e^x} + C.$
1969. $\frac{1}{4}e^{2x^2} + C.$
1970. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[3\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}\right] + C.$
1971°. $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$
1972. $C - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right).$
1973. $\frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5}\right) + C.$
1974. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C.$
1975. $\ln|\sin x + \cos x| + C.$
1976. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| + C.$
1977°. $\sec x - \operatorname{tg} x + x + C.$
1978. $\sin x - \operatorname{arctg}\sin x + C.$
1979. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + C.$
1980. $\ln x \ln\ln x - \ln x + C.$
1981. $\frac{e^x(x^2-1)}{2} + C.$
1982°. $C - \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2).$
1983. $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2} + C.$
1984. $C - \frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\arcsin x.$
1985. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-a^2)^5} - \frac{a^2}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + a^4\sqrt{x^2-a^2} + a^5\arcsin\frac{a}{|x|} + C.$
1986. $\frac{\sqrt{4+x^2}(x^2-2)}{24x^3} + C.$
1987. $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3} + C.$
1988°. $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5} + C.$
1989. $\frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{27x^3} + C.$
1990. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right] + C.$
1991. $x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{1+x} - 1) + C.$
1992. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + C.$
1993°. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$
1994. $\sqrt{x^2+2x} + \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x}\right| + C.$
* **1995.** $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4} + C$ (Удобна подстановка $x = \sin u$.)

1996. $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C.$

1997. $C-\frac{(1+x^8)^{3/2}}{12x^{12}}.$

1998. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C.$

1999°. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln(x^2+\sqrt{x^4+4})+C.$

2000. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.$

2001. $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3}.$

2002. $C-\frac{x^3}{4(1+x^2)^2}-\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3\operatorname{arctg}x}{8}.$

2003°. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C.$

2004. $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C4.$

2005. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$

***2006.** $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (подстановка $u=1+\frac{1}{x}$).

2007. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$

2008°. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

2009. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\sqrt{1+x^2}+C.$

2010. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}(5\operatorname{tg}^2 x+11)+C.$

2011. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg}x}+C.$

2012. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$

2013°. $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C.$

2014. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$

2015. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.$

2016. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

2017. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

2018. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C.$

2019°. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.$

2020. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

2021. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$

2022. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$

2023. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$

2024. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C.$

2025°. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$

2026. $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|.$

2027. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

2028. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C.$

2029. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C.$

2030. $\frac{x}{8} - \ln|x+1| - \frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3} + C.$

2031°**.** $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8}\ln|x-1| + \frac{1}{8}\ln|x+1| + C.$

2032. $\frac{1}{x-1} + \ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|} + C.$

2033. $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + 20\ln|x-3| - \frac{47}{4}\ln|x-2| + C.$

2034. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)} + C.$

2035. $C - \frac{x}{(x^2-1)^2}.$

2036. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

2037°**.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

2038. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

2039. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$

2040. $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg}x + C.$

2041. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$

2042. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$

2043°**.** $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

2044. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} + \operatorname{arctg}x - \frac{7}{(x-1)^2}\right] + C.$

2045. $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$

2046. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$

***2047.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$ (В знаменателе подынтегрального выражения прибавить и вычесть $2x^2$.)

2048°**.** $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

2049. $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln(x^2+1) + \frac{7}{288}\ln(x^2+4) - \frac{1}{24(x^2+4)} + C.$

2050. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C.$

2051. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + C.$

2052. $\frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$

2053. $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$

2054°**.** $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48}\operatorname{arctg}x + C.$

2055. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right) + C.$

2056. $\frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2\ln(x^2+x+1) + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + {}$ ${}+ 2x + C.$

2057. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg}x + C.$

2058. $C - 6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}.$

2059°**.** $\frac{1}{x^2(x^2+1)} + \ln\sqrt{x^2+1} + C.$

2060. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{x^2+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x + C.$

2061. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3(x^3+1)} + C.$

2062. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + \frac{3(x+1)}{x^2+2x+10} + \frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right] + C.$

2063. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x}{4(x^2+2x+2)^2} + C.$

2064. $C - \frac{x}{8(x^2+4)} - \frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \operatorname{arctg}(x+2).$

2065. $C - \frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2} - \frac{57}{8}\operatorname{arctg}x.$

2066. $\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)} + \ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2} + C.$

2067. $\left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{5}\right)\frac{1}{x(3-2x^2)^2} + \frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right| + C.$

2068. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C.$

2069. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3\ln(1+\sqrt[12]{x}) +$ $+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$

2070°. $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{8}(x+1)^{4/3} + \frac{1}{7}(x+1)^{7/6} - \frac{1}{6}(x+1) +\right.$ $\left.+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6} - \frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right] + C.$

2071. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$

2072. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x} + C.$

2073. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16} - \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4}\right] + C.$

2074°. $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}} + C$, где $u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

* **2075.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$. Умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt[4]{x-1}$ и вынести множители за знак радикала.

2076. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5} + C.$

2077°. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right] + C.$

2078. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1} - 1) - \frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right] +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$

2079. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C.$

2080. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$, где $u = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

2081. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$

2082. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C.$

2083°. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C.$

2084. $6u + 2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}} - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$, где $u = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

2085. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}} + C$, где $u = \sqrt[3]{1+x^5}$.

2086. $C - \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} -$ $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|.$

2087. $C - \frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$.

2088°. $\frac{u}{2(u^3+1)} - \frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C$, где $u = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

2089. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13} - \frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10} + \frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7} - \frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right] + C$, где $u = 1 + \sqrt[4]{x}$.

2090. $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5) + C$.

2091. $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$.

2092. $\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$.

2093. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{2}x + C$.

2094. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2\ln|\operatorname{tg} x| + C$.

2095°. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x} + C$.

2096. $\frac{1}{\cos x-1} + C$.

2097. $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2} + C$.

2098. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x + \frac{5}{4}\cos^2 x + \frac{15}{18}\right) + C$.

2099. $x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$.

2100. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$.

2101. $x - \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$.

2102°. $C - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2103. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right| + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$.

2104. $C - \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$.

2105. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$.

2106. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right| + C$.

2107. $\ln\frac{|C\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}$.

2108. $\ln\frac{|C\sin x|}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}$.

2109. $\frac{1}{2}[x + \ln|\sin x + \cos x|] + C$.

2110°. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$.

2111. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$.

2112. $\ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$.

2113. $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4} - \frac{1}{4}\ln|\cos x - \sin x| + C$.

2114. $\frac{4}{25}x - \frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)} - \frac{3}{25}\ln|\cos x| + C$.

2115. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)} + \frac{4}{15\sqrt{15}}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x} + C$.

2116. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$.

2117. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C$.

2118°. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$.

2119. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{2}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$.

2120. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg} x}{b} + C$.

2121. $C - \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

2122. $\ln\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C$.

2123. $2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + C$ для значений x, удовлетворяющих неравенству $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \geqslant 0$, и $-2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + C$ для значений x, удовлетворяющих неравенству $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \leqslant 0$.

2124°. $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$.

* **2125.** $C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}$. (Положить $u = \operatorname{ctg} x$.)

2126. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + C$.

2127. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}\right) + C$.

2128. $2\arcsin\sqrt{\sin x} + C$.

2129. $C - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x(2 + \operatorname{tg}^2 x)\sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}$.

2130. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}} - \ln\frac{1 + \sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1 - \sqrt{\cos\frac{x}{2}}} + C$.

2131°. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) + \arcsin(\sin x - \cos x)\right] + C$.

2132. $\operatorname{sh} x + C$.

2133. $\operatorname{ch} x + C$.

2134. $\operatorname{th} x + C$.

2135. $x + C$.

2136. $\frac{1}{2a}\operatorname{sh} 2ax + C$.

2137°. $\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x}{2} + C$.

2138. $x - \operatorname{th} x + C$.

2139. $x - \operatorname{cth} x + C$.

2140. $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$.

2141. $\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C$.

2142. $x - \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + C$.

2143°. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$.

2144. $\ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{cth}^4 x + C$.

2145. $\ln|\operatorname{th} x| + C$.

2146. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$.

2147. $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2} + C$.

2148. $\frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{|1 - \sqrt{\operatorname{th} x}|} - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x} + C$.

2149°. $x\operatorname{th} x - \ln\operatorname{ch} x + C$.

2150. $C - \frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

* **2151.** $\ln\frac{|cx|}{2 + x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. (Можно применить подстановку, например, $x = \frac{1}{z}$.)

2152. $\frac{1}{2}\arccos\frac{2 - x}{x\sqrt{2}} + C$.

2153. $\arcsin\frac{x - 1}{x\sqrt{2}} + C$.

2154. $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$.

2155. $\ln|x+1+\sqrt{2x+x^2}|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C.$

2156°. $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|.$

2157. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$

2158. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|+C.$

2159. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C.$

2160°. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C.$

2161. $C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+$
$+2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|.$

2162. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2163. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$

2164. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

2165. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

2166°. $C-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}.$

2167. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

2168. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$

2169. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|+C.$

2170. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+$
$+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

2171°. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C.$

2172. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

2173. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C.$

2174. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+3x+4)}}{x+1}+C.$

2175°. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}.$

2176. $\frac{1}{3}\left[x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right]+C.$

2177. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C.$

2178. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C.$

2179. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$

2180. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C.$

2181. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2182. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

2183°. $2\sqrt{x+1}[\ln|x+1|-2]+C.$

2184. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C$.
2185. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C$.
2186. $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|x+2\sqrt{x}+2|+C$.
2187. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\arcsin x}{x}+C$.
2188°. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C$.
2189. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)+C$.
2190. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}+\frac{13}{9}\right)+C$.
2191. $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$.
2192. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$.
2193°. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.
2194. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x}}{x}+C$.
2195. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.
2196. $3\left[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\arcsin u\right]+C$, где $u=\sqrt[3]{x}$.
2197. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$.
2198. $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$.
2199. $\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right]+C$, где $z=x^5$.
2200°. $-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}$.
2201. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.
2202. $\frac{2}{b^2\sin 2\alpha}\ln\left|\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x)}\right|+C$, где $\alpha=\arccos\frac{a}{b}$, если $a^2<b^2$; $\frac{1}{a^2\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}+C$, где $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, если $a^2>b^2$.
2203. $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.
2204. $\frac{x}{\ln x}+C$.
2205. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C$.
2206°. $\frac{1}{2}e^x\left[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x\right]+C$.
2207. $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$.
2208. $\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}^2x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C$.
2209. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4x-\operatorname{ctg}^4x)+2(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x)+6\ln|\operatorname{tg}x|+C$.
2210. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C$.
2211. $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.
2212°. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}}+\ln(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x)+C$.
2213. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C$.
2214. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left[\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right]$.
2215. $\frac{e^x}{1+x}+C$.

2216. $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$

2217. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{3x^3} - \frac{1}{6x^2} + C.$

2218°. $C - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{4} + \frac{x}{4(1+x^2)}.$

2219. $\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4(x+1)} + C.$

2220. $x - \log_2|1-2^x| + \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^x} + \frac{1}{2(1-2^x)^2} + \frac{1}{3(1-2^x)^3}\right] + C.$

2221. $\operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}) + C.$

2222. $\ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} + C.$

2223°. $x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$

2224. $\frac{35}{128}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^2 2x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C.$

2225. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{(1+x^2)^2} + C.$

2226. $\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + C.$

2227. $C - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x).$

2228°. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

* **2229.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C.$ (Разделить числитель и знаменатель на x^2 и применить подстановку $x + \frac{1}{x} = z$.)

2230. $e^{\sin x}(x - \sec x) + C.$

К ГЛАВЕ 7

2231. $2(\sqrt{8}-1)/3.$

2232. $7/72.$

2233°. $-5(\sqrt[5]{16}-1).$

2234. $7\frac{2}{3}.$

2235. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0.$

2236. $12.$

2237. $0{,}2(3-1)^5.$

2238. $3\ln\frac{b}{b-a}.$

2239°. $1/4.$

2240. $\pi/2.$

2241. $1 + \frac{1}{2}\lg e.$

2242. $e - \sqrt{e}.$

2243. $\frac{\pi}{6n}.$

2244°. $2(\sqrt{3}-1).$

2245. $4/3.$

2246. $\ln\frac{3}{2}.$

2247. $0{,}2\ln\frac{4}{3}.$

2248. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}.$

2249. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$

2250°. $\pi/6.$

2251. 2.
2252. 2/7.
2253. 4/3.
2254. $\frac{\pi}{2\omega}$.
2255. $-0{,}083\ldots$.
2256°. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-a+\frac{\operatorname{ctg}^3 a}{3}-\operatorname{ctg} a$.
2257. 1.
2258. $-\sqrt{2}/3$.
2259. $1-2/e$.
2260. $\pi/2-1$.
2261. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
2262°. $\pi^3-6\pi$.
2263. $2-\frac{3}{4\ln 2}$.
2264. 1.
2265. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$.
2266°. $\frac{\pi a^2}{4}$.
2267. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.
2268. $6-2e$.
2269°. 1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0{,}429$; 3) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$.

* **2270.** $J_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$. Если n нечетное, то $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)(m+1)}$; если m нечетное, то $J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)(n+1)}$; если m четное, n четное, то $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1\cdot(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

2271°. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$.
2272. $11/48+5\pi/64$.

* **2274.** $p!q!/(p+q+1)!$ Положить $x=\sin^2 z$ и использовать результат задачи 2270.

2275. $7+2\ln 2$.
2276. $2-\pi/2$.
2277°. 32/3.
2278. $5/3-2\ln 2$.
2279. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$.
2280. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

* **2281.** $\frac{5}{16}\pi$. Полагая $x=2z$, преобразуем данный интеграл в $2\int_0^{\pi/2}\sin^6 z\,dz$.

* **2282.** 8/35. Положить $x=z/2$.

2283. $\pi/32$.
2284°. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.
2285. 8/15.
2286. $\sqrt{3}-\pi/3$.

2287. $\frac{1}{32}\left(\pi + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 8\right)$.
2288. $3\pi/16$.
2289°. $\pi/16$.
2290. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2-\sqrt{3})$.
2291. $\pi/4$.
2292. $\sqrt{3}/24$.
2293. $\pi/3$.
2294°. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.
2295. $\sqrt{6}/27 + \pi\sqrt{2}/48$.
2296. $20/9$.
2297. $2\ln\frac{6}{5} \approx 0{,}365$.
2298. $2/\pi$; $1/2$.
2299°. $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{e^2+1}$.
2300. При $a = e$.
2301. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.
2302. $2/45$.
2303. $8\ln 3 - 15\ln 2 + \frac{13}{8}$.
2304°. $\frac{5}{192}(5 + 7\sqrt[5]{125})$.
2305. $\pi/6$.
2306. $a^2\left[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2+1})\right]$.
2307. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.
2308. $848/105$.
2309°. $4-\pi$.
2310. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.
2311. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
2312. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.
2313. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$.
2314. $\frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$.
2315°. $\frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.
2316. $\frac{19}{27} - \frac{5}{6\sqrt{6}}$.
2317. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$.
2319. $x = 2$.
2320°. $x = \ln 4$.

* **2322.** Использовать соотношения $4 - x^2 \geqslant 4 - x^2 - x^3 \geqslant 4 - 2x^2$, справедливые при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

* **2323.** Воспользоваться неравенствами $\sqrt{1-x^2} \leqslant \sqrt{1-x^{2n}} \leqslant 1$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $n \geqslant 1$.

2324°. $1{,}098 < I < 1{,}110$.

* **2325.** Воспользоваться для оценки снизу неравенством $1+x^4 < (1+x^2)^2$, а для оценки сверху — неравенством Коши–Буняковского.

2326. $I(1) \approx 1{,}66$ — наибольшее значение, $I(-1/2) \approx -0{,}11$ — наименьшее значение.

2327. Минимум при $x = 1$ $(y = -17/22)$, точки перегиба $\bigl(2, -4/3\bigr)$ и $\bigl(4/3, -112/81\bigr)$.

2332. 1) Заменить переменную интегрирования по формуле $t = -x$, разбить отрезок $[-a, -x]$ на два отрезка: $[-a, a]$ и $[a, -x]$, и учесть, что интеграл от нечетной функции на отрезке $[-a, a]$ равен нулю. 2) Нет, если $a \neq 0$; да, если $a = 0$.

***2333.** Положить $t = 1/z$.

2338°. Каждый из интегралов равен $\pi/4$.

***2339.** Положить $x = \pi - z$. Интеграл равен $\pi^2/4$.

***2340.** Разбить отрезок $[a, a+T]$ на отрезки $[a, 0]$, $[0, T]$ и $[T, a+T]$, затем, пользуясь свойством $f(x) = f(x+T)$, показать, что $\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x)\,dx$.

***2341.** Требуемое для доказательства равенство эквивалентно равенству $\int_x^{x+T} f(z)\,dz = 0$. Убедиться, что интеграл в левой части этого равенства не зависит от x, и затем положить $x = -\frac{T}{2}$.

2342°. $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

2343. Подстановка $z = \operatorname{tg}(x/2)$ незаконна, потому, что функция $\operatorname{tg}(x/2)$ при $x = \pi$ разрывна.

***2344.** Для оценки I_n использовать, что I_n убывает при увеличении n.

***2345.** Заменить переменную интегрирования по формуле $z = \frac{x+t}{2}$ и учесть свойство интеграла от четной функции.

***2346.** Заменить переменную интегрирования по формуле $z = k\omega^2 x^2$ и применить затем правило Лопиталя.

2347. По правилу прямоугольников $\pi \approx 2{,}904$ (с недостатком) и $\pi \approx 3{,}305$ (с избытком). По формуле трапеций $\pi \approx 3{,}104$. По формуле Симпсона $\pi \approx 3{,}127$.

2348. По правилу прямоугольников $\pi \approx 3{,}04$ (с недостатком) и $\pi \approx 3{,}24$ (с избытком). По формуле трапеций $\pi \approx 3{,}140$. По формуле Симпсона $\pi \approx 3{,}1416$ (верны все знаки).

2349°. $\ln 10 \approx 2{,}31$, $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}433$.

2350. $\approx 0{,}84$.

2351. $\approx 1{,}09$.

2352. $\approx 2{,}59$.

2353. $\approx 0{,}950$.

2354. $\approx 1{,}53$.

2355. $\approx 0{,}985$.

2356. $\approx 0{,}957$.

2357. ≈ 239 м^2 (по формуле Симпсона).

2358. $\approx 5{,}7$ м^2 (по формуле Симпсона).

2359. $\approx 1950\,\text{мм}^2$.
2360. $\approx 10{,}9$.
2361. $\approx 36{,}2$.
2362. $\approx 98{,}2$.
2363. $\approx 9{,}2$.
2364. $\approx 569\,\text{мм}^2$.
2365. $\approx 138\,\text{мм}^2$.
2366°. 1/3.
2367. Расходится.
2368. $1/a$.
2369. Расходится.
2370. π.
2371. Расходится.
2372. $1 - \ln 2$.
2373. 1/2.
2374°. $\pi/4$.
2375. $\ln \frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$.
2376. 1/2.
2377. 1/2.
2378. Расходится.
2379°. 2.
2380. 1/2.
2381. $\frac{a}{a^2+b^2}$, если $a > 0$; расходится, если $a \leqslant 0$.
2382. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.
2383. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
2384°. $\pi/2$.
2385. $1/2 + \pi/4$.
2386. Сходится.
2387. Расходится.
2388. Сходится.
2389. Расходится.
2390. Сходится.
2391°. Расходится.
2392. Расходится.
2393. Сходится.
2394. $\pi/2$.
2395. Расходится.
2396°. 8/3.
2397. $-1/4$.
2398. 1.
2399. Расходится.

2400. 2.
2401°. π.
2402. $\pi(a+b)/2$.
2403. $33\pi/2$.
2404. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2405. $\pi/\sqrt{3}$
2406. 14 4/7.
2407. 10/7.
2408°. Расходится.
2409. $6-\frac{9}{2}\ln 3$.
2410. $-2/e$.
2411. Расходится.
2412. Сходится.
2413. Расходится.
2414. Сходится.
2415°. Сходится.
2416. Расходится.
2417. Сходится.
2418. Нет.
2419. При $k<-1$ сходится, при $k\geqslant -1$ расходится.
2420. 1)° При $k>1$ сходится, при $k\leqslant 1$ расходится. 2) $I=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, если $k>1$; расходится, если $k\leqslant 1$.
2421. При $k<1$ сходится, при $k\geqslant 1$ расходится.
2422. Расходится при любом k.
2423. Сходится при совместном выполнении неравенств $k>-1$ и $t>k+1$.
2424°. При $m<3$ сходится, при $m\geqslant 3$ расходится.
2425. При $k<1$ сходится, при $k\geqslant 1$ расходится.
2426. π.
* **2427.** $5\pi/3$. Положить $x=\cos\varphi$ и проинтегрировать по частям.
2428. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi-\frac{3}{2}\ln 2$.
2429. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$.
2430. $n!$.
2431°. $n!/2$.
2432. $(-1)^n n!$
* **2433.** 1) $\frac{(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{m(m-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{m(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}$. Положить $x=\sin\varphi$.
* **2434.** $2\frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}$. Положить $x=\sin^2\varphi$.
2435°. $\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$ ($I=1$ при $\alpha=\pi$).

****2436.** Для доказательства равенства интегралов положить в одном из них $x = 1/z$. Затем вычислить их сумму, воспользовавшись тождеством

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

***2437.** Представить интеграл в виде суммы двух интегралов: $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_{+1}^{+\infty}$; во втором интеграле положить $x = \frac{1}{y}$.

2438. 0.

2439. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

2440. $\sqrt{\pi}$.

***2441.** $\sqrt{\pi}/4$. Интегрировать по частям.

2442°. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2443. $\pi/2$.

2444. $\pi/2$, если $a > 0$; 0, если $a = 0$; $-\pi/2$, если $a < 0$.

2445. $\pi/2$, если $a > b$; $\pi/4$, если $a = b$; 0, если $a < b$.

***2446°.** $\pi/2$. Интегрировать по частям.

***2447.** $\pi/4$. Представить числитель в виде разности синусов кратных дуг.

***2448.** $\pi/4$. Воспользоваться методами решения задач 2446 и 2447.

***2449°.** Полагая $y = \frac{\pi}{2} - z$, приводим $\varphi(x)$ к виду $\varphi(x) = = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin z\,dz$. В соответствии с формулой $\sin z - 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$ разбиваем интеграл на три, из которых один находим непосредственно. Два других интеграла при помощи замены переменной сводятся к интегралам типа первоначального; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2451. $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

***2452.** $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Интегрировать по частям.

***2453.** $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Заменой переменной сводится к предыдущей задаче.

2454. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

К ГЛАВЕ 8

2455. 16/3.

2456°. 9/4.

2457. $16p^2/3$.

2458. 1/3.

2459. $\frac{32}{3}\sqrt{6}$.

2460. 2 1/4.

2461°. $2\pi + \frac{4}{3}$ и $6\pi - \frac{4}{3}$.

2462. $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ и $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$.

2464. $\frac{b^2c}{a} - ab\ln\frac{c+b}{a} = b\left[\varepsilon b - a\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-1})\right]$, где ε — эксцентриситет.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right]$ и $a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$.

2466. $S_1=S_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}46$; $S_2=2(\pi-S_1)$.

2467°. $\pi/2-1/3$.

2468. $1/12$.

2469. $1/12$.

2470. $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n оба четны; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n оба нечетны; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n разной четности.

2471. 1) $3/14$; 2) $73\,1/7$.

2472. 1 (фигура состоит из двух частей, площади которых равны между собой).

2473°. $8/15$.

2474. $3\pi/4$.

2475. $4/3$.

2476. $\pi a^2/8$.

2477°. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2478. $e+1/e-2$.

2479. 4.

2480. $3(e^3-4)/e$.

2481. $18/e^2-2$.

2482. 1) $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$; 2) $b-a$.

2483. $3-e$.

2484°. $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$.

2485. $2-\sqrt{2}$.

2486. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2487. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$.

2488. $\sqrt{2}-1$.

2489. $\pi/4$.

2490°. $3\pi a^2$.

2491. $3\pi a^2/8$.

2492. $6\pi a^2$.

2493. 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$.

2494. 1)° $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $8/15$.

2495. 1) $4\pi^3a^2/3$; 2) $76a^2\pi^3/3$.

2496. $\pi a^2/4$.

2497. $\pi a^2/4$.

2498°. $18\pi a^2$.

2499. $a^2(4-\pi)/8$.

2500. $37\pi/6-5\sqrt{3}$.

2501. $51\sqrt{3}/16$.

2502. a^2.

***2505.** $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Для построения линии следует рассматривать изменение φ от 0 до 3π.

2506. $\pi/4$.

2507. a^2.

2508. $a^2(1+\pi/6-\sqrt{3}/2)$.

2509°. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$

2510. a^2.

2511. $\pi/\sqrt{2}$.

2512. π.

2513. 2.

2514°. $3\pi a^2$.

2515. 4π.

***2516.** 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Воспользоваться тем, что $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ (интеграл Пуассона).

2517. $\pi a^2/2$.

2518°. $2-\pi/2$ и $2+\pi/2$.

2519. $a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$.

2521°. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2522. $\ln 3-\frac{1}{2}$.

2523. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

2524. $\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

2525. $4\frac{26}{27}$.

2526°. $4a\sqrt{3}$.

2527. $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{8}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

2528°. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$.

2529. 2.

2530. 8.

2531. При $t=2\pi/3$ $[x=a(2\pi/3-\sqrt{3}/2),\ y=3a/2]$.

2532°. При $t=\pi/6$ $(x=3\sqrt{3}R/8,\ y=R/8)$.

***2533.** $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Положить $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

2535. $a\ln\frac{a}{y}$.

2536. $\pi^2 R/2$.

2537°. $\pi^3/3$.

2538. $4\sqrt{3}$.

2541. $2(e^t-1)$.

2543. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

2545. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2546.$^\circ$ $8a$.

2547. $\frac{3}{2}\pi a$.

2549. k должно иметь вид $\frac{2N+1}{2N}$ или $\frac{2N}{2N-1}$, где N — целое число.

2550. 4.

2551.$^\circ$ $\ln\frac{\pi}{2}$.

***2554.** Доказать, что длина эллипса может быть записана в виде

$$L=4\int\limits_0^{\pi/4}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$

и применить теорему об оценке интеграла.

2555. 2π.

2556. 1)$^\circ$ $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

2557. $\frac{8}{15}\pi h^2 a$.

2558. $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$.

2559. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

2560.$^\circ$ $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right]$.

2561. $3\pi/10$.

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$.

2563. $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$.

2564. $8\pi/3$.

2565.$^\circ$ $2\pi^2$.

2566. $\frac{\pi a^3}{4a}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$.

2567. 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}$.

2568. $5\pi^2 a^3$.

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right)$.

2570.$^\circ$ $\frac{32}{105}\pi a^3$.

2571. $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$.

2572. $\frac{\pi^2}{2}$.

2573. $\pi e/2$.

***2574.** 1)$^\circ$ π; 2)$^\circ$ $\pi\sqrt{\pi/2}$. См. указание к задаче 1516.

***2575.** $3\pi\sqrt{2\pi}/32$. См. указание к задаче 2516.

***2576.** π^2. Воспользоваться тем, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (интеграл Дирихле).

***2577.** $2\pi^2a^3$. Целесообразно перейти к параметрическому заданию, положив $x=2a\sin^2 t$, $y=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t}$.

2578. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

***2579.**$^\circ$ $\frac{4}{3}\pi abc$. Применить формулу $V=\int_{x_1}^{x_2}S(x)\,dx$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения.

2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) 36π.

2581. $v_1=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}-11/3)$, $v_2=\pi\sqrt{2}(2\sqrt{6}+11/3)$.

2582. $v_1 = v_3 = 4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$, $v_2 = 8\pi(4-\sqrt{3})$.

2583. $8\pi\sqrt{6}/3$.

2584. 8π.

***2585**°. $\frac{2}{3}R^2H = 400\,\text{см}^3$. Принять за ось абсцисс ось симметрии основания.

2586. $\frac{4}{15}ahH = 128\,\text{см}^3$.

2587. $\frac{2}{3}abH = 133\frac{1}{3}\,\text{см}^3$.

***2588.** $\frac{2}{3}\pi R^2H$. Площадь симметричного параболического сегмента равна $\frac{2}{3}ah$, где a — основание сегмента, а h — «стрелка».

***2589.** $\frac{R^2H}{6}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$ и $\frac{R^2H}{6}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. (См. указание к задаче 2588.)

2590°. $8a^3/3$.

2591. $8\pi r^3/3$.

2592. $\frac{16}{3}R^3$.

2593. $\frac{4}{3}R^2H$.

2594. $\frac{56}{3}\pi a^2$.

2595°. $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3}-1\right)$.

2596. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

2597. $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ и $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, где ε — эксцентриситет эллипса.

2598. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

2599. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$.

2600. $3\pi a^2$.

2601°. $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$.

2602. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi-2)$.

2603. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

2604. $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

2605°. $\frac{32}{5}\pi a^2$.

2606. $4\pi^2r^2$.

2607. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

2608. $\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$.

2609. $4\pi a^2$.

2610. $ah^2/2$.

2611°. $a^3/6$, $a^3/6$, $a^3\sqrt{2}/12$.

2613. Центр масс лежит на оси симметрии сегмента на расстоянии $\frac{2}{5}h$ от основания.

2614. Для S_1: $\xi = \frac{3}{5}a$, $\eta = \frac{3}{8}b$; для S_2: $\xi = \frac{3}{10}a$, $\eta = \frac{3}{4}b$.

2615°. $\xi = 0$, $\eta = 2r/\pi$.

2616. $\xi = 0$, $\eta = 4r/3\pi$.

2617. Центр масс лежит на биссектрисе центрального угла, стягивающего дугу, на расстоянии $2r\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра.

2618. $\xi = a/5$, $\eta = a/5$.

2619. $\xi = 4a/(3\pi)$, $\eta = 4b/(3\pi)$.

2620.° $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon$, где ε — эксцентриситет эллипса.

2621. $\xi = \pi/2$, $\eta = \pi/8$.

2622. $\pi/2 + 4/5$.

2623. $\pi/12 + \sqrt{3}/8$.

2624. $3/20$.

2625.° $\xi = 5a/8$, $\eta = 0$.

2626. $\xi = 0$, $\eta = a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$.

2628. $\xi = \pi a$, $\eta = 4a/3$.

2629. $\xi = \pi a$, $\eta = 5a/6$.

2630. $\xi = 2a/5$, $\eta = 2a/5$.

2631.° $\xi = 256a/(315\pi)$, $\eta = 256a/(315\pi)$.

2633. $\xi = 6a(4 - \pi^2)/\pi^3$, $\eta = 2a(\pi^6 - 6)/\pi^2$.

2634. Центр масс лежит на оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{2}{3}\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ от центра круга.

2635.° $\xi = 5a/6$, $\eta = 0$.

2636. $\xi = \sqrt{2}\pi a/8$, $\eta = 0$.

2638. $\xi = -\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$.

2639. $\xi = 4a/5$, $\eta = 4a/5$.

2640. $3R/8$.

2641.° Центр масс находится на оси симметрии на расстоянии $R/2$ от центра.

2642. $H/3$, $\frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})}$, $H/4$.

2643. $h/3$.

2644. $\frac{l}{5}(a^2 + ab + b^2)$.

2645.° $\frac{\pi R^3}{2} = M\frac{R^2}{2}$ (M — масса полуокружности).

2646. $\frac{\sqrt{(1+e)^3} - 2\sqrt{2}}{3}$.

2647. $I_x = \frac{256}{15}a^3$; $I_y = 16a^3\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right)$.

2648. $ab^3/3$.

2649. 1) $ah^3/12$; 2)° $ah^3/4$; 3) $ah^3/36$.

2650.° $\pi R^4/8$.

2651.° $\pi R^4/2$.

2652. $\pi ab^3/4$ и $\pi ba^3/4$.

2653. $\pi R^4 H/2$.

2654. $\pi R^4 H/10$.

2655. $8\pi R^5/15$.

2656. $8\pi ab^4/15$, где $2a$ — величина оси, вокруг которой происходит вращение.

2657. $\pi R^4 H/6$.

2658. $56\pi/15$.

2659. 1) $I_x = \pi(e^4 - 1)/8$; 2) $I_y = 4\pi(3 - e)$.

2660. MR^2, где M — масса боковой поверхности цилиндра.

2661°. $MR^2/2$.

2662. $2MR^2/3$.

2663. $9\pi a^3/2$.

2664. $6\pi^2 ab^2$.

2665°. Объем $3\sqrt{2}\pi^2 a^3/8$, поверхность $6\sqrt{2}\pi a^2$.

2666. Объем $12\pi^3 a^3$, поверхность $32\pi^2 a^2$.

2667. Ось вращения должна быть перпендикулярна к диагонали квадрата; ось вращения должна быть перпендикулярна к медиане.

2668. $\approx 23{,}7$ м.

2669. $x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0\right)$.

2670°. $\frac{kmM}{a(a+l)}$, $\frac{a+l}{a}M$, $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$.

2671. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$.

2672. $kmMa/\sqrt{(R^2+a^2)^3} = kmM\cos^3\varphi/a^2$, где φ — угол между прямыми, соединяющими точку C с центром кольца и с любой из точек кольца; kmM/R.

2673. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

2674. $2\pi km\sigma$.

* **2675.** $2\pi km\gamma h\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r^2)}}\right) = 2\pi km\gamma h(1-\cos\alpha)$, где α — угол между образующей конуса и его осью. Воспользоваться решением задачи 2673.

2676. $2km\gamma$.

* **2678.** $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. Сначала подсчитать силу взаимодействия элемента ds первого стержня со вторым стержнем (воспользоваться решением задачи 2670), а затем найти всю силу взаимодействия.

2679. $g^2M^3/(6m^2)$.

2680°. $\frac{\pi H^2 gd}{12}(R^2 + 2Rr + 3r^2)$.

2681. $\approx 1{,}63 \cdot 10^{12}$ *Дж.*

2682. $3{,}5325 \cdot 10^6$ *Дж.*

2683. $\pi gdR^2H^2/12$, $\pi gdR^2H^2/4$. Величина работы в ответах к задачам 2683–2686 получится в джоулях, если брать расстояние в метрах, а плотность — в кг/м^3.

2684. $\pi gdR^4/4 \approx 1018$ *Дж.*

2685°. $\pi gdR^2H^2/6 \approx 2{,}68 \cdot 10^5$ *Дж.*

2686. $\frac{4}{15}gdabH^2 = 2{,}4 \cdot 10^3$ *Дж.*

2687. $Sl^3\omega^2\gamma/6 \approx 4{,}2$ *Дж.*

2688. $ab^3d\gamma\omega^2/6 \approx 11{,}6$ *Дж.*

2689. $ah^3d\omega^2\gamma/24 \approx 0{,}5$ *Дж.*

2690°. $ha^3d\omega^2\gamma/60 \approx 0{,}15$ *Дж.*

2691. $\pi R^4H\omega^2\gamma/4$.

2692. $MR^2\pi^2n^2/3600$; $MR^2(3\pi-8)\pi n^2/3600$.

2693. 1) $ah^2/6$; 2) в два раза.

2694. $a\sqrt[3]{2}/2$.

2695°. $2{,}22\cdot10^5$ Н.

2696. $\frac{2}{3}gda^2b$.

2697. $abgd\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)$.

2699. 1) $gd^2H^2S/2=320$ *Дж*; 2) $\frac{1}{2}gsH^2(1-d)^2=20$ *Дж*.

2700°. $\frac{4}{3}g\pi R^4$.

2701. $\approx 0{,}206$ см^2.

2702. 1) $\approx 33{,}2$ с; 2) $\approx 64{,}6$ с.

2703. ≈ 1 час 6 мин 53 с.

2704. $\frac{2bL\sqrt{2a}}{3S\sqrt{g}}(2\sqrt{2}-1)$.

2705°. $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{3/2}-H^{3/2}\right]$; при $H=0$: $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}h^{3/2}=\frac{2\sqrt{2g}}{3}S\sqrt{h}$, где S — площадь щели.

2706. 1) $\approx 2{,}4$ с; 2) $\approx 6{,}3$ с; 3) ≈ 53 с; 4) при $t\to\infty$.

2707. ≈ 34 *Дж*.

2708. 1) 1. $\approx 71{,}6$ *Дж*; 2. ≈ 166 *Дж*; 3. ≈ 238 *Дж*; 2) при неограниченном расширении газа работа неограниченно увеличивается.

2709°. $1{,}6\cdot10^4$ *Дж*.

2710. ≈ 82 мин.

2711°. Немного больше 5°.

2712. $\frac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$.

2713. 1) $4\cdot10^{-6}$ *Дж*; 2) $6\cdot10^{-6}$ *Дж*.

2714. 5 см.

2715. ≈ 946 *Кл*.

2716. ≈ 1092 *Кл*.

2717°. ≈ 5110 *Кл*.

2718. $E_0^2/2$. Эффективное напряжение переменного тока равно $E_0/\sqrt{2}$.

2719. $\frac{E_0I_0}{2}T\cos\varphi_0$.

2720. ≈ 7 мин.

2721. $\approx 2{,}915$ л.

2722. 1) $H_1=H\frac{\ln a-\ln c}{\ln a-\ln b}\approx 15$ см; 2) $\approx 0{,}125\%$.

2723°. 1/1024 от первоначального количества.

2724. $\approx 2{,}49$ г.

2725. 8/9 г.

2726. $\approx 37{,}3$ мин.

К ГЛАВЕ 9

***2727.** $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, $S=1$. Представить каждый член ряда в виде суммы двух слагаемых.

2728°. $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, $S = \frac{1}{2}$.
2729. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $S = \frac{1}{3}$.
2730. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$, $S = \frac{11}{18}$.
2731. $S_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$, $S = \frac{23}{90}$.
2732. $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S = \frac{1}{4}$.
2733°. $S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$, $S = \frac{3}{2}$.
2734. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.
2735. $S_n = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$, $S = \frac{1}{8}$.
2736°. $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, $S = \frac{\pi}{4}$.
2737. Сходится.
2738. Сходится.
2739. Расходится.
2740. Сходится.
2741°. Расходится.
2742. Расходится.
2743. Сходится.
2744. Расходится.
2745. Расходится
2746°. Сходится.
2747. Сходится.
2748. Расходится.
2749. Сходится.
2750. Расходится.
2751. Сходится.
2752°. Сходится.
2753. Расходится.
2767. Сходится.
2768°. Расходится.
2769. Сходится.
2770. Сходится.
2771. Сходится.
2772. Расходится.
2773. Расходится.
2774°. Сходится.
2775. Расходится.
2776. Расходится.
2777. Расходится.
2778. Сходится.
2779. Сходится.

2780°. Расходится.

2781. Сходится.

2782. Расходится.

2783. Сходится.

***2784.** Расходится. Воспользоваться формулой

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

или неравенством $\sin x > 2x/\pi$, если $0 < x < \pi/2$.

2790°. Сходится, но не абсолютно.

2791. Сходится абсолютно.

2792. Сходится, но не абсолютно.

2793. Сходится абсолютно.

2794°. Сходится абсолютно.

2795. Расходится.

2796. Сходится, но не абсолютно.

2797. Сходится абсолютно.

2798°. Сходится, но не абсолютно.

2799. Расходится.

2802. $-1 < x < 1$.

2803°. $\frac{1}{e} < x < e$.

2804. $-1 < x < 1$.

2805. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2806. $-1\ lex < 1$.

2807°. $x < -1$ и $x > 1$.

2808. $-1 < x < 1$.

2809. $-1 \leqslant x < 1$.

2810°. $x \neq \pm 1$.

2811. При любом x.

2812. $-2 < x < 2$.

2813. При любом x.

2814°. $x > 0$.

2815. $x > 0$.

2816. $x \geqslant 0$.

2822. 11 членов.

***2823.** Воспользоваться неравенством $\ln(1 + \alpha \leqslant \alpha$.

2825. $f(0) = 1/9$; $f(\pi/2) = -1/101$; $f(\pi/3) = 44/1001$; $f(1) = 0{,}049$; $f(-0{,}2) = 0{,}108$.

2827. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

2828. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2829°. $(x+1)\ln(x+1) - x$.

2830. $1/2$.

2831. 0,2.

***2832.** $\ln\frac{3}{2}$. Использовать соотношение $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ldots = \frac{\sin x}{x}$.

***2833.** $\pi^3/12$. Воспользоваться формулой $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2834. 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$.

2835°. $\ln 2$.

2836. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

***2837.** Данный ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком интервале. Действительно, общий член ряда производных имеет вид $\pi\cos(2^n\pi x)$. Сколь бы мал ни был интервал (α,β) и где бы на числовой оси он ни лежал, всегда внутри него найдутся числа вида $k/2^N$, где k — целое, а N — достаточно большое целое положительное число. Но при $x=k/2^N$ ряд производных расходится, так как для всех $n>N$ члены его становятся равными π.

2838. $\frac{1}{(1-x)^2}$ и $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2841. $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-n)^n}{n}+\ldots$.

2842. $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right.$
$\left.\ldots(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-5)(x-1)^n}{n!}+\ldots\right]$.

2843. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$.

2844°. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$.

2845. $1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$.

2846. $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$.

2847. $\cos\alpha\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right]-$
$-\sin\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right]$.

2848. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

2849°. $1-\frac{4x^4}{4!}+\frac{4^2x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}x^{4(n-1)}}{(4n-4)!}+\ldots$.

2850. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$.

2851. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.

2852. $1-\frac{nx^2}{2}+\frac{3n^2-2n}{24}x^4+\ldots$.

2853. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots$.

2854°. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+\ldots$.

2855. $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$.

2856. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$.

2857. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$.

2858°. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$.

2859. $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!} + \ldots$.

2860. $1 - \left[x^2 - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right]$.

2861. $1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots$.

2862. $-\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$.

2863°. $\ln 10 + \left[\frac{x}{10} - \frac{x^2}{2\cdot 10^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n\cdot 10^n} + \ldots\right]$.

2864. $x^2 - \frac{x^3}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n} + \ldots$.

2865. $1 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^{2n}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot 2n} + \ldots\right]$.

2866. $2 - 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots + \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n} + \ldots\right]$.

2867. $1 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}x^6 + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n} + \ldots\right]$.

2868. $x^2 + \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2} + \ldots\right]$.

2869°. $1 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1} + \ldots$, $S = 12$.

2870. 1) -7; 2) $105/16$. 3) $10!/4!$; 4) $8/3$.

2871. $1/6$.

2872. $1/4$.

2873. 1.

2874°. $1/2$.

2875. $2/3$.

2876. $1/3$.

2877. $1/60$.

2878. $-1/10 < x < 1/10$.

2879. $-1 < x \leqslant 1$.

2880°. $-10 \leqslant x < 10$.

2881. $x = 0$.

2882. $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$.

2883. $-\infty < x < +\infty$.

2884. $-1/3 < x < 1/3$.

2885. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2886°. $-1/e \leqslant x < 1/e$.

2887. $x = 0$.

2888. $-1 \leqslant x < 1$.

2889. $-1/e < x < 1/e$.

2890. $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

2891. $x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(-1 < x < 1)$.

2892. $x^2 + \frac{x^4}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n(2n-1)} + \ldots$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

2893°. $4\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots + \frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$ $(-\infty < x < +\infty)$. $1/2e$.

2894. 1,39, погрешность 0,01.

2895. 0,3090, погрешность 0,0001.
2896. 2,154, погрешность 0,001.
2897°. 7,389.
2898. 1,649.
2899. 0,3679.
2900. 0,7788.
2901°. 0,0175.
2902. 1,000.
2903. 0,17365.
2904. 0,9848.
2905°. 3,107.
2906. 4,121.
2907. 7,937.
2908. 1,005.
2909. 3,017.
2910. 5,053.
2911. 2,001.
2912°. 1,0986.
2913. 0,434294.
2914. 0,6990.
2915°. $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots + \left[2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] x^{n-1} + \ldots$
2916. $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right] x^n + \ldots$.
2917. $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{8!} + \ldots$.
2918. $-\frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \ldots$.
2919. $x - x^2 + 2x^3 + \ldots$.
2920°. $C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$.
2921. $C + \ln|x| - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!} + \ldots$
$(-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty)$.
2922. $C + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots$
$(-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty)$.
2923. $C - \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)!} + \ldots$
$(-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty)$.
2924. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$.
2925. $x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.
2926°. $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$ $(-1 < x < 1)$.
2927. $x + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2} + \ldots$
$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.
2928. $x + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{19}}{19} + \ldots + \frac{x^{9n-8}}{9n-8} + \ldots$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.
2929. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4\cdot 8}\frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^n\cdot n!}\frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$
$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

2930°. 0,3230, погрешность 0,0001.

2931. 0,24488, погрешность 0,00001.

2932. 0,4971, погрешность 0,0001.

2933. 3,518, погрешность 0,001.

2934. 0,012, погрешность 0,001.

2935°. 32,830.

2936. 0,487.

2937. 0,006.

2938. 0,494.

2940. 3,141592654.

2941. $x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}x^{2n-1}+\ldots$.

* **2942.** $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots$. Представить x^x в форме $e^{x\ln x}$, разложить в ряд по степеням $x\ln x$ и проинтегрировать выражения вида $x^n\ln^n x$.

2943. 0,6449.

2944. 0,511.

2945°. 1,015.

* **2946.** 3,71. Вычислить площадь посредством формулы $S = 4\int_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$ неудобно, потому что соответствующий ряд при $x=1$ сходится медленно. Следует вычислить площадь сектора, ограниченного линией, осью ординат и биссектрисой первого координатного угла. Это дает ряд быстро сходящийся.

2947. 0,2505.

2948. 3,821.

2949°. 0,119.

2950. 1,225.

2951. (0,347; 2,996).

2952. (1,71; 0,94).

К ГЛАВЕ 10

2953. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$.

2954. $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

y \ x	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	-2	0	2	4	6	8
2	-5	-3	-1	1	3	5
3	-8	-6	-4	-2	0	2
4	-11	-9	-7	-5	-3	-1
5	-14	-12	-10	-8	-6	-4

2956.

$y \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0,32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,82	0,92	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0,61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,02	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2957. 1) 9/16; 2) 1; 3) 16; 2; 2.

2958°. $\frac{\varphi(a)\psi(1/a)-\psi(a)\varphi(1/a)}{\varphi(1)\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2959. Вторая функция изменяется быстрее.

2960. Парабола второго порядка; 1) нет; 2) нет.

***2961.** Положить $m = 1/x$.

2965. Функция не будет однозначной.

2966. 1) 1; 2) 1; 3) 1/5; 4) не определена; 5) 1.

2967. $z = (x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$ $(x+y>0)$; z будет рациональной функцией от u и v, но не от w, t, x и y.

2968. $z = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

2969. $u=(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}\left[(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)^4\right]$; u является целой рациональной функцией относительно ξ и η, x, y и z, но не относительно ω и φ.

2970°. $z = \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v + u$; $u = x^2+y^2$; $v = xy$.

2971. $x = \text{const}$ — парабола, $y = \text{const}$ — парабола, $z = \text{const} \neq 0$ — гипербола, $z = 0$ — пара прямых.

2972. $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ — прямые, $z = \text{const} \neq 0$ — гипербола, $z = 0$ — пара прямых.

2973. $x = \text{const}$ — парабола, $y = \text{const}$ — кубическая парабола, $z = \text{const} \neq 0$ — кривая третьего порядка, $z = 0$ — полукубическая парабола.

2974. $z = \text{const} > 0$ — эллипс, $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ — кривые третьего порядка (при $x = 0$ и $y = 0$ — полукубические параболы).

2975. $0 < y < 2$; $-1 < y - x/2 < 0$.

2976°. $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

2977. $0 < y < x\sqrt{3}$; $y < (a-x)\sqrt{3}$.

2978. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$; $-\infty < z < +\infty$.

2979. $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant R^2$.

2980. $x^2 + y^2 < 4R^2$.

2981°. $v = \frac{1}{6}xy\left(2R \pm \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}\right)$; функция не однозначна. Область определения функции $x^2 + y^2 \leqslant 4R^2$; $x > 0$, $y > 0$.

2982. $S = xy$ при $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$; $S = x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant y$; $S = y$ при $1 \leqslant x$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; $S = xy - x - y + 2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$; $S = x$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y$; $S = y$ при $2 \leqslant x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$; $S = 2$ при $2 \leqslant x$, $2 \leqslant y$.

2983. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

2984. $y^2 > 4x - 8$.

2985. Вся плоскость, за исключением точек окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

2986. Внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами координатных углов, включая сами биссектрисы $x + y \geqslant 0$, $x - y \geqslant 0$.

2987. То же, что в задаче 2986, но без границ.

2988°. Внутренняя часть правого и левого вертикальных углов, образованных прямыми $y = 1 + x$ и $y = 1 - x$, включая эти прямые, но без точки их пересечения: $1 - x \leqslant y \leqslant 1 + x$ $(x > 0)$, $1 + x \leqslant y \leqslant 1 - x$ $(x < 0)$ (при $x = 0$ функция не определена).

2989. Часть плоскости, лежащая внутри первого и третьего координатных углов (без границ).

2990. Замкнутая область, лежащая между положительной полуосью абсцисс и параболой $y = x^2$ (включая границу); $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x^2 \geqslant y$.

2991. Кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, включая сами окружности: $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

2992. Часть плоскости, лежащая внутри параболы $y^2 = 4x$, между параболой и окружностью $x^2 + y^2 = 1$, включая дугу параболы, кроме ее вершины, и исключая дугу окружности.

2993. Часть плоскости, лежащая вне окружностей радиусов, равных единице, с центрами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Точки первой окружности принадлежат области, точки второй не принадлежат.

2994. Только точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

2995. Вся плоскость, за исключением прямых $x + y = n$ (n — произвольное целое число, положительное, отрицательное или нуль).

2996. Внутренность круга $x^2 + y^2 = 1$ и колец $2n \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2n + 1$ (n — целое число), включая границы.

2997°. Если $x \geqslant 0$, то $2n\pi \leqslant y \leqslant (2n + 1)\pi$; если $x < 0$, то $(2n + 1)\pi \leqslant y \leqslant (2n + 2)\pi$ (n — целое число).

2998. $x > 0$; $2n\pi < y < 2(n + 1)\pi$ (n — целое число).

2999. Открытая область, заштрихованная на рис. 16.6, $y > x + 1$ при $x > 0$; $x < y < x + 1$ при $x < 0$.

3000°. Часть плоскости, заключенная между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой, включая границу.

3001. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

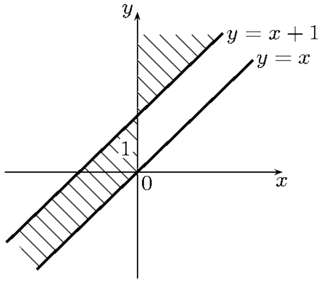

Рис. 16.6

3002. Часть пространства, заключенная между сферами $x^2+y^2+z^2=r^2$ и $x^2+y^2+z^2=R^2$, включая поверхность внешней и исключая поверхность внутренней сферы.

3003. 2.

3004.$^\circ$ 0.

3005. 0.

3006. Функция не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$.

3007. 0.

3008. 1.

3009.$^\circ$ 1) $y=0$ или $y=x^\alpha$ $(\alpha>1)$, $x\to 0$ по произвольному закону; 2) $y=x/3$, $x\to 0$ по произвольному закону.

3010. Точка $(0,0)$; вблизи этой точки функция может принимать сколь угодно большие положительные значения.

3011. Все точки с целочисленными координатами.

3012. На прямой $y=x$.

3013. На прямых $x=m$, $y=n$ (m и n — целые числа).

3014. На параболе $y^2=2x$.

* **3015.** 1)$^\circ$ Непрерывна; 2) разрывна; непрерывна по x и y в отдельности; 3) непрерывна; 4) разрывна; 5) разрывна; 6)$^\circ$ разрывна. Перейти к полярным координатам.

3016. Окружности с центром в начале координат радиусов соответственно 1, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/3$, $1/2$.

3017. Окружности, проходящие через точки A и B.

3025.$^\circ$ Прямые линии $y=ax+b$, где $a=\ln b$.

3026. Концентрические сферы с центром в точке A и радиусами, равными 1, 2, 3, 4.

3027. Эллипсоиды вращения с фокусами в точках A и B:
$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}=\text{const}$.

3028. Сферы $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2$, где $c=e^u$.

3029. Параболоиды вращения $x^2+y^2=cz$.

3030. 1) Плоскости $2x+3y-z=C$; 2) гиперболоиды вращения или конус $x^2+y^2-2z^2=C$.

3032. $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ при $T=T_0$.

3033. $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ — скорость изменения температуры в данной точке; $\frac{\partial v}{\partial x}$ — скорость изменения температуры в данный момент времени по длине (вдоль стержня).

3034. $\frac{\partial S}{\partial h}=b$ — скорость изменения площади в зависимости от высоты прямоугольника; $\frac{\partial S}{\partial b}=h$ — скорость изменения площади в зависимости от основания прямоугольника.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$.

3037. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

3038. $\frac{\partial\theta}{\partial x}=ae^{-t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial t}=-axe^{-t}+b$.

3039. $\frac{dz}{du}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u62}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}$.

3040°. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

3041. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$.

3042. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

3044. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

3045°. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3046. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

3047. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

3048. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

3049. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

3050°. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

3051. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-x/y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-x/y}$.

3052. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

3053°. $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}$, $\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}$.

3054. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$,
$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

3055. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-y/x}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}3^{-y/x}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$.

3058°. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^yx^{x^y}\ln^2 x$.

3059. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

3061. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3062. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1$.

3063. $\frac{\partial w}{\partial x} = yz+vz+vy$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xz+zv+vx$, $\frac{\partial w}{\partial z} = xy+yv+vx$, $\frac{\partial w}{\partial z} = yz+xz+xy$.

3064.° $\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x(x^2+y^2_{z^2})}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

3065. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z}$.

3067. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x}x^{y/z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z}x^{y/z}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$.

3068. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z}\ln x\ln y$.

3069. 2/5, 1/5.

3070.° 0, $\frac{1}{4}$.

3071. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (2x+y)^{2x+y}[1+ +\ln(2x+y)]$.

3072. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

3073. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$.

3074. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}$.

3075.° $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

3076. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$.

3077. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$.

3078. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$.

3079. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3080. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

3081.° $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3082. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$,
$\frac{\partial u}{\partial y} = z(\sin y)^{yz}\ln\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

3083. $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z} = \frac{2}{r(r^2-1)}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\frac{\partial w}{\partial x} = (2xy^2-yzv)\operatorname{tg}^3\alpha$, $\frac{\partial w}{\partial y} = (2x^2y-xzv)\operatorname{tg}^3\alpha$,
$\frac{\partial w}{\partial z} = (2av^2-xyv)\operatorname{tg}^3\alpha$, $\frac{\partial w}{\partial v} = (2z^2v-xyz)\operatorname{tg}^3\alpha$,
где $\alpha = x^2y^2+z^2v^2-xyzv$.

3085.° 4.

3086. $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{z=b\\t=a}} = \frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{z=b\\t=a}} = -\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

3087. 1 и -1.

3088. $\sqrt{2}/2$.

3089. $3/2$.
3090. $-13/22$.
3091°. $45°$.
3092. $30°$.
3093. $\operatorname{arctg} \frac{4}{7}$.
3094. $d_x z = (y^3 - 6xy^2)\,dx$, $d_y z = (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)\,dy$.
3095°. $d_x z = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d_y z = \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3096. $d_x z = \frac{y(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$, $d_y z = \frac{x(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.
3097. $d_x u = \frac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$, $d_y u = -\frac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$, $d_z u = -\frac{3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.
3098. $1/270$.
3099. $\approx 0{,}0187$.
3100°. $97/600$.
3101. $xy\left[(2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y)\,dx + (4y^2x - 3yx^2 + 2x^3)\,dy\right]$.
3102. $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$.
3103. $\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$.
3104. $\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.
3105. $(x\,dy + y\,dx)\cos(xy)$.
3106°. $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$.
3107. $\frac{4xy(x\,dy-y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$.
3108. $\frac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.
3109. $x^{zy-1}(yz\,dx + zx\ln x\,dy + xy\ln x\,dz)$.
3110°. $0{,}08$.
3111. $0{,}25e$.
3112. $1/36$.
3113. $\approx 7{,}5$.
3114. $\approx 0{,}005$.
3115°. $\approx 1{,}08$.
3116. 5.
3117. $1{,}8 \pm 0{,}2$.
3118. 4730 ± 100.
3119°. $2\delta_a + \frac{\delta_B B \sin C}{\sin B \sin(B+C)} + \frac{\delta_C \sin B}{\sin C \sin(B+C)}$.
3120. Возрастает со скоростью 444 см^2/с.
3121. На ≈ 2575 см^3.
3123°. $dr = \frac{s}{p}\,ds + \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2p^2}\right)\,dp = 0{,}16$ см, т. е. около 1%.
3124. $e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$.
3125. $\sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)$.
3126°. $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.
3127. $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v \cos v)$.

3128°. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{u}{v^2}\ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$,
$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.
3129. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.
3130. $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$.
3131°. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.
3132. $\frac{dz}{dt} = \left(3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)$.
3133. $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.
3134. $dz = \frac{y^2\,dx + x^2\,dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy+x+y) + \frac{xy[(y+1)\,dx+(x+1)\,dy]}{(x+y)\left[1+(xy+x+y)^2\right]}$.
3135°. $\frac{e^{(x^2+y^2)/(xy)}}{x^2y^2}\left[(y^4-x^4+2xy^3)x\,dy + (x^4-y^4+2x^3y)y\,dx\right]$.
3136. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$
$(u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy})$.
3145°. $\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$.
3146. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$.
3147. $\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.
3148. $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}$.
3149. $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.
3150°. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.
3151. $\frac{y^2}{1-xy}$.
3152. $\frac{a^2}{(x+y)^2}$.
3153. $\frac{2y}{x(y-1)}$.
3154. $\frac{y}{y-1}$.
3155°. $\frac{y^2}{x^2}\frac{\ln x-1}{\ln y-1}$.
3157. $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\substack{x=6\\y=2}} = \frac{4}{3}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=6\\y=8}} = -\frac{4}{3}$.
3158. -1.
3161. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$.
3162. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}$.
3163. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy+z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy+z^2}$.
3164. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}$.
3167. $dz = -\frac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$.
3168. $z = \frac{x^2-y^2}{4}$.
3169. $z = \frac{3xy-x^3}{2}$.
3170°. $z = k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3171. $dz = \frac{x\,dx}{z} - \frac{y\,dy}{z}$.
3172. $dz = \frac{x\,dx}{a} + \frac{y\,dy}{a}$.
3173. $dz = \sqrt{z}(x\,dx - y\,dy)$.

3174. $2(x\,dx + y\,dy)$.
3175°. $2(x\,dx + y\,dy)$.
3176. $dz = e^{-u}\big[(v\cos v - u\sin v)\,dx + (u\cos v + v\sin v)\,dy\big]$.
3185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3186°. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$.
3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2\cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2\cos 2(ax+by)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2ab\cos 2(ax+by)$.
3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y+2y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1+xe^y)e^{xe^y+y}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = (1+xe^y)e^{xe^y+y}$.
3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.
3191°. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$.
3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.
3193. $\frac{(x-z)y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$.
3194. $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$.
3195°. $\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$.
3196. $-x(2\sin xy + xy\cos xy)$.
3197. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)e^{xyz}$.
3198. $mn(n-1)(n-2)p(p-1)x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$.
3204°. $a=-3$.
3209°. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} =$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}.$$

3219. $-2y\,dx^2 + 4(y-x)\,dx\,dy + 2x\,dy^2$.
3220. $-(dx-dy)^2/(x-y)^2$.
3221. $\frac{(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.
3222°. $2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$.
3223. $e^{xy}\left[(y\,dx+x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy\right]$.
3224. $2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz)$.
3225. $-\cos(2x+y)(2\,dx+dy)^3$; $(2\,dx+dy)^3$; 0.
3226. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227°. $-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $-\frac{2z\left[xy^3\,dx^2+(x^2y^2+2xyz^2-z^4)\,dxdy+x^3y\,dy^2\right]}{(z^2-xy)^3}$.

3229. $-31{,}5\,dx^2+206\,dx\,dy-306\,dy^2$.

3230. $\frac{d^2y}{dt^2}+y$.

3231°. $y''-5y'+y$.

3232. $\frac{d^2y}{dt^2}+ay$.

3233. $y-x''$.

3234. $-\frac{x'''}{x'^5}$.

3235°. $-\frac{v''+2v}{v^3}$.

3236. $\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho$.

3237°. $\frac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{3/2}}$.

3238. $-\frac{\partial z}{\partial v}$.

3239°. $\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$.

3240. $\omega''(\rho)+\frac{1}{\rho}\omega'(\rho)+k\omega(\rho)$.

3241. $-4\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+2$.

К ГЛАВЕ 11

3242. $x^3+2y^3-xy+h(3x^2-y)+k(6y^2-x)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.

3243. $\Delta z=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z=-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-h^2k+\frac{5}{2}hk^2+$ $+\frac{1}{4}k^3-h^3k+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{4}hk^3$; $f(1{,}02;2{,}03)\approx 2{,}1726$.

3245°. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+(2Ax+Dy+Fz)h+$ $+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+Ah^2+Bk^2+Cl^2+Dhk+$ $+Ekl+Fhl$.

3246. $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$ $\left.+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$ $\left.+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]$.

3247. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots$; $z_1\approx 1{,}1021$.

3248°. $e^x\left[\sin y+h\sin y+k\cos y+\frac{1}{2}(h^2\sin y+2hk\cos y-k^2\sin y)+\right.$ $\left.+\frac{1}{6}(h^3\sin y+3h^2k\cos y-3hk^2\sin y-k^3\cos y)\right]+\ldots$; $z_1\approx 1{,}1051$.

3249. $y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\ldots$.

3250. $y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+\ldots$

3251. $1+(x+y)+\ldots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\ldots$.

* **3252.** $x-y-\frac{1}{3}(x^3-y^3)+\frac{1}{5}(x^5-y^5)-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1}-y^{2n+1})+$ $+\ldots$ Заметить, что $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}+\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$.

3253. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{x^ny^m}{nm}$.

3254°. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{n}$.

3255. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3256. $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$.

3257. $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{9}{64}(y-1)^2 + \ldots$

3259. $(0,0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$.

3260°. $(1/2, -1)$.

3261. $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$, $(a/3, a/3)$.

3262. $(0,0)$, $(0,2b)$, (a,b), $(2a,0)$, $(2a,2b)$.

3263. $(\pi/6, \pi/6)$.

3264. $(b/a, c/a)$.

3265°. $(-2/3, -2/3)$.

3266. $(2,1,7)$.

3267. $(6,4,10)$.

3268. A и C — максимумы, B — минимум; в окрестности D поверхность имеет вид седла, вдоль EF функция сохраняет постоянное значение.

3269. $(-2,0)$, $(16/7, 0)$, каждая точка будет стационарной для одной из ветвей функции.

3270°. $(1,1)$, $(-1,-1)$.

***3271.** $(0,0)$. Чтобы убедиться, что найденная точка есть точка максимума, достаточно представить функцию в виде $z=10-(x-y)^2-2x^2-y^2$.

3272. $(2,-2)$.

3273. $(-1,1)$.

3277°. В точке $(6,4)$ — максимум.

3278. В точке $(0,0)$ нет экстремума. В точке $(1,1)$ — минимум.

3279. Наибольшие и наименьшие значения лежат на границе области; наибольшее значение $z = 4$ в точках $(2,0)$ и $(-2,0)$; наименьшее значение $z = -4$ в точках $(0,2)$ и $(0,-2)$. Стационарная точка $(0,0)$ не дает экстремума.

3280. Наибольшее значение $z = 17$ в точке $(1,2)$; наименьшее значение $z = -3$ в точке $(1,0)$; стационарная точка $(-4,6)$ лежит вне заданной области.

3281°. Наибольшее значение $z = 4$ в стационарной точке $(2,1)$ (эта точка является, таким образом, точкой максимума). Наименьшее значение $z = -64$ в точке $(4,2)$ — на границе.

3282. Наименьшее значение функции $z = 0$ в точке $(0,0)$. Наибольшее значение $z = 3/e$ в точках $(0, \pm 1)$.

3283. $z_{\text{наиб}} = 3\sqrt{3}/2$ в точке $(\pi/3, \pi/3)$ (максимум), $z_{\text{наим}} = 0$ в точке $(0,0)$ (на границе).

3284. Все слагаемые равны между собой.

3285. Все множители равны между собой.

3286°. $(8/5, 16/5)$.

3287. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$.

3288. $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

3289. $(3, \sqrt{39}, 0)$; $(3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290°. Куб.

3291. В точке $(1, 1)$ минимум, $z = 2$.

3292. (a, a) или $(-a, -a)$, $z = a^2$ (максимум), $(a, -a)$ или $(-a, a)$, $z = -a^2$ (минимум).

3293. $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z = -\sqrt{2}/a$ (минимум), $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $z = \sqrt{2}/a$ (максимум).

3294. Стационарные точки $x = -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{a}{b}$.

3295°. $(3, 3, 3)$, $u = 9$ (минимум).

3296. Две из переменных равны каждая 2, третья равна 1 (минимум, равный 4); две из переменных равны каждая 4/3, третья равна 7/3 (максимум, равный 112/27).

* **3297.** Исследовать на минимум функцию $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ при $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. Вообще справедливо соотношение $\frac{\sum x_i^k}{n} \geqslant \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^k$, если $k \geqslant 1$ и $x_i \geqslant 0$.

3299. $u_{\text{мин}}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ при $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$, $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$, $z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$.

3300°. $u_{\text{наиб}} = 1$, $u_{\text{наим}} = -1/2$.

3301. $(21/13, 2, 63/26)$.

3302. $(3, -1, 1)$.

3303. 1) $(-2, 0, 0)$; 2) $(2, 0, 0)$.

3304. Куб.

3305°. Куб.

3306. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Если R — радиус основания палатки, H — высота цилиндрической части, h — высота конической верхушки, то должны иметь место следующие соотношения: $R = h\sqrt{5}/2$, $H = h/2$.

3308. Если l — боковая сторона трапеции, b — основание и α — угол наклона боковой стороны, то должны иметь место следующие соотношения: $l = b = 2\sqrt{A}/\sqrt[4]{3^3}$, $\alpha = \pi/3$, где A — данная площадь сечения. При этом омываемая поверхность $u = 2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A} \approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. Куб.

3310°. Стороны основания равны каждая $2\alpha + \sqrt[3]{2v}$, высота вдвое меньше: $\alpha + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$.

3311. a^3 (куб).

3312. Наименьшая площадь равна $3\sqrt{3}ab$.

3313. $(4/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$ и $(-4/\sqrt{5}, -3/\sqrt{5})$.

3314. $\left(-5/9, -1/9\right)$.

3315°. $(3, 5)$.

3316. $z_{\text{наиб}} = 2$.

3317. Стороны треугольника $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ и $2\sqrt{S}$.

3318. Высота $H/3$, стороны основания $2a\sqrt{2}/3$ и $2b\sqrt{2}/3$, объем $V = 8abH/27$.

3319. Тетраэдр.

3320. Нормаль к эллипсу в искомой точке должна быть перпендикулярна к линии, соединяющей данные точки.

3321°. Нормаль провести в точке с координатами $\left(\pm a\sqrt{a/(a+b)}, \pm b\sqrt{b/(a+b)}\right)$.

3322. $\left(9, 1/8, 3/8\right)$; $\left(-9, -1/8, -3/8\right)$.

3323. $2\sqrt{2}$.

3324. $x + y = 2$; $y = x$.

3325°. $x - y + a = 0$; $x + y - 3a = 0$.

3326. $x + 2y - 1 = 0$; $2x - y - 2 = 0$.

3327. $x - y + 2 = 0$; $x + y - 2 = 0$.

3328. $(0, 0)$.

3329. $(0, 0)$.

3330°. $(0, 0)$.

3331. $(a, 0)$.

3332. $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

3333. $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

3334. $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(-6, 3)$.

3335°. $(0, 0)$ — двойная точка.

3336. (0,0) — изолированная точка.

3337. $(0, 0)$ — точка прекращения.

3338. $k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — точки возврата.

3339°. $(a, 0)$ — точка возврата.

3340. $(0, 0)$.

3341. $x = -f'(a)$, $y = f(a) - af'(a)$; $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

3342. $16y^3 + 27x^4 = 0$.

3343. $y^2 = 4ax$.

3344. $y = x/2$ и $y = -x/2$.

3345°. $y = -x^4/4$.

3346. $y = 0$ и $16y = x^4$.

3347. $y = x$ и $4y = x - 4/27$. Первая — геометрическое место особых точек, вторая — огибающая.

3348. $x^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}y^2 = 0$ и $x^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}y^3 = 0$.

3349. $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$.

3350. Четыре прямые $x \pm y = \pm R$.

3351.° $2by(x^2+y^2)+x^2=0$.

3352. Парабола $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

3353. Циклоида $x=\frac{R}{2}(t-\sin t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$.

3354. Эллипс $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$.

3355.° Гипербола $xy=\frac{a}{4}$.

3357. Эволюта параболы $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$.

3359. Гиперболы $xy=1/2$ и $xy=-1/2$.

3361. 1) $2\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2|\boldsymbol{r}|\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$; 2) $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2+\boldsymbol{r}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$; 3) $\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$; 4) $\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)$.

3362. Из равенства $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha(t)\boldsymbol{r}$ следует $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{r}+\alpha\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=$ $=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)\boldsymbol{r}=\beta(t)\boldsymbol{r}$ и т. д.

***3363.** Дифференцируя равенство $r^2=\mathrm{const}$ (см. задачу 3361), получаем $\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$. Касательная к сферической линии (т. е. к линии, расположенной не в сфере) перпендикулярна к радиусу сферы, проведенному в точку касания. Обратная теорема также имеет место.

3368.° $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\varphi'$; $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}\varphi'^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\varphi''$; $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}=\frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}\varphi'^3+$ $+3\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\varphi'''$.

3370. Из равенства $\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{r}(\tau)}{dt}=0$, где $t_1<\tau<t_2$, следует, что на замкнутой (в силу равенства $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2)$) линии найдется точка, в которой касательная перпендикулярна к любому наперед заданному направлению.

3371.° Годограф скорости $\boldsymbol{v}\{a\cos t, a\sin t, 2bt\}$ — винтовая линия; годограф ускорения $\boldsymbol{w}\{-a\sin t, a\cos t, 2b\}$ — окружность.

3372. Скалярное умножение на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{r}$ дает $\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$, $\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$. Отсюда $a\boldsymbol{r}=\mathrm{const}$ — уравнение плоскости и $r^2=\mathrm{const}$ — уравнение шара. Искомая траектория — окружность, плоскость которой перпендикулярна вектору $\boldsymbol{a}$.

3374. Эллипс. Скорость будет максимальной в момент, когда материальная точка будет в конце малой полуоси, и минимальной, когда точка будет в конце большой полуоси. Ускорение будет максимальным (минимальным) в момент, когда скорость будет минимальной (максимальной).

3375.° Компоненты скорости $\frac{d\rho}{dt}$; $\rho\frac{d\varphi}{dt}$; $\rho\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}$.
Указание. Найти скалярные произведения $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}e_\rho$; $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}e_\varphi$; $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}e_\theta$.

3376. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$.

3377. $\frac{x-a\sqrt{2}/2}{-a\sqrt{2}}=\frac{y-a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{2}}=\frac{z-k/8}{k/\pi}$; $-x+y+\frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}$; $x+6y+36z=2706a$.

3379.° $\frac{x-\pi/2+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4$.

3380. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

3381. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

3382. $\frac{x-x_0}{z_0}=\frac{y-y_0}{z_0}=\frac{z-z_0}{y_0-x_0}$; $\frac{x+y}{x_0+y_0}+\frac{z}{z_0}=2$.

3383. $\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2} = \frac{y-y_0}{x_0^2z_0^2} = \frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{y-y_0}{y_0^2} - \frac{z-z_0}{z_0^2} = 0$.

3384. $r_0\left\{\sqrt{3}/2, 1/2, e^{\pi/6}\right\}$.

3385°. $6x-8y-z+3=0$; $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}(x-x_0)-\sqrt{a}(y-y_0)=0$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{b}} = \frac{y-y_0}{-\sqrt{a}} = \frac{z-z_0}{0}$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}} = \frac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}} = \frac{z-z_0}{-(a+b)}$.

3387. $\frac{1}{e}x - ey - \sqrt{2}z + 2 = 0$; $\frac{x-e}{-1/e} = \frac{y-1/e}{e} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\frac{x-e}{1} = \frac{y-1/e}{1} = \frac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\operatorname{sh}1}$.

3389. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5=0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$; $3x+3y-z-2=0$; $\frac{x-1}{8} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1=0$.

3390°. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$; $x-y=0$; $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$; $z=1$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$; $x+y-2=0$.

3391. $\frac{x-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=4$; $\frac{x-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{3\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$; $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0$, $\frac{x-\sqrt{2}/2}{13} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{-3} = \frac{z-1}{-4\sqrt{2}}$; $-13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0$.

3392. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z}{6}$; $2x+3y+6z=37$; $\frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z}{-3}$; $6x+2y-3z=20$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-6} = \frac{z}{2}$; $3x-6y+2z=-81$.

3393. Для любой точки линии уравнение соприкасающейся плоскости $3x-2y-11=0$, т. е. линия целиком лежит в этой плоскости.

3394. Соприкасающаяся плоскость одна и та же для всех точек линии. Ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3395. $\operatorname{ch}^2 t/\operatorname{sh} t$.

3396°. $R = \sqrt{2}\operatorname{cosec} 2t$.

3398. $k = \sqrt{\frac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}}$.

3399. $\tau_1 = \frac{r'}{|r'|}$, $\beta_1 = \frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}$, $\nu_1 = \frac{(r'\times r'')\times r'}{|r'|\cdot|r'\times r''|}$.

3400. $\tau_1 = \nu_1\times\beta_1$; $\nu_1 = \beta_1\times\tau_1$; $\beta_1 = \tau_1\times\nu_1$.

3401°. Искомый вектор ω (если он существует) можно представить в виде

$$\omega = (\omega\tau_1)\tau_1 + (\omega\nu_1)\nu_1 + (\omega\beta_1)\beta_1. \qquad (1)$$

Из условия задачи следует (принимая во внимание формулы Френе), что

$$\omega\times\tau_1 = k\boldsymbol{v}_1, \qquad \omega\times\nu_1 = -k\tau_1 + T\beta_1, \qquad \omega\times\beta_1 = -T\nu_1. \quad (2)$$

Умножая эти равенства скалярно на ν_1, β_1, τ_1 соответственно, найдем, что $\omega\tau_1 = T$, $\omega\nu_1 = 0$, $\omega\beta_1 = k$ и, следовательно, $\omega = T\tau_1 + k\beta_1$. Подстановка в формулы (2) показывает, что этот вектор удовлетворяет условию задачи.

3402. $99 + \ln 10 \approx 101{,}43$.

3403. $a\ln(1+\sqrt{2}) = a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

3404. $\sqrt{3}(e^t - 1)$.

3405°. 5.

3406. $4a$.

3407. $z\sqrt{2}$.

3408. $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$.

3409°. $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $8x - 8y - z = 4$; $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$.

3411. $x + y - z - 1 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

3412. $z + a = 0$, $x = a$, $y = a$.

3413. $17x + 11y + 5z = 60$; $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$.

3414°. $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/4}{2}$.

3415. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = \sqrt{3}$; $a\left(x - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = b\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{3}\right) = c\left(z - \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x + 11y + 5z - 18 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$.

3417. $3x - 2y - 2z + 1 = 0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

3418. $2x + y + 11z - 25 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$.

3419. $5x + 4y + z - 28 = 0$; $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$.

3421. $x - y + 2z = \sqrt{\frac{11}{2}}$ и $x - y + 2z = -\sqrt{\frac{11}{2}}$.

3422. $x + y + z = \sqrt{z^2 + b^2 + c^2}$.

3424. Все плоскости проходят через начало координат.

3425°. $x_0x + y_0y + z_0z = a^2$; $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$.

3426. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 2(z + z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0} = -\frac{b(y-y_0)}{ay_0} = \frac{z-z_0}{-2ab}$.

3428. $\frac{9}{2}a^2$.

3430. $2x + y - z = 2$.

3434. $4x - 2y - 3z = 3$.

3435°. Параллельна плоскости xOy в точках (0,3,3) и (0,3,–7); параллельна плоскости yOz в точках $(5,3,-2)$ и $(-5,3,-2)$; параллельна плоскости xOz в точках $(0,-2,-2)$ и $(0,8,-2)$.

3436. 1) $6u_0v_0x - 3(u_0+v_0)y + 2z + (u_0+v_0)(u_0^2 - 4u_0v_0 + v_0^2) = 0$; 2) $3(x_0^2 - y_0)x - 3x_0(y + y_0) + 2z + 4z_0 = 0$.

3437. $2z(x^2 + y^2 + z^2) + p(x^2 + y^2) = 0$.

3438. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy - 3y^3, 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3\}$.

3440. 1) $6i - 4j$; 2) $\frac{1}{3}(2i + j)$; 3) $\frac{-y_0i - x_0j}{x_0^2 + y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}342$, $\varphi \approx 18^\circ52'$; 2)° $\operatorname{tg}\varphi \approx 4{,}87$, $\varphi \approx 78^\circ24'$.

3442. Отрицательная полуось y.

3443. 1) $\cos\alpha \approx 0{,}99$, $\alpha = 8^\circ$; 2) $\cos\alpha \approx -0{,}199$, $\alpha \approx 101^\circ30'$.

3444. 1) $(-1/3, 3/4)$, $(7/3, -3/4)$; 2) точки, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 2/3$.

3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$; 2) $\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r}{|r|}$, где r — радиус-вектор.

3450. 1) $2r$; 2) $2\frac{r}{|r|}$; 3) $2F'(r^2)r$; 4) $a(br)+b(ar)$; 5) $a\times b$.

3451. 1) 0; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $(\cos\alpha+\sin\alpha)/2$.

3452.° $\sqrt{2}/3$.

3453. 1/2.

3455. 1) 5; 2) 98/13.

3456. -22.

3459. $1/r^2$.

К ГЛАВЕ 12

3460. $M = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,d\sigma$.

3461. $E = \iint\limits_D \tau(x,y)\,d\sigma$.

3462.° $T = \frac{1}{2}\omega^2 \iint_D y^2\gamma(x,y)\,d\sigma$.

3463. $Q = (t_2-t_1)\iint\limits_D c(x,y)\gamma(x,y)\,d\sigma$.

3464. $M = \iiint\limits_\Omega \gamma(x,y,z)\,dv$.

3465. $E = \iiint\limits_\Omega \delta(x,y,z)\,dv$.

3466. $8\pi(5-\sqrt{2}) < I < 8\pi(5+\sqrt{2})$.

3467. $36\pi < I < 100\pi$.

3468. $2 < I < 8$.

3469.° $-8 < I < 2/3$.

3470. $0 < I < 64$.

3471. $4 < I < 36$.

3472. $4 < I < 8(5-2\sqrt{2})$.

3473. $4\pi < I < 22\pi$.

3474. $0 < I < \frac{4}{3}\pi R^5$.

3475. $24 < I < 72$.

3476.° $28\pi\sqrt{3} < I < 52\pi\sqrt{3}$.

3477. 1.

3478. $(e-1)^2$.

3479. $\pi/12$.

3480.° $\ln\frac{4}{3}$.

3481. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

3482. $\pi-2$.

3483. 2.

3484.° $-\pi/16$.

3485. $\int_3^5 dx \int_{(3x+1)/2}^{(3x+4)/2} f(x,y)\,dy$.

3486. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3487. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$
3488. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy.$
3489. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy.$
3490°. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-3\sqrt{4-x^2}/2}^{3\sqrt{4-x^2}/2} f(x,y)\,dy.$
3491. $\int_0^4 dx \int_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,,dy.$
3492. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2}} f(x,y)\,dy.$
3493. $\int_0^2 dx \int_0^{2x} f(x,y)\,dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y)\,dy.$
3494. $\int_{-2/3}^{1/3} dx \int_{1-2x}^{x+3} f(x,y)\,dy + \int_{1/3}^{2/3} dx \int_x^{x+3} f(x,y)\,dy+$
$+ \int_{2/3}^{5/3} dx \int_x^{5-2x} f(x,y)\,dy.$
3495. $\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{2/x} f(x,y)\,dy.$
3496. $\int_0^2 dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_2^{9/2} dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy+$
$+ \int_{9/2}^{8} dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x,y)\,dy.$
3497°. $\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy+$
$+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy.$
3498. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy.$
3499. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$
3500°. $\int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx.$
3501. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx.$
3502. $\int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$

3503. $\int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)\,dx.$
3504. 1) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)\,dx$; 2)° $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$;
3) $\int_0^1 dy \int_{3/2}^{3-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$
3505. 1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{2y-3}^{(y+6)/2} f(x,y)\,dx$;
2) $\int_1^3 dy \int_{(y+1)/2}^{(9-y)/2} f(x,y)\,dx$; 3) $\int_{-1}^{3} dx \int_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x,y)\,dy$;
4)° $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$
3506. 1) $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) 1/2.
3507. 0.
3508. 33/140.
3509°. 9/4.
3510. -2.

3511. $\pi/6$.
3512. $4/135$.
3513. 4.
3514. 3.
3515. 12 2/3.
3516.° $2R/3$.
3517. 6.
3518. $abc(a+b+c)/2$.
3519. $a^6/48$.
3520. $a^{11}/110$.
3521.° $2e-5$.
3522. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.
3523. $1/180$.
3524.° $\pi^2/16-1/2$.
3525. 1) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;
2) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;
3) $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3526. $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.
3527. $\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho+$
$+\int_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3528. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3529. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{2}\sec(\varphi-\pi/4)}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3530.° $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3531. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3532. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3533. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3534. $\frac{\pi}{2}\int_0^R f(\rho^2)\rho\, d\rho$.
3535.° $\frac{R^2}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi$.
3536. $\frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right]$.
3537. $\pi(\pi-2)/8$.
3538. $\pi R^2 h$.
3539. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.
3540.° $\pi^2/6$.
3542. $x=2\rho\cos\varphi$, $y=3\rho\sin\varphi$; $I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(2\rho\cos\varphi, 3\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.
3543. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi$;
$I=\sqrt{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \sqrt{3}\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$.
3544. $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$; $I=ab\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 f(\sqrt{4-\rho^2})\rho d\rho$.

3545.$^\circ$ $a^2b^2/8$.
3546. $1/\sqrt[4]{6}$.
3547. $\int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho$.
3548. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$.
3549. $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho$.
3550.$^\circ$ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$.
3551. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{3}/2} \rho\, d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$ или
$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho +$
$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho$.
3552. $\pi a/2$.
3553. $8a^2/9$.
3554. $4\pi R^5/15$.
3555.$^\circ$ $\pi/8$.
3556. $4\pi(R^5 - r^5)/15$.
3557. $2\pi/3$.
3558. $\pi\left[3\sqrt{10} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} - \sqrt{2} - 8\right]$.
3559. $186\ 2/3$.
3560.$^\circ$ $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{p}\right)$.
3561. $abc/6$.
3562. 12.
3563. 1/6.
3564. $78\frac{15}{32}$.
3565.$^\circ$ $\frac{48}{5}\sqrt{6}$.
3566. 16.
3567. 45.
3568. 131/3.
3569. 161/5.
3570.$^\circ$ $ar^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$.
3571. 22π.
3572. $\frac{16}{3}R^3$.
3573. 124/21.
3574. $\frac{4R^5}{15a^2}$.
3575.$^\circ$ 27.
3576. 3/8.
3577. 88/105.
3578. $abc/3$.
3579. $\pi a^3/4$.

3580.° $2\left(e^2 - \frac{2e^3+1}{9}\right)$.
3581. $3e - 8$.
* **3582.** $4e-e^2-1$. Тело симметрично относительно плоскости $y=x$.
3583. $2(\pi^2 - 35/9)$.
3584. $1/45$.
3585.° $16/9$.
3586. $\pi/4$.
3587. 40π.
3588. 2π.
3589. $5\pi R^3/2$.
3590. $3\pi a^3/2$.
3591.° $\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.
3592. $a^3/24$.
3593. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right)$.
3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.
3595. $\pi\sqrt{2}/24$.
3596.° $\pi^2 R^2 h/16$.
3597. $1/2$.
3598. 2.
3599. πab.
3600.° $ab/6$.
3601. $16/3$.
* **3602.** $5\pi a^2/8$. Перейти к полярным координатам.
3603. $3\pi/4$.
3604.° $2a^2$.
3605. $2/3$.
3606. $1/60$.
3607. $1/1260$.
* **3608.** 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{39\pi}{25}$. Воспользоваться результатом задачи 3541.
3609. 8.
3610.° $7/12$.
3611. $3/35$.
3612. $4\cdot(4 - 3\ln 3)$.
* **3613.** $\pi/2$. Проекция тела на плоскость xOy есть круг.
3614. $\pi/8$. Перенести начало координат в точку $\left(1/2, 1/2, 0\right)$.
* **3615.**° $19\pi/6$ и $15\pi/2$. Перейти к цилиндрическим координатам.
3616. $5\pi R^3/12$.
3617. $\pi/96$.
3618. $92\pi R^3/75$.
* **3619.** $\pi a^3/3$. Перейти к сферическим координатам.
3620.° $a^3/360$.
3621. $4\pi a^3/12$.

3622. $4\pi a^3/3$.
3623. $64\pi a^3/105$.
3624.° $\pi^2 a^3/6$.
3625. $21(2-\sqrt{2})\pi/4$.
3626. 14.
3627. 36.
3628. 8π.
3629. $2\sqrt{2}\pi p^2$.
* **3630.**° $2\pi R^2$. Проектировать поверхность на плоскость yOz.
3631. $8\sqrt{2}ab$.
3632. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$.
3633. $\frac{2\pi}{3}\left\{(1+R^2)^{3/2}-1\right\}$.
3634. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$.
3635.° $4\pi a(a-\sqrt{a^2-R^2})$.
3636. $2R^2(\pi-2)$.
3637. $2R^2(\pi+4-4\sqrt{2})$.
3638. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right\}$.
3639. $2a^2/\sin 2\alpha$.
* **3640.** $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 3{,}42\cdot 10^8$ км^2. Перейти к сферическим координатам.
3641.° $16\pi a^2/3$.
3642. $8R^2$.
3643. $ab^2/2$.
3644. $2R^3/3$.
3645.° πR^3.
3646. $9a^3/4$.
3647. Статический момент равен $ah^2/6$.
3648. Центр масс лежит на малой оси на расстоянии $\frac{4b}{3\pi}$ от большой оси (b — малая полуось).
3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $\eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1)(2+\sqrt{2}\right)$.
3650.° Центр масс лежит на биссектрисе угла α на расстоянии $\frac{4}{3}R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра круга.
3651. Центр масс лежит на биссектрисе угла α на расстоянии $\frac{4}{3}R\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ от центра круга.
3652. $\xi=3\pi/16$, $\eta=0$.
3653. $5\pi R^4/4$.
3654. $2a^4/3$.
3655.° $\pi ab(a^2+b^2)/4$.
3656. $ab(a^2+b^2)/12$.
3657. $ah(a^2+12h^2)/48$.
3658. $3\pi R^4/2$.

3659. $ah(2h^2/7 + a^2/30)$.

***3662.** Выбрать систему координат так, чтобы начало координат совпало с центром масс фигуры и одна из координатных осей была параллельной оси, относительно которой ищется момент инерции.

3663. $a^2bc/2$, $ab^2c/2$ и $abc^2/2$.

3664. $\pi R^2H^2/4$.

3665.$^\circ$ $\pi abc^2/4$.

3666. $\xi = 14/15$, $\eta = 26/15$, $\zeta = 8/3$.

3667. $\xi = 3a/8$, $\eta = 3b/8$, $\zeta = 3c/8$.

3668. $\xi = 6/5$, $\eta = 12/5$, $\zeta = 8/5$.

3669. $\xi = 18/7$, $\eta = 15\sqrt{6}/16$, $\zeta = 12/7$.

3670.$^\circ$ $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 5a(6\sqrt{3} + 5)/83$.

3671. $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 3R(1 + \cos\alpha)/8$.

3672. $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 9a/20$.

3673. $\xi = R/2$, $\eta = R/2$, $\zeta = R/2$.

3674.$^\circ$ $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = (55 + 9\sqrt{3})/130$.

3675. $M(b^2{+}c^2)/3$, $M(c^2{+}a^2)/3$, $M(a^2{+}b^2)/3$ и $M(a^2{+}b^2{+}c^2)/12$.

3676. $7MR^2/5$.

3677. $M(b^2 + c^2)/5$, $M(c^2 + a^2)/5$, $M(a^2 + b^2)/5$.

3678. $M(R^2/4 + H^3/3)$ и $M(H^2 + 3R^2)/12$.

3679.$^\circ$ $\frac{2}{5}M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$.

3680. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2 + H^2)$.

3681. $\frac{1}{2}M(R^2 + \frac{1}{6}H^2)$.

3682. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2$.

3683.$^\circ$ $M(R^2 + r^2)/2$.

3684. $4a^2/3$.

3685. $2\pi r(R - r)$.

3686. $4\gamma ab^2/3$.

3687. $2\pi\gamma(R^2 - r^2)$.

3688.$^\circ$ $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2 + 2H^2)$.

***3689.** $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$. Если за ось Oz принять ось конуса, а за начало координат — его вершину, то уравнение конуса будет $x^2 + y^2 - z^2\operatorname{tg}^2\alpha = 0$.

3690. $\frac{2}{3}\pi\gamma R^6$.

3691. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$.

***3692.** $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{5}{4}R$. Перейти к цилиндрическим координатам.

3693.$^\circ$ $\frac{59}{480}\pi R^5$. См. указание к предыдущей задаче.

***3694.** Выбрать систему координат так, чтобы начало координат совпало с центром масс тела и одна из координатных осей была параллельна оси, относительно которой ищется момент инерции.

3695. kMm/a^2, где M — масса шара, а k — гравитационная постоянная.

* **3696.** Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

3697.$^\circ$ $\frac{17kM}{56R^2}$, k — гравитационная постоянная.

3699. Центр давления лежит на оси симметрии прямоугольника, перпендикулярной к стороне a, на расстоянии $2b/3$ от стороны, лежащей на поверхности. Во втором случае (сторона a расположена на глубине h) расстояние центра давления от верхней стороны будет равно $\frac{2b}{3}\frac{b+3l/2}{b+2l}$, где $l = h/\sin a$. (При $l \gg b$ центр давления почти совпадает с центром прямоугольника.)

3700. 1)$^\circ$ $\frac{h}{2}\sin\alpha$; 2) $\frac{3}{4}h\sin\alpha$.

3701. Центр давления лежит на большой оси эллипса на расстоянии $a + \frac{a^2}{4(a+h)}$ от ее верхнего конца.

* **3702.** Выбрать систему координат так, чтобы одна из координатных плоскостей совпала с плоскостью пластинки и одна из осей — с линией пересечения поверхности жидкости с плоскостью пластинки.

3703. Расходится.

3704. 2π.

3705.$^\circ$ $\frac{\pi}{4a^2}$.

3706. 4.

3707. 2.

3708. $\frac{1}{4}$.

* **3709.** $\frac{\alpha}{2\sin\alpha}$. Перейти к полярным координатам.

* **3710.**$^\circ$ 1/2. Переменить порядок интегрирования.

* **3711.** 1/16. См. указание к предыдущей задаче.

3712. Сходится.

3713. Расходится.

3714. Сходится.

3715.$^\circ$ Расходится.

3716. Нет.

3717. 8/15.

3718. $\pi/16$.

* **3719.** $pi\sqrt{\pi}$; воспользоваться интегралом Пуассона $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

3720. Расходится.

3721. Сходится.

3722. Расходится.

3723. $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R - \frac{1}{3}\right)$.

* **3724.** π. (См. указание к задаче 3719.)

3725.$^\circ$ $\pi/4$.

3726. $\sqrt{\pi}/2$.

3727. $2\pi km\gamma(R + H - \sqrt{R^2 + H^2})$. Сила направлена по оси цилиндра, k — гравитационная постоянная.

3728.$^\circ$ $\frac{2\pi km\gamma H}{l}(l - H)$, где l — образующая конуса. Сила направлена по оси конуса.

3729. 1) $a = 4\gamma_c - 3\gamma_0$, $b = \frac{4}{R}(\gamma_c - \gamma_0)$; 2) $\frac{4}{3}\pi kR\gamma_c = \frac{kMm}{R^2}$.

3730. Определена всюду, кроме $x = 0$.

3731. 3π.

3733.$^\circ$ $\frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$.

3734. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ $(n > 1)$.

3735. $\frac{(n-1)!}{a^n}$.

* **3736.** $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4|ab|^3}$. Продифференцировать по a и по b и результаты сложить.

3737. $\ln(1 + a)$.

3738.$^\circ$ $\frac{1}{2}\ln(1 + a)$.

3739. $\frac{\pi}{2}\ln(a + \sqrt{1 + a^2})$.

3740. $\pi(\sqrt{1 - a^2} - 1)$.

3741. $\frac{\pi}{2}\ln(1 + a)$, если $a \geqslant 0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1 - a)$, если $a \leqslant 0$.

3742. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$.

3743.$^\circ$ $\pi\arcsin a$.

3744. $\pi\arcsin a$.

3745. $\sqrt{\pi a}$.

* **3746.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Дифференцировать по a или по b.

* **3747.** $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} = \operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}$. Дифференцировать по b или по c.

3748.$^\circ$ $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$.

* **3749.** $\pi\ln\frac{a+b}{2}$. Дифференцировать по a или по b.

3750. $\frac{\pi}{2}\ln(1 + a)$, если $a > 0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1 - a)$, если $a < 0$;
$\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

* **3751.** $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$. Интегрировать по параметру n в пределах от α до β.

3752. $\sqrt{\pi}(b - a)$.

3753.$^\circ$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3755. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$.

3756.$^\circ$ $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$.

* **3757.** $I = \lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx$. Оцениваем последний интеграл, заменяя $f(x)$ ее наибольшим и наименьшим значениями в интервале $(a\varepsilon, b\varepsilon)$, и переходим к пределу.

3758. $\ln\frac{b}{a}$.

3759. $\ln\frac{b}{a}$.

3760. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

3761.$^\circ$ $ab\ln\frac{b}{a}$.

* **3762.** $\frac{3}{4}\ln 3$. Представляя $\sin^3 x$ в виде разности синусов кратных дуг, сводим задачу к предыдущей (при соответствующем выборе a и b.

* **3763.** Для доказательства можно использовать два метода: 1) интегрирование по частям; 2) изменение порядка интегрирования в двойном интеграле, получающемся после подстановки интеграла вместо $\Phi(az)$.

* **3764.** См. указание к задаче 3763.

* **3765.** Воспользоваться вторым методом решения задачи 3763. При доказательстве второго соотношения необходимо исследовать интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos(x\sin\theta)}{x}\,dx$ при $|a|>1$ и $|a|\leqslant 1$. Для этого преобразовать выражение, стоящее в числителе, и учесть, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (интеграл Дирихле).

* **3767.**$^\circ$ Подставить в левую часть проверяемого равенства выражения для y' и y'', получаемые дифференцированием интеграла y по параметру. Одно из полученных слагаемых проинтегрировать по частям.

* **3768.** См. указание к задаче 3767.

* **3769.** См. указание к задаче 3767.

К ГЛАВЕ 13

3770. $\sqrt{5}\ln 2$.

3771. 24.

3772.$^\circ$ $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

3773. $2\pi a^{2n+1}$.

3774. $\frac{ab(a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$.

3775. $4\pi a\sqrt{a}$.

3776. $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

* **3777.** $\pi a^2/2$.Перейти к полярным координатам.

3778.$^\circ$ $2a^3\sqrt{2}/3$.

3779. $\frac{1}{12}\left[(R^2+4)^{3/2}-8\right]$.

3780. $8a\pi^3\sqrt{2}/3$.

3781. $R^4\sqrt{3}/32$.

3782.$^\circ$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^2)^{3/2}-1\right]$.

3783. $R^2\sqrt{2}$.

3784. $\frac{1}{3}\left\{(x_2^2+1)^{3/2}-(x_1^2+1)^{3/2}\right\}$.

3785. δa.

3786°. $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon$, где ε — эксцентриситет эллипса.
3787. $\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^2 b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$.
3788. $(1 - e^{-t})\sqrt{3}$.
3789. $(0, 2a/\pi, b\pi/2)$.
3790. $\frac{8k\sqrt{2}}{15}\left[(2\pi^2 - 1)(2\pi^2+1)^{3/2} + 1\right]$.
3791°. $I_x = I_y = (a^2/2 + h^2/3)\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$, $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.
3792. $3\pi R^2$.
3793. $\pi p^2/4$.
3794. $11/3$.
3795°. R^2.
3796. $ka\left(a + \frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $S = 2ka^2$ при $a = b$.
3797. $98p^2/81$.
3798. $8R^2$.
3799. $4R^2$.
3800°. $2Im/a$.
3801. $8mI\sqrt{2}/a$.
3803. $2\pi mIa/b^2$, где a и b — полуоси эллипса.
3804. $2\pi mI/p$.
3805°. $2\pi mIR^2/(h^2+R^2)^{3/2}$. При $R = h\sqrt{2}$.
3806. 3.
3807. $ab/2$.
3808. $-56/15$.
3809. 37 1/3.
3810°. 4π.
3811. 1) 1/3; 2) 1/12; 3) 17/30; 4) $-1/20$.
3812. Во всех четырех случаях интеграл равен 1.
3813. 0.
3814. $-2\pi ab$.
3815°. $-4a/3$.
3816. πa^2.
3817. $3\pi R\sqrt[3]{R}/16$.
3818. 13.
3819. 0.
3820. $3\sqrt{3}$.
3821°. $-\pi R^3/4$.
3822. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.
3823. $\iint_D (y-x)e^{xy}\,dx\,dy$.
3824. $\pi R^2/2$.
3825. 1)° 0; 2) $-\pi a^3/8$.
3827. 1/3.

*3836. Применить формулу Грина к двусвязной области, ограниченной контуром L и какой-либо окружностью с центром в начале координат и не пересекающейся с контуром L.

3837. π.

3838. 8.

3839. 4.

3840°. $\ln\frac{13}{5}$.

3841. $R_2 - R_1$.

3842. 10/3.

3843. 0.

3844. $-9/2$.

3845. $u = \frac{x^3+y^3}{3} + C$.

3846°. $u = (x^2 - y^2)^2 + C$.

3847. $u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$.

3848. $u = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y} + C$.

3849. $u = \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + C$.

3850°. $u = x^2\cos y + y^2\cos x + C$.

3851. $u = \frac{e^y-1}{1+x^2} + y + C$.

3852. $u = \frac{x-y}{(x+y)^2} + C$.

3853. $n = 1,\ u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$.

3854. $a = b = -1,\ u = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C$.

3855. $u = \ln|x+y+z| + C$.

3856. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$.

3857°. $\operatorname{arctg} xyz + C$.

3858. $u = \frac{2x}{x-yz} + C$.

3859. $u = \frac{x-3y}{z} + \frac{z^2}{2} + C$.

3860. $y = e^{y/z}(x+1) + e^{yz} - e^{-x} + C$.

3861. πab.

3862°. $3\pi a^2/8$.

3863. $6\pi a^2$.

*3864. $3a^2/2$. Перейти к параметрическому заданию, положив $y = tx$.

3865. 1/60.

3866. 1/210.

*3867. $2a^2$. Положить $y = x\operatorname{tg} t$.

*3868°. 1/30. Положить $y = xt^2$.

3869. FR.

3870. 1) 4/3; 2) 17/12; 3) 3/2 и 1.

3871. 1) $(a^2-b^2)/2$; 2) 0.

3872. 0.

3873°. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$, где k — коэффициент пропорциональности.
3874. $0{,}5k\ln 2$, где k — коэффициент пропорциональности.
3876. $4\sqrt{61}$.
3877. $\sqrt{3}/120$.
3878°. $\pi R^3/4$.
3879. 0.
3880. πR^3.
3881. $2\pi r^6/15$.
3882. $2\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}$.
3883. $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$ при $n\neq 2$; $\frac{2\pi R}{c}\ln\frac{c+R}{c-R}$ при $n=2$.
3884°. $\pi\left[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})\right]$.
***3885.** π^2R^3. Воспользоваться сферическими координатами.
3886. $8\pi R^4/3$.
3887. 3.
3888. $2\pi R^7/105$.
3889°. $4\pi abc/3$.
3890. 0.
3891. 1/8.
3892. $R^2H(2R/3+\pi H/8)$.
3893. $\pi/8$.
3894. $2\iint_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$.
3895°. $-\pi R^6/8$.
3896. $2\iiint_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.
3897. $\iiint_\Omega \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$.
3898. 0.
3899. $12\pi R^5/5$.

К ГЛАВЕ 14

3901. $1+y^2=C(1-x^2)$.
3902. $x^2+y^2=\ln Cx^2$.
3903. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$.
3904. $y=C\sin x-a$.
3905°. $Cx=(y-1)/y$.
3906. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$.
3907. $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$.
3908. $e^t=C(1-e^{-s})$.
3909°. $10^x+10^{-y}=C$.
3910. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\sin\frac{x}{2}$.
3911. $t=\frac{1}{a}\left(l+\frac{bl^{1-n}}{1-n}\right)$.
3912. $t=\frac{v^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\frac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$.

3913. $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.
3914. $y = \frac{1+x}{1-x}$.
3915°. $\cos x = \sqrt{2} \cos y$.
3916. $y = \frac{b+x}{1+bx}$.
3917. Гипербола $xy = 6$.
3918. Трактриса $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.
3919. Параболы $y^2 = Cx$.
3920. $y^k = Cx$.
3921. $y = e^{(x-a)/a}$.
3922. $(x-C)^2 + y^2 = a^2$.
3923. $y = \frac{1}{k} \ln |C(k^2x^2 - 1)|$.
3924. $x = y^n$.
3925. $\approx 2{,}7$ м/с.
3927. 0,467 км/ч; 85,2 м.
3928. $H = \left[\sqrt{h} - \frac{\sqrt{2g}}{4S} qT\right]^2$.
3929. $\ln\left|\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta - \theta_1}\right| = \frac{k_0}{2}(2t + \alpha t^2)$.

* **3930.** Если t — время, отсчитанное от полуночи и выраженное в часах, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид $\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k \cos \frac{\pi(t-12)}{12}\, dt$; отсюда $S = \frac{160000}{\left[9 - \sin \frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}$. Функция $S(t)$ определена при $6 \leqslant t \leqslant 18$.

3931°. $x + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = C$.
3932. $4y - 6x - 7 = Ce^{-2x}$.
3933. $x + C = 2u + \frac{2}{3} \ln|u-1| - \frac{8}{3} \ln(u+2)$, где $u = \sqrt{1+x+y}$.
3934. $y - 2x = Cx^3(y+x)$.
3935. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$.
3936. $\ln|y| + x/y = C$.
3937. $x^2 + y^2 = Cy$.
3938. $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.
3939. $x^2 = C^2 + 2Cy$.
3940. $e^{y/x} = Cy$.
3941. $\ln|Cx| = -e^{-y/x}$.
3942°. $y = xe^{1+Cx}$.
3943. $(x+y)^2 = Cx^3 e^{-x/(x+y)}$.
3944. $Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.
3945. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.
3946. $y^3 = y^2 - x^2$.
3947°. $y = -x$.
3948. $y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5x}$.
3949. Если $\frac{y}{x} = u$, то $\ln|x| = \int \frac{du}{\varphi(1/u)}$; $\varphi(u) = -\frac{1}{u^2}$ или $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$.

3950°. $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$.

3951. $x = y\ln|Cy|$.

3952. $x^2 = 2Cy + C^2$.

***3953.** Форму параболоида вращения. Пусть плоскость xOy — меридианная плоскость поверхности зеркала; в этой плоскости лежит искомая линия, дифференциальное уравнение получится, если приравняем тангенсы углов падения и отражения, выраженные через x, y, y'.

3954. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$.

3955°. $y = e^{-x^2}(C + x^2/2)$.

3956. $y = Cx^2e^{1/x} + x^2$.

3957. $y = (x + C)(1 + x^2)$.

3958. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

3959. Если $m \neq -a$, то $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$; если $m = -a$, то $y = (C + x)e^{mx}$.

3960. $y^2 - 2x = Cy^3$.

3961°. $x = Ce^{2y} + y^2/2 + y/2 + 1/4$.

3962. $x = y\ln y + C/y$.

3963. $y = e^x(\ln|x| + x^2/2) + Ce^x$.

3964. $y = Ce^{-\Phi(x)} + \Phi(x) - 1$.

3965°. $y = x/\cos x$.

3966. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$.

3967. $y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$.

3968. $x = -t\operatorname{arctg} t$.

3969. б) $\alpha + \beta = 1$.

3971. $y = Cx - x\ln|x| - 2$.

***3972.** $y = Cx \pm \frac{a^2}{2x}$. Дифференциальное уравнение задачи $|xy - x^2y'| = a^2$.

***3973.** $x = Cy \pm a^2/y$. Дифференциальное уравнение задачи $\left|xy - y^2\frac{dx}{dy}\right| = 2a^2$.

3974. $v = \frac{k_1}{k}\left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k}e^{-kt/m}\right)$.

3975°. $v = (v_0 + b)e^{-at^2} + b(at^2 - 1)$, где $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta - \theta_0 = e^{-kt}\int_0^t(t)e^{kt}\,dt$.

3977. 9,03 А.

3978°. $I = \frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[\omega Le^{-Rt/L} + R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\right]$.

3979. $x = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3980. $y = Cx^2 + 1/x$.

3981. $y = \frac{C}{x}\sqrt{x^2+1} + \frac{(1+x^2)^2}{3x}$.

3982. $y = Cx - 1$.

3983. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$.

3984. $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$.

3985°. $x = Ce^{-x^2/(2y^2)}$.

3986. $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

3987. $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$.

3988. $y = Ce^{-ex} + e^x - 1$.

3989. $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$.

3990. $y = Ce^{\sin y} - 2(1+\sin y)$.

3991. $x = y^2(1+Ce^{1/y})$.

3992. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

3993. $y = (C+e^x)(1+x)^n$.

3994. $y^4 = 4xy + C$.

3995. $y = Ce^x$ и $y = C + x^2/2$.

***3996°.** $y^2 = \frac{2}{3}\sin x + \frac{C}{\sin^2 x}$. Привести к уравнению линейному относительно $z = y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$.

3999. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln(x^2+y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2$.

4000°. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[2 + x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]$.

4001. $(1+y)e^{-y} = \ln\frac{1+e^x}{2} + 1 - x$.

4002. $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(2+x^3)$.

4004. $y = \frac{1}{2k}\left[e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right]$.

4005. $x^2 + y^2 = Cx$.

4006°. $(y-x)^2(x+2y) = 1$.

4007. Параболы $y = x + Cx^2$.

4008. $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$.

4009. Цепная линия.

4010. $y = Cx^2$.

***4011.** Пучок прямых $y - y_0 = C(x - x_0)$. Дифференциальное уравнение $y - y_0 = y'(x - x_0)$.

4012. Окружность с центром в точке (x_0, y_0): $x^2+y^2=2(xx_0+yy_0)$.

4013. Любая окружность с центром на оси Oy, касающаяся оси Ox.

4014. Если путь S, а время t, то $S = S_0 + Ce^{-k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^2}t + \frac{k_1}{2k_2}t^2$, где S_0 — начальный путь, а k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

4016. 1) 8/9 оборота в секунду; 2) через 6 мин 18 с.

4017. 0,00082 с.

***4018.** $v = v_0\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^{-1} e^{-\frac{3\cdot 10^5 f_0}{mv_0}}\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0}t}\right)$. Действующая сила F равна $\frac{d(mv)}{dt}$. Для решения этой задачи и следующих двух надо учесть, что масса m является переменной величиной, зависящей от времени t; скорость v — искомая функция.

***4019.** $v = \frac{g}{2m-k}(M_0 = mt)\left[\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^{k/m-2} - 1\right]$. См. указание к решению задачи 4018.

***4020.** $v = \frac{g}{\mu}e^{k_1\mu^{2/3}}\int_0^t \mu e^{-k_1\mu^{2/3}}\,dt$, где $\mu = M_0 - mt$, $k_1 = \frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$. См. указание к решению задачи 4018.

***4021°.** $y = m_0 + \frac{m_0}{k_1-k_2}(k_2e^{-k_1t} - k_1e^{-k_2t})$, где t — время, y — количество второго продукта. Если x — количество первого продукта, образовавшееся через t единиц времени, то $\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x)$. Отсюда находим $x = x(t)$. Скорость $\frac{dy}{dt}$ образования второго продукта пропорциональна величине $x - y$.

4022. 2,97 кг соли. Максимум достигается при $t = 33\ 1/3$ мин и равен 3,68 кг.

4023. $I = 1 + (I_0 - 1)e^{-t^2}$.

***4024.** $p = \frac{p_0le^{k\omega^2x^2}}{\int_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx}$, где $k = \frac{M}{2p_0lS}$. Практически важен случай, когда ω очень велико (центрифуги). Вместо того, чтобы вычислять интеграл в знаменателе при данном ω (он не выражается в элементарных функциях), вычисляют $\lim_{\omega\to\infty} p$ (см. задачу 2439). Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $S\,dp = \omega^2x\,dm$, где dm — масса элемента CD. Далее, $\gamma = 2kp$ (одна из форм закона Бойля-Мариотта; коэффициент пропорциональности обозначен через $2k$ для упрощения записи в дальнейшем); $dm = \gamma S\,dx = 2kpS\,dx$. В результате получится уравнение с разделяющимися переменными $dp/p = 2k\omega^2x\,dx$. Интегрирование его дает $p = Ce^{k\omega^2x^2}$. Далее, $M = \int_0^M dm = C\cdot 2kS\int_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx$, откуда находится C. Имеем $p = \frac{Me^{k\omega^2x^2}}{2kS\int_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx}$, но $\gamma_0 = 2kp_0 = \frac{M}{lS}$, $k = \frac{M}{2p_0lS}$ и окончательно $p = \frac{p_0le^{k\omega^2x^2}}{\int_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx}$.

4025°. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$.

4026. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

4027. $x - 2y + \ln|x + y| = C$.

4028. $e^{-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2)$.

4029. $y^2 = x + (x + 1)\ln\frac{C}{x+1}$.

4030°. $y^2e^{-y^2/x} = C$.

4031. $y = \frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\ln|Cx|$.

4032. $x^2y^2 + 1 = Cy$.

4033. $Cx = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$.

4034. $(1 + Cx)e^y = 1$.

4035. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.

4036°. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$.

4037. $y = x\,\mathrm{tg}(x + C)$.

4038. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.
4039. $y = \frac{1}{(1+x)[C+\ln|1+x|]}$.
4040°. $ny^n = Ce^{-nx/a} + nx - a$.
4041. $x^2 = y^2(C - y^2)$.
4042. $y(1 + \ln x + Cx) = 1$.
4043. $y(x + C) = \sec x$.
4044. $y = \left(\frac{C+\ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x\right)^2$.
4045°. $y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$.
4046. $y^2 = Ce^{-2a/x} - \frac{b}{a}$.
4047. $y = \frac{\varphi(x)}{x+C}$.
4048. 1) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$; 2) $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$.
4049. $\frac{\rho-k}{\rho} = \frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$.
4050°. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$.
4051. $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.
4052. $xe^y - y^2 = C$.
4053. $x^y = C$.
4054. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.
4055°. $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C$.
4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$.
4057. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$.
4058. $x - \frac{y}{x} = C$. Интегрирующий множитель $\mu(x) = 1/x^2$.
***4059.** $x^2 + 2x/y = C$. Искать интегрирующий множитель в виде функции $\mu(y)$.
4060°. $(x^2 + y^2)e^x = C$.
4061. $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C$.
4062. $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$.
4064. $\mu = y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)\,dx}$.
4065°. Выражение $\frac{Y'_x - X'_y}{X-Y}$ должно быть функцией от $(x + y)$.
4066. Выражение $\frac{Y'_x - X'_y}{xX-yY}$ должно быть функцией от xy.
4067. $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$.
4068. $y = \left[Ce^{(m-1)bx/a} - \frac{c}{b}\right]^{1/(1-m)}$.
4069. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.
4070°. $\frac{2x}{x-y} + \ln|x + y| + 3\ln|y - x| = C$.
4071. $x + y = a\operatorname{tg}(C + y/a)$.
4072. $y^3 - 3xy = C$.
4073. $x^2 - y^2 = Cy^3$.
4074. $3x^2y + x^3y^3 = C$.
4075°. $y\left(x^2 + \frac{1}{3}y^2\right) = Ce^{-x}$.
4076. $\ln|1 + y| - \frac{1+y}{x} = C$.

4077. $y^2 - 1 + Cxy = 0$.

4078. $\frac{xy}{x-y} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$.

4079. $\sqrt[3]{y} = C\sqrt[4]{x^2-1} + x^2 - 1$.

4080°. $y = \sin x + C\cos x$.

4081. $y = \frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$.

4082. $\operatorname{tg} x - \frac{\sin y}{\sin x} = C$.

4083. $xe^{\sin\frac{y}{x}} = C$.

4084. $xy\cos\frac{y}{x} = C$.

4085°. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$.

4086. $y = \frac{\operatorname{tg} x+\sec x}{C+\sin x}$.

4087. $\ln|Cx| = -e^{-(x^2+y^2)/x}$.

4088. $x + ye^{x/y} = C$.

4089. $y = x\ln|Cx|$.

4090°. $y^2 - by - axy = C$.

4091. Окружность $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}(ax+by) = C$ $(k \neq -1)$ или окружность $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k-1}(ax+by) = C$ $(k \neq 1)$; если $k = -1$ или $k = 1$, то прямая $ax + by = C$.

4092. Логарифмические спирали $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\pm\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

***4093.** $y^2 = \frac{x^4+C^4}{2x^2}$. Дифференциальное уравнение задачи $y^2 = x(x - yy')$.

4094. $I = t/2$.

4095. Вектор поля в каждой точке перпендикулярен к полярному радиусу точки. Интегральные кривые — семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. Уравнение семейства $x^2 + y^2 = C$. Изоклины — семейство прямых, проходящих через начало координат.

4096. 1) $y' = f(xy)$; 2) $y' = f(yi^2/x)$; 3) $y' = f(x^2 + y^2)$.

4097°. Прямые $y = Cx$. Результат может быть высказан в форме следующей геометрической теоремы: если семейство парабол, имеющих общую ось и общую вершину, пересечь прямой, проходящей через вершину, то касательные к различным параболам в точках пересечения их с прямой будут между собой параллельны.

4099. $y' = \frac{ay+b}{x} + C$; $y' = ay + bx + C$.

4103°. $y = 0{,}31$ при $\Delta x = 0{,}05$.

4104. $y \approx 1{,}68$ при $\Delta x = 0{,}05$.

4105. Точное решение: $y = e^{x^2/4} = f(x)$; $f(0{,}9) = 1{,}2244$. Приближенное решение: $f(0{,}9) = 1{,}1942$. Относительная погрешность равна $-2{,}5\%$.

4106. При точном решении $x = \sqrt[3]{3(e-1)} \approx 1{,}727$; численное интегрирование при делении интервала на 4 части дает $x \approx 1{,}72$.

4107°. $y_2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$.
4109. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \ldots$
4110°. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + \ldots$
4111. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 9}x^7 - \frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} - \ldots$
4112. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \ldots$
4113. $y = 0$.
4114. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$
4115°. $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots$
4116. $y = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} - \frac{60(x-1)^5}{5!} + \ldots$
4117. $y = Cx + C^2$; особый интеграл $x^2 + 4y = 0$.
4118. $y = Cx - 3C^3$; особый интеграл $9y \pm 2x\sqrt{x} = 0$.
4119. $y = Cx + 1/C$; особый интеграл $y^2 = 4x$.
4120°. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; особый интеграл $x^2 + y^2 = 1$.
4121. $y = Cx + \sin C$; особое решение $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.
4122. $x = Cx - \ln C$; особое решение $y = \ln x + 1$.
4123. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$; особое решение $y = 0$.
4124°. $y = Cx^2 + 1/C$; особый интеграл $y^2 - 4x^2 = 0$.
4125. $2Cx = C^2 - y^2$; особого интеграла нет.
4126. $x = Ce^{-p} + 2(1-p)$, $y = x(1+p) + p^2$; особого интеграла нет.
4127. $y = Cx - e^C$; особое решение $4y = x(\ln x - 1)$.
4128. $y = Cx + C + C^2$; особое решение $y = -(x+1)^2/4$.
4129. $y = Cx + a\sqrt[3]{1 - C^3}$; особый интеграл $\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}$.
4130. $(C - x)y = C^2$; особое решение $y = 4x$.
4131°. $y^2 - 4e^x = 0$.
4132. $xy = 1$.
4133. $2y - x^2 = 0$.
4135°. Равнобочная гипербола $2xy = \pm a^2$, где a^2 — площадь треугольника; тривиальное решение — любая прямая семейства $y = \pm C^2x/2 + aC$.
4136. $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.
4137. Эллипсы и гиперболы.
4138. $x = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$ или
$x = \frac{(p^2+1)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$, $y = \frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$.
4139. $y^2 = Cx^{-1/k1} + \frac{k^2x^2}{2k+1}$.
* **4140°.** $y = \cos\alpha\left(C + \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$, $x = \sin\alpha\left(a - C - \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$. В полученном дифференциальном уравнении положить $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, а затем выразить x через y и параметр α, найти dx, заменить dx через $dy/\operatorname{tg}\alpha$ и решить получившееся дифференциальное уравнение, считая y функцией α.
4141. $S = at^2$, где a — некоторая определенная константа.

4142. $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln|Cx|$.

4143. $y = Ce^{-x/2}$.

4144. $y = C(x^2 + y^2)$.

4145°. $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

4146. Если параметр парабол равен $2p$ и прямая взята в качестве оси ординат, то уравнения траекторий будут $y = C + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}$.

4147. Трактрисы.

4148. Отсчитывая угол α в одном из двух возможных направлений, получим уравнение семейства $xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2) = C$.

4149°. Отсчитывая угол α в одном из двух возможных направлений, получим уравнение семейства $\ln(2x^2+xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C$.

* **4150.** Можно принять, например, что ветер дует вдоль оси Ox. Линии распространения звука по плоскости Oxy ортогональными траекториями семейства окружностей $(x-at)^2+y^2 = (v_0t)^2$, где t — время, прошедшее после выхода звуковой волны из источника звука, а v_0 — скорость звука в неподвижном воздухе. Для любого фиксированного t дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий $y' = \frac{y}{x-at}$ совместное с уравнением семейства окружностей. Исключая t, получим некоторое уравнение Лагранжа. Его общее решение $x = C(\cos\varphi + b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{1/b}$, $y = C\sin\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{1/b}$, где $b = \pm\frac{a}{v_0}$, φ — параметр.

4151. $x = C\sin t+R(\cos t+t\sin t)$, $y = -C\cos t+R(\sin t-t\cos t)$.

4152. $x = C/\operatorname{ch} t + a(t - \operatorname{th} t)$, $y = C\operatorname{th} t + a/\operatorname{ch} t$.

4153. $x = a(\cos t+t\sin t)-\cos t(at^2/2+C)$, $y = a(\sin t+t\cos t)- - \sin t(at^2/2 + C)$.

4154°. $x = C\sin t + 2\operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{tg}^2 t - C\cos t - 2$.

4155. $y = x^3/6 - \sin x + C_1x + C_2$.

4156. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2 - 1) - \frac{x}{2}\ln(1 + x^2) + C_1x + C_2$.

4157°. $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{3}{2}\right] + C_1x + C_2$.

4158. $y = C_1x^2 + C_2$.

4159. $y = C_1e^x + C_2 - x - x^2/2$.

4160. $y = x^3/3 + C_1x^2 + C_2$.

4161. $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$.

4162°. $y = (C_1x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2$.

4163. $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$.

4164. $y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x - 1)^3} + C_2$.

4165. $y = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$.

4166. $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

4167°. $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$.

4168. $y = C_1e^{x/a} + C_2e^{-x/a}$.

4169. $x = \pm\frac{4}{3}(y^{1/2} - 2C_1)\sqrt{y^{1/2} + C_1} + C_2$.
4170. $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$.
4171. $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$.
4172. $y = C_1 e^{C_2 x}$.
4173. $y\cos^2(x + C_1) = C_2$.
4174. $(x + C_2)\ln y = x + C_1$.
4175°. Если произвольная постоянная, вводимая первым интегрированием, положительна $(+C_1^2)$, то $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; если же она отрицательна $(-C_1^2)$, то $y = C_1\frac{1+e^{2(C_1x+C_2)}}{1-e^{2(C_1x+C_2)}} = -C_1\operatorname{cth}(C_1x + C_2)$; если $C_1 = 0$, то $y = -\frac{1}{x+C_2}$.
4176. $x = C_1 + \cos C_2 \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$.
4177. $C_1x + C_2 = \ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.
4178. $\frac{x+C_2}{2} = C_1\operatorname{arctg}(C_1\ln y)$, $C_1 > 0$.
4179. $\ln|C_1y| = 2\operatorname{tg}(2x + C_2)$.
4180. $y = \ln|x^2 + C_1| + \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2$, если $C_1 < 0$, и $y = \ln|x^2 + C_1| + \frac{2a}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, если $C_1 > 0$.
* **4181°.** После подстановки $y' = p$ уравнение распадается на два, из которых одно — типа Клеро. Его общее решение $y = C_1 + C_2e^{C_1x}$, а особые решения $y = \frac{4}{C-x}$. Другое уравнение $y' = 0$.
4182. $y = C_1x(x - C_1) + C_2$ и особые решения $y = x^3/3 + C$.
4183. $y^2 = C_1x^4 + C_2$.
4184. $x = \ln\left|\frac{C_1x^{C_1}}{C-2-x^{C_1}}\right|$.
4185°. $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2}$.
4186. $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$.
4187. $y = C_1xe^{C_2/x}$.
4188. $\ln|y + C_1| + \frac{C_1}{y+C_1} = x + C_2$.
4189. $y = x^3 + 3x + 1$.
4190°. $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$.
4191. $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$.
4192. $y = \frac{4}{(x+4)^2}$.
4193. $y - x = 2\ln|y|$.
4194. $y = \sqrt{2x - x^2}$.
4195°. $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$.
4196. $y = -\ln|1 - x|$.
4197. $y = (x + 1)/x$.
* **4198.** $y = x$. Сделать подстановку $y = ux$.
4199. $y = 2e^{x^2/2} - 1$.

***4200.** Дифференциальное уравнение линии $dx = \frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^{2/k} - 1}}$, где k — коэффициент пропорциональности. Если $k = 1$, то

$$y = \frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1 x + C_2} + e^{-(C_1 x + C_2)}\right] = \frac{\operatorname{ch}(C_1 x + C_2}{C_1};$$

это — цепная линия. Если $k = -1$, то $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$; это окружность. Если $k = 2$, то $(x + C_2)^2 = 4C(y - C_1)$; это — парабола. Если $k = -2$, то $dx = \sqrt{\frac{C_1 y}{1 - C_1 y}}\,dy$; это — дифференциальное уравнение циклоиды.

4201. $e^{y/a} = C_2 \sec(x/a + C_1)$.

4202°. $Cx = y^{2k-1}$.

4203. Цепная линия.

4204. $v = \sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg + kv_0^2}}$.

4205°. Парабола.

4206. $S = \frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t + C\right)^3} - \sqrt{C^3}\right]$.

***4207.** Пусть ось абсцисс направлена вертикально вниз, начало координат — на поверхности жидкости, уравнение луча $y = f(x)$. На глубине x имеем $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + d\alpha)} = \frac{m + dm}{m}$, где m — показатель преломления на глубине x, а α — угол между вертикалью и касательной к световому лучу. Очевидно, $\operatorname{tg}\alpha$ равняется y'. Из уравнения $m\sin\alpha = (m + dm)(\sin\alpha\cos d\alpha + \cos\alpha\sin d\alpha)$ раскрыв скобки и отбросив бесконечно малые порядка выше первого, получим $m\,d\alpha = -dm\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\frac{dm}{m} = -\frac{dy'}{y'(1 + y'^2)}$. Интегрируя это уравнение, найдем y' как функцию m. Подставляя вместо m его выражение через x и интегрируя вторично, получим решение $y = \frac{m_0 h \sin\alpha_0}{m_2 - m_1}\ln\left|m + \sqrt{m^2 - m_0^2\sin^2\alpha_0}\right| + C$, где $m = \frac{(m_2 - m_1)x + m_1 h}{h}$.

4208. $y = x^2\ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4209. $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4210. $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9$ (P_9 — полином 9-й степени относительно x с произвольными коэффициентами).

4211°. $y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1|$.

4212. $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

4213. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2 x + C_3$.

4214. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

4215°. Решения можно записать в трех формах: $y = C_1\sin(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1\operatorname{sh}(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1\operatorname{ch}(C_2 x + C_3)$.

4216. $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_1^2$.

4217. $y = C_2\left(xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1}e^{C_1 x}\right) + C_3$.

4219. 2) $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \ldots$

4220°. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4221. $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4222. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$ Если $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}$, то при $x = -0{,}5$ получается знакочередующийся числовой ряд и значение первого из отброшенных членов меньше 0,001.

4223. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots$; пятого.

4224. $y = x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{80}x^8 - \frac{7}{4400}x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96951.

***4225.** Дифференциальное уравнение задачи $E = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}$, где Q — количество электричества, протекшее через цепь за промежуток времени от начала опыта до момента t. Выразив Q через V (V — наличное количество воды в сосуде в момент t) и определив из условий задачи коэффициенты, придем к уравнению $V'' + aVV' + b = 0$, где $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935$. Интегрируя его при начальных условиях $V_0 = 1000$ см^3, $V_0' = -kI_0 = -0{,}00187$ см^3/с, получим ряд

$$V = 1000 - 0{,}00187t - 10^{-9}[2{,}91t^3 - 3{,}64t^4 + 3{,}64t^5 - 3{,}04t^6 + 2{,}17t^7 - \ldots].$$

Ряд знакочередующийся, коэффициенты, начиная с шестого, убывают, стремясь к нулю, что удобно для вычислений.

***4226.** Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{k_1}{M_0 - kQ} = E$. Взяв в качестве искомой функции количество y хлористого водорода, не разложившегося к моменту t, приведем уравнение к виду $yy'' + ay' + by = 0$, где $a = k_1/L = 50$, $b = kE/L = 0{,}0191$. Интегрируя это уравнение при начальных условиях $y_0 = M_0 = 10$, $y_0' = -kI_0 = -0{,}00381$, получим ряд $y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3 \cdot (1{,}21 - 1{,}52t + \ldots)$.

4227°. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

4228. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' - 3x(1-x)y' + 3(1-x)y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. 1) $\sin^2 x/\cos^2 x \neq \text{const}$; 2) $y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = 0$.

***4232.** 3) По формуле Остроградского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int P(x)\,dx}$, или, раскрывая определитель (вронскиан), $y_1y_2' - y_1'y_2 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$. Делим обе части уравнения на y_1^2, тогда $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P(x)\,dx}$, откуда и следует искомое соотношение.

4233. $y = C_1 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2 x$.

4234°. $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$.

4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

***4236.** Функции P и Q должны быть связаны соотношением $Q' + 2PQ = 0$. Подставить $y_1 = 1/y_2$ в формулу (вытекающую из формулы Остроградского) задачи 4232, полученное соотношение продифференцировать дважды и y_2', y_2'' подставить в данное уравнение.

***4237.** $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)$. Полагаем согласно условию $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Подставляя y_1 в данное уравнение, получим $B = 0$, $D = 0$, $A/C = 4/\text{-}3$, или $A = 4k$, $C = -3k$. Следовательно, частное решение будет $y_1 = k(4x^3 - 3x)$. В соответствии со свойством линейного уравнения можно принять $k = 1$, тогда $y_1 = 4x^3 - 3x$. Зная одно частное решение, обычным путем находим второе и составляем общее решение.

4238°. $y = C_1 \sin x + C_2[1 - \sin x \ln|\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)|]$.

4239. $y = C_1 x + C_2 x \int \frac{e^x\,dx}{x^2}$.

4240. $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$.

4241°. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$.

4242. $y = x^3 + x(C_1 + C_2 \ln|x|)$.

4243. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$.

4244. $y = C_1 x^3 + C_2(x+1) - x$.

4245°. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$

4247. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \ldots$

4248. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^6}{2^3\cdot 5\cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4\cdot 7\cdot 4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2^n(2n-1)n!} + \ldots$

4249. $y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \ldots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \ldots\right)$.

4250°. $y = C_1\left(1 + \frac{x^4}{12} + \ldots\right) + C_2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots\right)$.

4251. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

4252. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

4253. $y = C_1 e^{4x} + C_2$.

4254. $y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255°. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x/3}$.

4256. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

4257. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

4258. $y = e^x\left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}\right)$.

4259. $y = e^x(C_1 + C_2 x)$.

4260°. $x = (C_1 + C_2 t)e^{2,5t}$.

4261. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x/4}$.

4262. $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

4263. $y = 3e^{-2x} \sin 5x$.

4264. $y = e^{-x/2}(2 + x)$.

4265. $y = [1 + (1-m)x]e^{mx}$.

4266°. $y = \cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

4267. Если $k>0$, то $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\sin[\sqrt{k}(x-x_0)]+y_0\cos[\sqrt{k}(x-x_0)]$; если $k<0$, то $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}\left[(y_0\sqrt{k_1}+a)e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+(y_0\sqrt{k_1}-a)e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}\right]$, где $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x/2}+e^x$.

4269. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.

4270°. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin 2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1$.

4274. $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-0{,}2$.

4275. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно: 1) $\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$; 5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$; 8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$; 9)° $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-5x/2}+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно: 1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$; 2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\sin x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$; 5) $\cos 2{,}5x+\sin 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$; 6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$; 7) $\frac{1}{169}e^{-x}[(650x+2650)\sin x-(3250x-400)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{5x/2}-xe^{-5x/2}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^x$; 3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{169}\left(-\frac{5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$; 6) $\frac{3}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$; 7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$; 9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно: 1) $2x^3-13x+2$; 2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$; 6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\,\mathrm{ch}\,x$; 8) $0{,}5+0{,}1\,\mathrm{ch}\,2x$.

4279. $y=e^{3x/5}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно: 1) $\frac{25}{16}e^{3x/5}$; 2) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$; 3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{1118}{125}\right)$; 4) $-\frac{5}{9}\cos xe^{3x/5}$; 5) $-\frac{1}{8}xe^{3x/5}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280°. $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x_2}+1+x\,\mathrm{arctg}\,x)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;
2) $y=\frac{1}{2}e^x\left[\arcsin e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1\right]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$;
3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-3x/2}+2e^{-5x/2}$.

4284. $x=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

4285. $y=e^x+x^2$.

4286°. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

4287. $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin x-\cos x$.

***4288.** Дифференцировать указанное выражение для y дважды; подставить y, y' и y'' в данное уравнение; во всех трех случаях получится тождество.

4289. $y = x^3(C_1 + C_2x^4)$.

4290°. $y = \frac{x}{2} + C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x|$.

4291. $y = x\left[C_1 + C_2 \ln|x| + \ln^2|x|\right]$.

4292. $y = x\ln|x| + C_1x + C_2x^2 + x^3$.

4293. Если $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$, то $y = C_1\cos kt + C_2 \sin kt + \frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t + \frac{e\omega^2}{k^2}$, где $k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega^2$. Если $\frac{1}{m\alpha} < \omega^2$, то $y = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt} - \frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t - \frac{e\omega^2}{k^2}$, где $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$.

4294. $s = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t})$.

4295. $s = e^{-0,2t}[10\cos 0{,}245t + 8{,}16\sin 0{,}245t]$; $s\Big|_{t=3} \approx 7{,}07$ см.

4296°. $t = \sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$.

4297. $s = e^{-0,245t}[2\cos 156{,}6t + 0{,}00313\sin 156{,}6t]$.

4298. $k = 33\ 1/3$ г/см $= 33\ 1/3\cdot g\cdot 10^{-5}$ Н/см; $t = 0{,}38$ с; высота погруженной части чурбанчика $x = 5[3+\cos 8{,}16t]$. При составлении уравнения считать $g = 1000$ см/с^2.

***4299.** $r = \frac{a_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$. Все происходит так, как будто трубка неподвижна, но на шарик действует сила, равная $m\omega^2 r$ (r — расстояние от оси вращения до шарика).

4300. Если $k > m\omega^2$, то $r = \frac{a_0}{k-m\omega^2}\left[k - m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}\right)\right]$;
если $k = m\omega^2$, то $r = a_0\left(1 + \frac{k}{2m}t^2\right)$;
если $k < m\omega^2$, то $r = \frac{a_0}{m\omega^2-k}\left[m\omega^2\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}\right) - k\right]$.

4301. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3$.

4302°. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$.

4303. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$.

4304. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

4305. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$.

4306. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$.

4307. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.

4308°. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3x^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4309. $y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

4310. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos\frac{x}{2} + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\sin\frac{x}{2} + C_7x + C_8$.

4311. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1})$.

4312. $y = 1 + \cos x$.

4313°. $y = e^x + \cos x - 2$.

4314. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x} - x - 4$.

4315. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

4316. $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + \frac{1}{9}\cos x$.

4317°. $y = (C_1 + C_2x)\cos ax + (C_3 + C_4x)\sin ax - \frac{x^2\cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4\cos x + C_5\sin x$.

4319. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{x^2-3x}{8}e^x - \frac{1}{4}x\sin x$.

4320. $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x + (C_3 + C_4x + x^2)e^{-x} + \sin x + \cos x$.

4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.

4322°. $y = e^x + x^3$.

4323. $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$.

4324. 1) $x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, $y = e^{-6t}[(C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$; 2) $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$; 3) $x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin et)$, $y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)$; 4)° $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$; 5) $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^t$; 6) $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$; 7)° $x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t)$, $y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t]$, $z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t]$.

4325. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + t\,\mathrm{sh}\,t$, $y = C_2e^t - C_2e^{-t} + \mathrm{sh}\,t + t\,\mathrm{ch}\,t$.

4326°. $x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t}$,
$y = \frac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{3}{10}e^{-2t}$.

4327. $z = C_1y$, $zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2$.

4328. $y = \sqrt{C_1 + x^2}/\ln\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|$, $z = \sqrt{C_1 + x^2}\ln\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|$.

4329. $y/x = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

4330. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$, $z = C_2y$.

4331. $y^2 - z^2 = C_1$, $yz - y^2 - x = C_2$.

4332. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$, $y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t$.

4333°. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$,
$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$.

4334. $x = C_1 + C_2t + C_3t^2 - \frac{1}{6}t^3 + e^t$,
$y = C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2}(C_2 - 1)t^2 - \frac{1}{3}C_3t^3 + \frac{t^4}{24} - e^t$.

4335. $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

4336. $z = x - y$, $y(y - 2x)^3 = (x - y)^2$.

4337. $x = t/3$, $y = -t/3$.

4338. $x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$,
$z = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.

4339. $x = -e^{-t}$, $y = e^{-t}$, $z = 0$.

4340°. Линии $y_1 = \frac{C_1x^2 - C_2}{2x}$ и $y_2 = -\frac{C_1x^2 + C_2}{2x}$. При заданных начальных условиях получаются гиперболы $y_1 = \frac{3-x^2}{2x}$, $y_2 = \frac{3+x^2}{2x}$.

4341. $y = e^{2x}$.

4342. Плоская линия $x - y + z = 0$, $x = \pm\frac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}$.

4343. $x = \frac{1}{2}\left[gt^2 + (l_1 - l_0)\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2T}\right)\right]$,
$y = \frac{1}{2}\left[gt^2 + l_0 + l_1 + (l_1 - l_0)\cos\frac{\pi t}{2T}\right]$.

4344. $x = 10\operatorname{ch}2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}, y = 10\operatorname{ch}2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{300}{49}$. Здесь x — путь более тяжелого шарика, а y — более легкого.

4345°. $A = \frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1 - \left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$, $B = \alpha\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, где
$\alpha = \sqrt{B_0^2 + \frac{2k_1}{k}A_0}$, $\beta = \frac{\alpha - B_0}{\alpha + B_0}$.

* **4346.** Если T — количество яда, то $\frac{dN}{dt} = aN - bNT$, $\frac{dT}{dt} = aN$ и $\frac{dN}{dt} = 0$ в момент, когда $N = M$.

4347. $h_1 = \frac{S_1H_1 + S_2H_2}{S_1 + S_2} + \frac{S_2}{S_1 + S_2}(H_1 - H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,
$h_2 = \frac{S_1H_1 + S_2H_2}{S_1 + S_2} - \frac{S_1}{S_1 + S_2}(H_1 - H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$.

4348. 1) $\theta - \theta_0 + 0{,}002(\theta^2 - \theta_0^2) = 0{,}00008\frac{E^2T^3}{R_0T^2}$; на 53°;
2) $\theta - \theta_0 + 0{,}002(\theta^2 - \theta_0^2) = \frac{6E^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t - \sin 200\pi t)$; на 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876

4351. $y\Big|_{x=1} = 3{,}43656\ldots$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,16667	3,37500	3,42500	3,43472

y_5 дает относительную погрешность порядка 0,1%.

4352. 0,46128; то же дает формула Симпсона при $2n = 10$. Все знаки верные.

4353. $y_4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{5x^5}{12} + \frac{16x^6}{75} +$ и т. д.;
$y_4(0{,}3) \approx 1{,}543$; $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{11x^5}{20} + \frac{22x^6}{45} +$ и т. д.;
$f(0{,}3) \approx 1{,}545$. Погрешность менее 0,2%.

4354. 0,808.

* **4355°.** 1,001624. Результат получается всего быстрее, если искомую функцию искать сразу в виде степенного ряда.

* **4356.** 1,0244. См. указание к предыдущей задаче.

4357. $y = x + \frac{2}{4!}x^5 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^7 + \ldots + \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1} + \ldots$; $k = 0{,}2297$.

К ГЛАВЕ 15

4358. $\sin^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}[\cos 2kx - C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + $
$+ C_{2k}^2 \cos(2k-4)x - \ldots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{k-1} \cos 2x]$;
$\sin^{2k+1} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}[\sin(2k+1)x - C_{2k+1}^1 \sin(2k-1)x + $
$+ C_{2k+1}^2 \sin(2k-3)x - \ldots + (-1)^k C_{2k+1}^k \sin x]$;
$\cos^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k-1}}[\cos 2kx + C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + $
$+ C_{2k}^2 \cos(2k-4)x + \ldots + C_{2k}^{k-1} \cos 2x]$;
$\cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}}[\cos(2k+1)x + C_{2k+1}^1 \cos(2k-1)x + $
$+ C_{2k+1}^2 \cos(2k-3()x + \ldots + C_{2k+1}^k \cos x]$.

4360°. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x \ldots$ Так как $\sin x$ входит только в четных степенях, то $\cos nx$ можно рационально выразить через $\cos x$.

4363. 1) $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n}$ и $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n+1}$, где $\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$;
2) $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n}$, где $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ при n нечетном и $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ при n четном, и $\varphi = (2\nu - 1)\frac{\pi}{n+1}$, где $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$.

* **4365.** Заметить, что $\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) d\varphi = 0$.

4366. Да.

4371. 1)° $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ и $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$;
2) $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ и $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$.

4372. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

4373. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$.

4374. $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$ $(-\pi < x < \pi)$; $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ $(0 < x < 2\pi)$.

4375. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4376°. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - $ $- 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$, $S_2 = \frac{\pi^2}{12}$, $S_3 = \frac{\pi^2}{8}$.

4377. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right] \right\} \sin x$.

4378. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx$.

4379. $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

4380°. $\frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cos nx \right]$.

4381. $\frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \cos nx \right]$.

4382. $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]}{(2n+1)^2}$.

4383. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2}\right)\right] - 1.$

4384. $\frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2} +$
$+ \pi(e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2} =$
$= \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l \cos \frac{n\pi x}{l} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right].$

4385. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \frac{a \cos x}{1-a^2} - \frac{a \cos 2x}{2^2-a^2} + \ldots\right).$

4386°. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1-a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2-a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2-a^2} - \ldots\right).$

4387. $\sin ax = \begin{cases} \frac{4a}{\pi}\left[\frac{\cos x}{a^2-1} + \frac{\cos 3x}{a^2-3^2} + \frac{\cos 5x}{a^2-5^2} + \ldots\right] & (a \text{ четное}); \\ \frac{4a}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} + \frac{\cos 2x}{a^2-2^2} + \frac{\cos 4x}{a^2-4^2} + \ldots\right] & (a \text{ нечетное}). \end{cases}$

4388. $\cos ax = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{a^2-1^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{a^2-5^2} + \ldots\right] & (a \text{ четное}); \\ -\frac{4}{\pi}\left[\frac{2\sin 2x}{a^2-2^2} + \frac{4\sin 4x}{a^2-4^2} + \frac{6\sin 6x}{a^2-6^2} + \ldots\right] & (a \text{ нечетное}). \end{cases}$

4389. $\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2+n^2} \sin nx.$

4390°. $\frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{1+n^2}\right]; \ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n \operatorname{ch} \pi}{1+n^2} n \sin nx.$

4391. $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi n}{2}}{n} - \frac{3\left(1-\cos \frac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right] \cos \frac{2\pi n x}{3} =$
$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\cos \frac{2\pi x}{3}}{1} - \frac{\cos \frac{4\pi x}{3}}{2} + \frac{\cos \frac{8\pi x}{3}}{4} - \ldots\right) -$
$- \frac{9}{2\pi^2} \left(\frac{\cos \frac{2\pi x}{3}}{1^2} + \frac{\cos \frac{4\pi x}{3}}{2^2} + \frac{\cos \frac{8\pi x}{3}}{4^2} + \ldots\right).$

***4392.** $f(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{3} \sin 2nx - \sin \frac{n\pi}{3} \cos 2nx\right) =$
$= \frac{\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \left(\frac{\sin 2x}{1^2} - \frac{\sin 4x}{2^2} + \frac{\sin 8x}{4^2} - \frac{\sin 10x}{5^2} + \ldots\right) -$
$- \frac{9}{8\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 8x}{4^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \ldots\right).$
Воспользоваться результатом задачи 4368.

***4393.** 1) $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1^2} + \frac{\sin 3\alpha \sin 3x}{3^2} + \ldots\right);$
2) $f(x) = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n\alpha}{n^2} \cos 2nx =$
$= \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin^2 \alpha \cos 2x}{1^2} + \frac{\sin^2 2\alpha \cos 4x}{2^2} + \ldots\right).$
Воспользоваться результатом задачи 4371.

4394. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}; \ \frac{\pi^3}{32}.$

4395°. $\frac{8}{15}\pi^4 - 48\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^4}$; в) $\frac{7}{720}\pi^4$.

***4396.** $\frac{\pi-x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^3+1)}$ (см. задачу 4374).

***4397.** $\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n(n^2+1)} \sin nx$ (см. задачу 4374).

***4398°.** $\frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)} \cos nx$. Продифференцировать ряд и воспользоваться решением задачи 4374 и тем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (см. задачу 4376).

* **4399.** $\frac{\pi^3}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x^2}{8}-2\cos x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\cos nx\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$; воспользоваться рядом $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx$ (см. задачу 4380 при $h=\frac{\pi}{2}$) и тем, что $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (см. задачу 4394).

4400. $f_1(x)\approx 27{,}8+6{,}5\cos x-0{,}1\sin x-3{,}2\cos 2x+0{,}1\sin 2x$; $f_2(x)\approx 0{,}24+0{,}55\cos x+0{,}25\sin x-0{,}08\cos 2x-0{,}13\sin 2x$; $f_3(x)\approx 0{,}12+1{,}32\cos x+0{,}28\sin x-0{,}07\cos 2x+0{,}46\sin 2x$.

К ГЛАВЕ 16

4401. Прямые, параллельные вектору $\boldsymbol{A}\{a,b,c\}$: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

4402. Окружности с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$.

4403°. Винтовые линии с шагом $2\pi h/\omega$, расположенные на цилиндрах, оси которых совпадают с осью z: $x=R\cos(\omega t+\alpha)$, $y=R\sin(\omega t+\alpha)$, $z=ht+z_0$, где R, α и z_0 — произвольные постоянные.

4404. 1) Окружности, образованные пересечением сфер с центром в начале координат и плоскостей, параллельных биссекторной плоскости $y-z=0$: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y-z+C=0$, где R и C — произвольные постоянные. 2) Окружности, образованные пересечением сфер с центром в начале координат и плоскостей, отсекающих на осях координат отрезки, равные по величине и по знаку: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$. 3) Линии пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=R^2$ и гиперболических параболоидов $zy=Cx$.

4405. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=3$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$.

4406. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=2[(\mathrm{y}-\mathrm{z})\boldsymbol{i}+(\mathrm{z}-\mathrm{x})\boldsymbol{j}+(\mathrm{x}-\mathrm{y})\boldsymbol{k}]$.

4407°. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=6\mathrm{xyz}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\mathrm{x}(\mathrm{z}^2-\mathrm{y}^2)\boldsymbol{i}+\mathrm{y}(\mathrm{x}^2-\mathrm{z}^2)\boldsymbol{j}+\mathrm{z}(\mathrm{y}^2-\mathrm{x}^2)\boldsymbol{k}$.

4408. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=6$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$.

4409. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$.

4410. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\mathrm{k}/\mathrm{r}^3$, где k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние от точки приложения силы до начала координат, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$.

4411. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$.

4412. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$. В точках оси Oz поле не определено.

4413°. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{z}\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}$, где k — коэффициент пропорциональности. В точках плоскости Oxy поле не определено.

4414. $3a$.

4416. $\mathrm{div}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra})=\boldsymbol{ab}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra})=4\boldsymbol{ra}$.

4417. 0.

4418. 1) 0; 2) 0; 3) 0.

4419°. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=2\mathrm{f}(\mathrm{r})/\mathrm{r}+\mathrm{f}'(\mathrm{r})$, если поле пространственное, $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\mathrm{f}(\mathrm{r})/\mathrm{r}+\mathrm{f}'(\mathrm{r})$, если поле плоское.

4421. $\varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{A}$.

4422. $\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|}$.

4423. $2\boldsymbol{a}$.

4424°. $2\omega\boldsymbol{n}^0$, где $\boldsymbol{n}^0$ — единичный вектор, параллельный оси вращения.

4430. $u = \boldsymbol{Ar} + C$.

4431. $u = -\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) + C$.

4432. Нет.

4433. Нет.

4434°. $u = -\frac{k}{2}\ln(x^2+y^2) + C$.

4435. Нет.

4437. 2/3, 1/3, 1/2.

4438. $k\delta \ln \frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.

4439. $4k(\sqrt{2}-1)$.*

4440. $\frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b} \ln \frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4441. $2k\delta a \ln(1+\sqrt{2})$.

4442. $\frac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}} \arccos h$, если $h < 1$; $2\pi k$, если $h = 1$; $\frac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}} \ln(h+\sqrt{h^2-1})$, если $h > 1$.

* **4443.** 1) $2k\pi R\delta \ln \frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $2k\pi R\delta \ln \frac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$. Разделить цилиндр пополам сечением, параллельным основанию, и вычислить потенциал боковой поверхности цилиндра как сумму потенциалов боковых поверхностей обеих его половин, применяя результат 1).

4444. $2k\pi R\delta$.

* **4445.** 1)° $k\pi\delta \left[H\sqrt{R^2+H^2} - H^2 + R^2 \ln \frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\frac{k\pi\delta}{2}\left[H\sqrt{4R^2+H^2} - H^2 + 4R^2 \ln \frac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{R}\right]$;

см. указание к задаче 4443.

4446. $\pi k\delta H(l-H)$, где l — образующая конуса.

4447. $u = \frac{2}{3}k\frac{\pi R^3\delta}{a}\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{a}{R}\right)^3 - \frac{3n}{2R} + 1\right]$ при $a \geqslant R$;

$u = \frac{2}{3}k\pi a^2\delta\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{R}{a}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 2\right]$ при $a \leqslant R$;

$u = \frac{k\pi R^2\delta}{3}(4\sqrt{2}-3)$ при $a = R$.

* **4448.** $u = \frac{4k\pi\delta}{3a}(R^3-r^3) = \frac{kM}{a}$ (M — масса тела) при $a \geqslant R$; $u = 2k\pi\delta(R^2-r^2)$ при $a \leqslant r$; $u = \frac{4k\pi\delta}{3a}(a^3-r^3) + 2k\pi\delta(R^2-a^2)$ при $r \leqslant a \leqslant R$. Провести концентрическую сферу радиуса a и применить результаты первых двух случаев.

4449. $\frac{kM}{a}\left[1+\frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$, где M — масса шара.

---

*В ответах к задачам 4439–4449 k — гравитационная постоянная.

4450. И поток и циркуляция равны 0.

4451. Поток равен $2aS$, где S — площадь области, ограниченной контуром L. Циркуляция равна 0.

4452. И поток и циркуляция равны 0.

4453°. Поток $3\pi R^4/2$, циркуляция $2\pi R^2$.

4454. В случае, когда начало координат лежит внутри контура, поток равен 2π, в противном случае поток равен 0. Циркуляция в обоих случаях равна 0.

4455. Циркуляция равна 2π, если начало координат лежит внутри контура, и равна 0, если вне контура. Поток в обоих случаях равен 0.

4456. 2.

4458°. $2\pi R^2 H$.

4459. $\pi R^2 H$.

* **4460.** 4π. Вычислить поток через основание конуса и воспользоваться результатом задачи 4457.

4461. $3\pi/16$.

* **4462.** 1/6. Воспользоваться формулой Остроградского и вычислить поток через основание пирамиды.

4463°. $2\pi^2 b^2$.

4464. $2\pi\omega R^2$.

* **4465°.** $-\pi$. Применить теорему Стокса, взяв в качестве контура L линию пересечения параболоида с плоскостью xOy.

Георгий Николаевич БЕРМАН
СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 25.02.16.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 25,83. Тираж 700 экз.

Заказ № 039-16.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»
192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82
тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru
ICQ: 446-869-967
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС»
109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85
e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ»
350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35
e-mail:lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин

Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com

магазин электронных книг

Global F5

http://globalf5.com/