1. Определение:

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a, которая больше расстояния между фокусами.

2. Каноническое уравнение.

Если фокусы F_1 и F_2 лежат на оси Ox, причем $OF_1 = OF_2 = c$ — фокусное расстояние, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.15)$$

где x, y — координаты произвольной точки эллипса (текущие координаты), a — большая полуось эллипса, b — малая полуось, то есть $a > b$, причем

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Если $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса, то по определению $MF_1 + MF_2 = 2a$.

3. Изображение:

а) Найдём точки пересечения эллипса с осями координат.

С осью Ox:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$x = \pm a,$$

то есть $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ — точки пересечения эллипса с осью Ox.

С осью Oy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$y = \pm b,$$

то есть $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ — точки пересечения эллипса с осью Oy.

б) Строим характеристический прямоугольник со сторонами 2a и 2b, параллельными осям координат.

в) Вписываем эллипс.

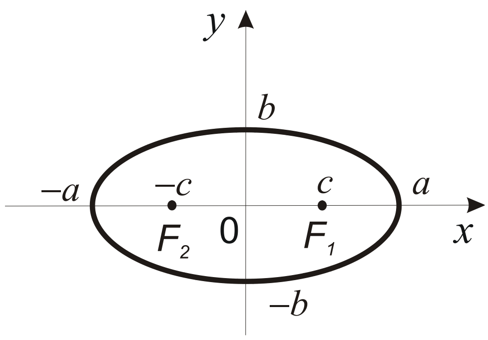

Рис. 8. Изображение эллипса (a > b)

4. Основные элементы:

a — большая полуось,
b —– малая полуось,
2a — большая ось,
2b — малая ось,
$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ — вершины эллипса,
$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ — фокусы эллипса,
c — фокусное расстояние,
2c — расстояние между фокусами F_1 и F_2 (межфокусное расстояние).

5. Эксцентриситет.

Эксцентриситетом эллипса ε называется отношение межфокусного расстояния к большой оси, то есть

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon < 1$.

Эксцентриситет эллипса характеризует степень сжатия кривой к большой оси.

П р и м е р 3. 16. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$. Требуется найти: а) полуоси; б) координаты вершин; в) координаты фокусов; г) эксцентриситет; д) построить кривую.

Решение.

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (3.15). Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение эллипса.

а) $a^2 = 9$, $a = 3$ — большая полуось, $b^2 = 4$, $b = 2$ — малая полуось.

б) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$ — вершины эллипса.

в) Найдем с по формуле связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим $c^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$.

Тогда $F_1\left(-\sqrt{5};\,0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};\,0\right)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, получим $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 3.17. Написать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси *Ox*, и расстояние между ними равно 6, а большая полуось равна 5.

Решение.

По условию задачи $2c = 6$, $c = 3$ и $a = 5$. Найдём малую полуось эллипса b из формулы связи $c^2 = a^2 - b^2$, получим

$9 = 25 - b^2$,

$b^2 = 25 - 9 = 16$.

Подставляя в уравнение (3.15) $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$