МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по организации самостоятельной работы
и выполнению контрольной работы
для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика»
заочной формы обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2015

УДК 512(076)
ББК 22.1
Л 59

Составитель: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА доцент, зав. кафедрой *Л.Б. Рыбина* и к.э.н., доцент *А.Е. Березкина.*

Рецензент: доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *И.А. Батманова*.

Рекомендовано к изданию
методической комиссией архитектурно-строительного факультета,
протокол № 5 от 19 сентября 2015 г.

Л 59 **Линейная алгебра** : учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Берёзкина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 44 с.

Издание содержит программу дисциплины «Линейная алгебра», методические указания к организации самостоятельной работы студентов, рекомендуемую литературу, вопросы для самопроверки, контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины, общие требования к выполнению контрольной работы, задания для контрольной работы, методические указания к выполнению контрольной работы № 1.

Учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы предназначены для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы предназначено для студентов 1 курса, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Экономика» на факультете заочного обучения.

Издание содержит программу дисциплины, общие требования по выполнению контрольной работы, задачи для контрольной работы № 2, вопросы для самопроверки, методические указания по выполнению контрольной работы, рекомендуемую литературу.

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются:

1) формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

2) обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования экономических процессов и явлений, при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений.

В результате изучения базовой части цикла дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

знать: основы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;

уметь: применять методы теоретического исследования для решения экономических задач;

владеть: навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

1. Содержание учебной дисциплины «Линейная алгебра»

1. Матрицы. Действия над матрицами.
2. Определители 2-го, 3-го и *n*-го порядков.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса.
6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
7. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений и систем линейных неравенств.
9. Векторы на плоскости и в пространстве.
10. Понятия *n*-мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство.
11. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность векторного пространства. Переход к новому базису.
12. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
13. Квадратичные формы.

2. Рекомендуемая литература

2.1. Основная литература

1. Боревич З.И. Определители и матрицы [Текст] : учебное пособие для вузов / З.И. Боревич. — 4-е изд., стер. — СПб : Лань, 2004. — 192 с.
2. Демидович В.П. Краткий курс высшей математики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. — М : АСТ : Астрель, 2008. — 654 с.
3. Математика. Элементы линейной алгебры : в 2 ч. Ч. 1. : учебно-методическое пособие по математике для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / сост. Н.М Воробьева, Л.Б. Рыбина. — Кострома : КГСХА, 2010. — 58 с.
4. Математика. Элементы линейной алгебры : в 2 ч. Ч. II. : учебно-методическое пособие по математике для студентов всех направлений очной и заочной форм обучения / сост. Н.М Воробьева, Л.Б. Рыбина. — Кострома : КГСХА, 2010. — 36 с.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике : Учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. — 14-е изд., испр. — М : Физико-математическая литература, 2003. — 336 с.

6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики : Учебник для вузов [Текст] / И.П. Натансон. — 4-е изд., стереотип.; 6-е изд., стереотип. — СПб : Лань, 2001, 2003. — 736 с.

7. Подготовка к тестированию по математике. Ч.1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения / И.А. Батманова, И.А. Смурова. — Кострома : КГСХА, 2010. — 80 с.

2.2. Дополнительная литература

1. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс [Текст] : учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. — 3-е изд., стер. — СПб : Лань, 2006. — 960 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. — М : Астрель ; АСТ, 2002. — 992 с.

3. Высшая математика для экономических специальностей [Текст] : учебник и практикум для вузов. Ч. 1, 2 / Кремер Н.Ш., ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М : Высшее образование, 2008. — 893 с.

4. Высшая математика для экономистов [Текст] : Учебник для вузов / Кремер Н.Ш., ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М : ЮНИТИ, 2003. — 471 с.

5. Красс М.С. Математика для экономических специальностей [Текст]: Учебник для вузов / М.С. Красс. — 4-е изд., испр. — М : Дело, 2003. — 704 с.

6. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики [Текст] : учебно-справочное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. — М : Высшее образование, 2007. — 646 с.

7. Кундышева Е.С. Математика [Текст] : учебное пособие для экономистов / Е.С. Кундышева. — М : Данилов и К, 2005. — 536 с.

3. Общие требования к выполнению контрольной работы № 1

Контрольная работа должна выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяется по последней цифре шифра студента в зачетной книжке. При этом, если предпоследняя цифра шифра есть нечетное число (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для своего варианта следует взять из таблицы 1, если же четное число (0, 2, 4, 6, 8), то из таблицы 2.

Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку, на внешней обложке которой должны быть указаны: факультет, курс, группа, дисциплина, направление подготовки, номер контрольной работы, фамилия, имя, отчество студента, шифр.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие.

Решение задач следует излагать подробно.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3—5 см для замечаний рецензента.

Выполненная контрольная работа сдается в деканат факультета заочного обучения, откуда она поступает на кафедру высшей математики.

Допущенные к защите контрольные работы хранятся на кафедре высшей математики и выдаются студенту при собеседовании.

Незачтенные контрольные работы возвращаются студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце контрольной работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Контрольную работу с выполненными исправлениями следует направить на повторное рецензирование на кафедру.

После прохождения собеседования студент допускается к сдаче экзамена.

Таблица 1.

Номера задач для контрольной работы № 1

Номер варианта	Контрольная работа № 1			
1	1	21	41	61
2	2	22	42	62
3	3	23	43	63
4	4	24	44	64
5	5	25	45	65
6	6	26	46	66
7	7	27	47	67
8	8	28	48	68
9	9	29	49	69
0	10	30	50	70

Таблица 2.

Номера задач для контрольной работы № 1

Номер варианта	Контрольная работа № 1

1	11	31	51	71
2	12	32	52	72
3	13	33	53	73
4	14	34	54	74
5	15	35	55	75
6	16	36	56	76
7	17	37	57	77
8	18	38	58	78
9	19	39	59	79
0	20	40	60	80

4. Методические указания к организации самостоятельной работы студентов

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» начинается на установочной сессии, где студенты слушают обзорные лекции, знакомятся с решением задач и получают рекомендации по самостоятельной работе.

После установочной сессии студенты приступают к самостоятельному изучению материала по указанной преподавателем литературе и выполняют контрольную работу № 1 «Элементы линейной алгебры».

Следует помнить, что самостоятельная работа является основной формой обучения студента-заочника. Вначале рекомендуем изучить теоретический материал по источникам, приведенным в данном пособии, (можно использовать и другую литературу). При чтении учебника необходимо внимательно разобрать рассматриваемые примеры решения задач. Затем самостоятельно решите указанные в данном пособии задачи и ответьте на вопросы для самоконтроля знаний. Далее решите задачи контрольной работы. В данном пособии приведены примеры решения заданий контрольной работы.

Если в процессе работы у студента возникают вопросы по изучаемому материалу, то он может обратиться за консультацией к преподавателю кафедры высшей математики (ауд. 211, 212, 214). Для получения письменной консультации писать по адресу: 156530, Костромская обл., Костромской р-н, пос. Караваево, Учебный городок, Караваевская с/а, дом 34.

Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольной работы.

Завершающим этапом изучения дисциплины является сдача экзамена. В данном пособии приведены контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины «Линейная алгебра».

4.1. Матрицы. Действия над матрицами

Литература:

1) [3]: § 1.1, 1.2.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.6 — 1.20.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется матрицей?

2) Какие существуют виды матриц? Приведите примеры.

3) По какому правилу складываются матрицы? Какими свойствами обладает сложение матриц?

4) По какому правилу матрица умножается на число? Какими свойствами обладает умножение матрицы на число?

5) По какому правилу умножаются матрицы? Какими свойствами обладает умножение матриц?

6) Выполняется ли всегда коммутативный (переместительный) закон для умножения матриц?

7) Как квадратная матрица возводится в целую положительную степень?

8) Что называется полиномом (многочленом) от матрицы A?

9) Какая матрица называется корнем многочлена $P(x)$?

10) Какой многочлен называется аннулирующим многочленом для матрицы A?

11) Какая матрица называется транспонированной относительно матрицы A? Какими свойствами обладает операция транспонирования?

12) Что называют следом квадратной матрицы?

4.2. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков

Литература:

1) [3]: § 1.3, 1.4, 1.5.

Также можно использовать:

1) [2]: Глава XVII, § 1, 3, 4;

2) [6]: Глава VII, §1—3.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.21 — 1.27.

2) [5]: № 586 — 588, 592, 593, 597, 598.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется определителем 2-го порядка?

2) Что называется определителем 3-го порядка?

3) Что называется определителем *n*-го порядка?

4) Какими свойствами обладают определители?

5) Что называют минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка?

6) Что называют алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n*-го порядка?

7) Как определитель раскладывается по элементам строки (столбца)?

8) Как, используя свойства определителя и теорему о разложении определителя, можно вычислить определитель 4-го порядка?

4.3. Обратная матрица

Литература:

1) [3]: § 1.6.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.28 – 1.34.

Вопросы для самоконтроля:

1) Какая матрица называется обратной по отношению к квадратной матрице A?

2) Какая матрица называется невырожденной? Какая матрица называется вырожденной?

3) Каково необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы?

4) Какой алгоритм используется для нахождения обратной матрицы?

4.4. Ранг матрицы

Литература:

1) [3]: § 1.7.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 1.35 — 1.41.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют рангом матрицы?

2) В чем заключается метод окаймления миноров для вычисления ранга матрицы?

3) Какие преобразования относятся к элементарным преобразованиям матриц?

4) Какие матрицы называются эквивалентными?

5) В чем заключается метод элементарных преобразований для вычисления ранга матрицы?

6) В каком случае ранг матрицы равен нулю?

4.5. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса

Литература:

1) [3]: § 2.1 — 2.4.

Также можно использовать:

1) [2]: Глава XVII, § 5, 7;

2) [6]: Глава VII, § 4 (п. 1).

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.1 — 2.8, 2.13 — 2.16.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют системой *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными?

2) Что называют решением системы?

3) Какая система уравнений называется совместной, а какая — несовместной?

4) Какая система уравнений называется определенной, а какая — неопределенной?

5) Какая система уравнений называется однородной, а какая — неоднородной?

6) Какие преобразования систем линейных алгебраических уравнений относятся к элементарным?

7) Какой определитель называется определителем системы (или главным определителем системы)?

8) Запишите формулы Крамера? Как составляются входящие в них определители?

9) В чем заключается матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений?

10) В чем заключается метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений? В чем состоит прямой ход метода Гаусса? В чем состоит обратный ход метода Гаусса?

11) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается бесчисленное множество решений?

12) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается единственное решение?

13) В каком случае в ходе решения системы методом Гаусса получается пустое множество решений?

4.6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Литература:

1) [2]: Глава XVII, § 6.

Также можно использовать [6]: Глава VII, § 4 (п. 2).

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.17.

2) [5]: № 615, 617, 619, 626 — 628.

Вопросы для самоконтроля:

1) Какая система уравнений называется однородной?

2) В каком случае однородная система линейных уравнений имеет только нулевое (или тривиальное) решение?

3) В каком случае однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решение?

4) Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

5) Что называют фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений? Как она находится?

4.7. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Литература:

1) [3]: § 2.5.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [3]: № 2.18 — 2.21.

Вопросы для самоконтроля:

1) Из каких элементов состоит матрица системы?

2) Из каких элементов состоит расширенная матрица системы?

3) Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

4) Как с помощью ранга матрицы системы можно выяснить о количестве решений совместной системы линейных уравнений?

4.8. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений и систем линейных неравенств.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [5]: № 71, 72, 132.

Вопросы для самоконтроля:

1) Каков геометрический смысл множества решений системы линейных уравнений?

2) Каков геометрический смысл решения линейного неравенства?

3) Каков геометрический смысл множества решений системы линейных неравенств?

4.9. Векторы на плоскости и в пространстве

Литература:

1) [2]: Глава XVIII, § 1—13.

Также можно использовать [6]: Глава VIII, § 1 (п. 1—5), § 2, § 3 (п. 1, 2), § 4.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [5]: № 394, 399, 405, 406.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется вектором?

2) Какие векторы называются коллинеарными?

3) Какие векторы называются компланарными?

4) Что называется координатами вектора в прямоугольной декартовой системе координат? Каков их геометрический смысл?

5) Как находятся координаты вектора по координатам его начала и конца.

6) Что называется модулем вектора? Как найти модуль вектора по его координатам?

7) Что называют направляющими косинусами вектора? Как их найти, зная координаты вектора?

8) Какие линейные операции выполняются над векторами?

9) Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?

10) Как выполняются линейные операции над векторами в геометрической форме?

11) Как выполняются линейные операции над векторами в координатной форме?

12) Что называют скалярным произведением двух векторов?

13) Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

14) Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?

15) Как с помощью скалярного произведения находится угол между векторами?

4.10. Понятия n-мерного вектора и векторного пространства. Евклидово пространство

Литература:

1) [4]: § 3.1, 3.4.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: № 3.1 — 3.3, 3.13 — 3.15.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется n-мерным вектором?

2) Как определяются линейные операции над n-мерными векторами? Каким свойствам они удовлетворяют?

3) Что называется векторным пространством?

4) Что называется линейным пространством? Приведите примеры линейных пространств.

5) Что называют скалярным произведением двух n-мерных векторов?

6) Какими свойствами обладает скалярное произведение?

7) Какое линейное (векторное) пространство называется евклидовым пространством?

8) Что называется длиной (нормой) вектора в евклидовом пространстве?

9) Как находится угол между двумя векторами в евклидовом пространстве?

10) Какие два вектора в евклидовом пространстве называются ортогональными?

4.11. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность векторного пространства. Переход к новому базису

Литература:

1) [4]: § 3.2, 3.3.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: №. 3.4 — 3.12.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называют линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ ...,\ \boldsymbol{a}_{m-1}$ векторного пространства R?

2) Какие векторы $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ ...,\ \boldsymbol{a}_m$ векторного пространства R называются линейно зависимыми, а какие — линейно независимыми? Приведите примеры линейно зависимых векторов и линейно независимых векторов.

3) Какое линейное пространство называется n-мерным? Что называют размерностью пространства?

4) Что называют базисом пространства?

5) Что называют ортогональным базисом n-мерного евклидова пространства?

6) Что называют ортонормированным базисом n-мерного евклидова пространства?

7) Пусть в пространстве R имеется два базиса: старый $\left(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ ...,\ \boldsymbol{e}_n\right)$ и новый $\left(\boldsymbol{e}_1^*,\ \boldsymbol{e}_2^*,\ ...,\ \boldsymbol{e}_n^*\right)$, причем каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса. Что называют матрицей перехода от старого базиса к новому?

8) С помощью какой матрицы осуществляется обратный переход от нового базиса к старому?

9) Какова зависимость между координатами вектора в разных базисах?

4.12. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Литература:

1) [4]: § 3.5, 3.6.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: №. 3.16 — 3.25.

Вопросы для самоконтроля:

1) Пусть даны два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m. Что называют оператором (преобразованием, отображением) $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$, действующим из R^n в R^m ?

2) Какой оператор называется линейным?

3) Дайте понятие матрицы линейного оператора.

4) Как в матричной форме выражается связь между вектором $\boldsymbol{x}$ и его образом $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$, если матрицей линейного оператора является матрица A?

5) Что называется собственным вектором линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A)?

6) Что называется собственным значением линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), соответствующим вектору $\boldsymbol{x}$?

7) Как составляется характеристический многочлен линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A)?

8) Как составляется характеристическое уравнение линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A)?

4.13. Квадратичные формы

Литература:

1) [4]: § 3.7.

Задачи для самостоятельного решения:

1) [4]: № 3.26 — 3.30.

Вопросы для самоконтроля:

1) Что называется квадратичной формой $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных?

2) Что называется матрицей квадратичной формы?

3) Как квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ записывается в матрично-векторном виде?

4) Какая квадратичная форма называется канонической?

5) Пусть дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$. Как находится матрица квадратичной формы, полученной из данной линейным преобразованием $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$, где C — матрица этого линейного преобразования?

6) Какая квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной?

7) Какая квадратичная форма называется знакопеременной?

8) Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной?

5. Контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины «Линейная алгебра»

1. Определители 2-го, 3-го, n-го порядков.
2. Основные свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Теорема разложения.
5. Вычисление определителей с использованием свойств и теоремы разложения.
6. Теорема аннулирования.
7. Теорема замещения.
8. Матрицы, виды матриц.
9. Действия над матрицами. Свойства действий над матрицами.
10. Полиномы от матриц. Характеристический полином. Аннулирующий полином.
11. Обратная матрица.
12. Общие сведения о системах линейных уравнений.
13. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера.
14. Матричная форма записи систем n линейных уравнений *с* n неизвестными. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
15. Решение матричных уравнений.
16. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
17. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления.
18. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований.
19. Исследование системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
20. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
21. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных уравнений.
22. Геометрическая интерпретация множества решений систем линейных неравенств.
23. Понятия n-мерного вектора и векторного пространства.
24. Евклидово пространство.
25. Линейная зависимость и независимость векторов.
26. Базис и размерность векторного пространства.
27. Переход к новому базису.
28. Линейные операторы.

29. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

30. Квадратичные формы.

6. Задания для контрольной работы № 1 «Элементы линейной алгебры»

Задание № 1 — 20.
Даны матрицы A, B, C. Найдите матрицу $D = A \cdot B - 2C$.

Номер задачи	Матрица A	Матрица B	Матрица C
1	2	3	4
1	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0&3\\-1&4\\2&5\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&5\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}-3&0\\4&5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&0&-5\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}3&-6&2\\0&1&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\\2&4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&4&-2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-5&4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0&-3\\1&2\\2&4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}0&1\\3&5\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&-3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&1&3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&5&3\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\3&4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}2&-4\\0&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&1&-2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&4\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&5&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\3&4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&0\\-3&5\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}2&-1\\4&0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&-2&5\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}0&1&3\\5&4&-6\end{pmatrix}$

1	2	3	4
11	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$
15.	$A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}$

Задание № 21 — 40.

Найдите матрицу обратную матрице A. Результат проверьте, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Номер задачи	Матрица A	Номер задачи	Матрица A
21	$A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$	31	$A=\begin{pmatrix}-3&2&-5\\1&3&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}9&9&5\\4&-1&-2\\14&13&7\end{pmatrix}$	32	$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-4&3&1\\5&1&-2\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-3\\-1&2&2\end{pmatrix}$	33	$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\3&2&1\\8&2&-1\end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix}3&3&1\\7&6&2\\7&9&2\end{pmatrix}$	34	$A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\2&1&-1\\5&1&3\end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix}9&7&3\\14&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$	35	$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&3&1\\5&1&3\end{pmatrix}$
26	$A=\begin{pmatrix}6&5&2\\11&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}$	36	$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&3\\1&-1&-2\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}12&6&1\\19&16&7\\0&1&1\end{pmatrix}$	37	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&1\\4&-3&-2\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\4&5&2\\3&2&3\end{pmatrix}$	38	$A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-5&1&-1\\4&-1&3\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&16&7\end{pmatrix}$	39	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\9&8&5\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\2&4&5\end{pmatrix}$	40	$A=\begin{pmatrix}5&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$

Задание № 41 — 60.

Решите систему линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) матричным методом;

3) методом Гаусса.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
41	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -7, \\ x + 2y - z = 4, \\ 3x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$	51	$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x - 3y - z = -4, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$
42	$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0, \\ x - 2y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$	52	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1, \\ 2x - 3y - z = 3, \\ x + y + 3z = -2. \end{cases}$
43	$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x - 3y - z = -3, \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$	53	$\begin{cases} 4x + 5y - 2z = -3, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -1. \end{cases}$
44	$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x + 3y - z = 8, \\ x - y + 2z = -1. \end{cases}$	54	$\begin{cases} 3x - y - 3z = 1, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + 5z = -1. \end{cases}$
45	$\begin{cases} x + 4y - 3z = -7, \\ x - 3y + 2z = 0, \\ 2x - 5y - z = -1. \end{cases}$	55	$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0, \\ x + y - 2z = -3, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$
46	$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2. \end{cases}$	56	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1. \end{cases}$
47	$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7. \end{cases}$	57	$\begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$
48	$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5. \end{cases}$	58	$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y - z = -7, \\ 4x + y - 2z = 0. \end{cases}$

1	2	3	4
49	$\begin{cases} 3x - y + 4z = 2, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ 5x + 3y + 2z = 8. \end{cases}$	59	$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1. \end{cases}$
50	$\begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$	60	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$

Задание № 61 — 80.

В задачах исследовать совместность систему уравнений и в случае ее совместности найти общее решение и одно частное решение.

№	Система	№	Система
1	2	3	4
61	$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$	71	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$
62	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$	72	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$
63	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$	73	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$
64	$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$	74	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$
65	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$	75	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

1	2	3	4
66	$\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1 \end{cases}$	76	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$
67	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5, \\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7 \end{cases}$	77	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$
68	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$	78	$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$
69	$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases}$	79	$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$
70	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1 \end{cases}$	80	$\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_1-x_2+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

Задание № 81 — 100.

Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2};\overrightarrow{a_3}$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора b в этом базисе.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
81	$\overrightarrow{a_1}=(3;1;6)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;2;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-4;5;-1)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.	91	$\overrightarrow{a_1}=(5;3;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;1;4)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.
82	$\overrightarrow{a_1}=(4;1;4)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(3;1;5)$, $\vec{b}=(-3;-2;1)$.	92	$\overrightarrow{a_1}=(1;3;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-1;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(4;-2;4)$, $\vec{b}=(-7;3;-1)$.
83	$\overrightarrow{a_1}=(1;2;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;-3;4)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;-2)$, $\vec{b}=(3;0;1)$.	93	$\overrightarrow{a_1}=(-1;2;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;1;0)$, $\overrightarrow{a_3}=(-1;0;6)$, $\vec{b}=(-4;4;4)$.
84	$\overrightarrow{a_1}=(5;1;2)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;4;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-4;2;1)$, $\vec{b}=(-3;5;4)$.	94	$\overrightarrow{a_1}=(1;0;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;3;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;-1;1)$, $\vec{b}=(5;15;0)$.
85	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-4;3;5)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;-4)$, $\vec{b}=(4;-1;-3)$.	95	$\overrightarrow{a_1}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(0;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;4)$, $\vec{b}=(0;4;3)$.
86	$\overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(3;2;5)$.	96	$\overrightarrow{a_1}=(1;1;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(9;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;2)$, $\vec{b}=(1;1;-1)$.
87	$\overrightarrow{a_1}=(5;2;-5)$, $\overrightarrow{a_2}=(-1;-1;3)$, $\overrightarrow{a_3}=(0;1;0)$, $\vec{b}=(3;2;7)$.	97	$\overrightarrow{a_1}=(3;3;0)$, $\overrightarrow{a_2}=(7;-4;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(5;0;1)$, $\vec{b}=(0;1;2)$.
88	$\overrightarrow{a_1}=(3;1;4)$, $\overrightarrow{a_2}=(-4;2;3)$, $\overrightarrow{a_3}=(2;-1;-2)$, $\vec{b}=(7;-1;0)$.	98	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;1)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(3;3;1)$, $\vec{b}=(3;0;-2)$.
89	$\overrightarrow{a_1}=(1;4;2)$, $\overrightarrow{a_2}=(5;-2;-3)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;-1;1)$, $\vec{b}=(-3;2;4)$.	99	$\overrightarrow{a_1}=(0;7;-1)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;9;-1)$, $\overrightarrow{a_3}=(5;3;4)$, $\vec{b}=(3;1;5)$.
90	$\overrightarrow{a_1}=(2;1;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(3;-2;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(1;-3;-4)$, $\vec{b}=(7;0;7)$.	100	$\overrightarrow{a_1}=(4;2;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(1;-3;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;0;-2)$, $\vec{b}=(7;-1;-3)$.

Задание № 111 — 130.

Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

Номер задачи	Система	Номер задачи	Система
1	2	3	4
111	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	121	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
112	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	122	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
113	$\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	123	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
114	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	124	$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
115	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	125	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
116	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$	126	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
117	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	127	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
118	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	128	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
119	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	129	$\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
120	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	130	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание № 121 — 140.
Привести к каноническому виду квадратичную форму и определить ее знак.

№	Система	№	Система
1	2	3	4
121	$3x^2+2\sqrt{14}xy+8y^2=10$	131	$x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$
122	$4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2=24$	132	$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$
123	$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$	133	$2x^2+4xy+5y^2+5z^2-4xz-8yz=0$
124	$9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2=20$	134	$3x^2-4xy+4y^2+5z^2-4yz=0$
125	$7x^2+6\sqrt{2}xy+4y^2=15$	135	$2x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+x_1x_2+2x_1x_3+$ $+3x_2x_3=0$
26	$3x^2-2xy+3y^2+3z^2=0$	136	$7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2=24$
127	$4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2=40$	137	$4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2=0$
128	$6x^2+2\sqrt{10}xy+3y^2=16$	138	$13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2=0$
129	$5x^2+4xy+2y^2=18$	139	$2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2=0$
130	$5x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2=14$	140	$2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2=0$

7. Методические указания к контрольной работе № 1

7.1. Пример решения заданий № 1—20

Пример 1.

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&0&5\\7&-6&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&5\\3&10\\-1&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8&10\\4&15\\-5&-6\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $D=A\cdot B-2C$.

Решение.

$$\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&0&5\\7&-6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\3&10\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+1\cdot3-2\cdot(-1)&3\cdot5+1\cdot10-2\cdot4\\4\cdot4+0\cdot3+5\cdot(-1)&4\cdot5+0\cdot10+5\cdot4\\7\cdot4-6\cdot3+9\cdot(-1)&7\cdot5-6\cdot10+9\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 12+3+2 & 15+10-8 \\ 16+0-5 & 20+0+20 \\ 28-18-9 & 35-60+36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 15 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 11 & 40 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 8 & 30 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 17-16 & 17-20 \\ 11-8 & 40-30 \\ 1+10 & 11+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица $D=A\cdot B-2C=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$.

Ответ: $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 10 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$.

7.2. Пример решения заданий № 21—40

Пример 2.

Найдите матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Результат проверьте, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Решение.

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot 1\cdot 1+7\cdot 0\cdot 2+3\cdot 2\cdot 3-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 0\cdot 6-7\cdot 3\cdot 1=$$

$=6+18-6-21=-3\neq 0.$

Следовательно, матрица A является невырожденной, и для нее существует обратная матрица.

2) Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}7&3\\2&1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}7&3\\1&0\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&3\\2&1\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6&3\\3&0\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&1\\2&2\end{vmatrix}=4;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}6&7\\2&2\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}6&7\\3&1\end{vmatrix}=-15;$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&-3&4\\-1&0&2\\-3&9&-15\end{pmatrix}.$$

3) Транспонируем матрицу A^*, получаем союзную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot\widetilde{A}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1\\1&0&-3\\-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&5\end{pmatrix}.$$

Проверка:

Найдем произведение $A^{-1}A$:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-3&0&9\\4&2&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\cdot6-1\cdot3-3\cdot2&1\cdot7-1\cdot1-3\cdot2&1\cdot3-1\cdot0-3\cdot1\\-3\cdot6+0\cdot3+9\cdot2&-3\cdot7+0\cdot1+9\cdot2&-3\cdot3+0\cdot0+9\cdot1\\4\cdot6+2\cdot3-15\cdot2&4\cdot7+2\cdot1-15\cdot2&4\cdot3+2\cdot0-15\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}$.

7.3. Пример решения заданий № 41—60

Пример 3.

Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$ тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) матричным методом;
3) методом Гаусса.

Решение.

1) Решим данную систему линейных уравнений по формулам Крамера.

Найдем определитель системы по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot4\cdot4+(-1)\cdot(-2)\cdot4+3\cdot(-3)\cdot(-1)-$$
$$-(-1)\cdot4\cdot4-(-1)\cdot3\cdot4-(-2)\cdot(-3)\cdot2=32+8+9+16+12-12=65.$$

Так как $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение.

Найдем это решение по формулам Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Вычислим определители Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, полученные из определителя системы Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 13 & 4 & -2 \\ -11 & -3 & 4 \end{vmatrix}=4\cdot4\cdot4+(-1)\cdot(-2)\cdot(-11)+13\cdot(-3)\cdot(-1)-$$
$$-(-1)\cdot4\cdot(-11)-(-1)\cdot13\cdot4-(-2)\cdot(-3)\cdot4=64-22+39-44+52-24=65;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 13 & -2 \\ 4 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 13 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-11) \cdot (-1) -$$

$$-(-1) \cdot 13 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-11) \cdot 2 = 104 - 32 + 33 + 52 - 48 - 44 = 65;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 13 \\ 4 & -3 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-11) + (-1) \cdot 13 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \cdot 4 -$$

$$-4 \cdot 4 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 \cdot (-11) - 13 \cdot (-3) \cdot 2 = -88 - 52 - 36 - 64 - 33 + 78 = -195.$$

Найдем неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{65}{65} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{65}{65} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -\frac{195}{65} = -3.$$

Итак, (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

2) Решим данную систему линейных уравнений матричным методом.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Тогда данная система уравнений записывается в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

Решение полученного матричного уравнения ищем по формуле:

$$X = A^{-1}B.$$

Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице A.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 8 + 9 + 16 + 12 - 12 = 65.$$

Так как $\Delta A \neq 0$, то матрица A невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(12 + 8) = -20;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 16 = -25;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 3) = 7;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 4) = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 3) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} 10 & -20 & -25 \\ 7 & 12 & 2 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^* и получаем союзную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ -20 & 12 & 1 \\ -25 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу A^{-1} по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A} \cdot \widetilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ -20 & 12 & 1 \\ -25 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу-столбец неизвестных X по формуле $X = A^{-1}B$:

$$X = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ -20 & 12 & 1 \\ -25 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 10 \cdot 4 + 7 \cdot 13 + 6 \cdot (-11) \\ -20 \cdot 4 + 12 \cdot 13 + 1 \cdot (-11) \\ -25 \cdot 4 + 2 \cdot 13 + 11 \cdot (-11) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 65 \\ 65 \\ -195 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, т.е. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -3$.

Тогда (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

3) Решим данную систему линейных уравнений методом Гаусса.

Умножим первое уравнение на (-1) и поменяем местами первое и второе слагаемые во всех уравнениях системы:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_2 + 3x_1 - 2x_3 = 13, \\ -3x_2 + 4x_1 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-4) и на 3 и прибавим, соответственно, ко второму и к третьему уравнениям, исключая неизвестную x_2 из уравнений, начиная со второго:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + x_3 = -4, \\ 11x_1 - 6x_3 = 29, \\ -2x_1 + 7x_3 = -23. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\frac{1}{11}$:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 \quad + x_3 = -4, \\ \qquad x_1 - \dfrac{6}{11}x_3 = \dfrac{29}{11}, \\ \quad -2x_1 \quad + 7x_3 = -23. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 2 и прибавим к третьему, исключая из него неизвестную x_1:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 \quad + x_3 = -4, \\ \qquad x_1 - \dfrac{6}{11}x_3 = \dfrac{29}{11}, \\ \qquad\quad \dfrac{65}{11}x_3 = -\dfrac{195}{11}. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на $\frac{11}{65}$:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 \quad + x_3 = -4, \\ \qquad x_1 - \dfrac{6}{11}x_3 = \dfrac{29}{11}, \\ \qquad\qquad x_3 = -3. \end{cases}$$

Используя обратный ход метода Гаусса, находим неизвестные:

$$x_3 = -3;$$

$$x_1 = \frac{29}{11} + \frac{6}{11} \cdot (-3) = 1;$$

$$x_2 = -4 + 2 \cdot 1 - (-3) = 1.$$

Итак, (1; 1; – 3) — решение данной системы.

Ответ: (1; 1; – 3).

7.4. Пример решения заданий № 61—80

Пример 4.

Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases} .$$

Решение

Найдем ранг матрицы системы и ранг ее расширенной матрицы. Для этого выпишем расширенную матрицу системы и выполним преобразования, которые не изменяют ее ранга:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right)\sim$$

Умножим элементы первой строки на (–1) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (– 3) и прибавим к элементам третьей строки, получим

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & -4 & -4 \end{array}\right)\sim$$

Далее умножим элементы второй строки на (– 2) и прибавим к элементам третьей строки, получим

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг матрицы системы (матрица до черты) и ранг расширенной матрицы равны между собой и равны двум:

$$r(A)=r\left(\widetilde{A}\right)=2.$$

Следовательно, система совместна. Так как число неизвестных n = 4 и $r(A)=r\left(\widetilde{A}\right)=2<4$, то система имеет бесконечное множество решений, т.е. является неопределенной.

Главными переменными являются x_1 и x_2, так как $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$.

Выразим главные переменные x_1 и x_2 через свободную x_3 :

$5x_2=-2+2x_3$, $x_2=\frac{-2}{5}+\frac{2}{5}x_3$.

$x_1=3-x_3+2x_2$, $x_1=3-x_3+2(\frac{-2}{5}+\frac{2}{5}x_3)=\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3$.

Получили общее решение системы: $(\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3;-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}x_3;\, x_3)$.

Проверка: $\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}x_3+x_3=3$, верно;

$$\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}x_3-x_3=1\text{, верно;}$$
$$\frac{33}{5}-\frac{3}{5}x_3-\frac{8}{5}+\frac{8}{5}x_3-x_3=5\text{, верно.}$$

Ответ: общее решение системы: $(\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3;-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}x_3;\ x_3)$.

7.5. Пример решения заданий № 81—100

Пример 5.

В базисе $\left(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ ...,\ \boldsymbol{e}_n\right)$ заданы векторы $\boldsymbol{a}_1=\left(1;\ 1;\ 0\right)$, $\boldsymbol{a}_2=\left(1;\ -1;\ 1\right)$ и $\boldsymbol{a}_3=\left(-3;\ 5;\ -6\right)$. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис.

1-й способ.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}.$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0,\\ \lambda_1-\lambda_2+5\lambda_3=0,\\ \qquad\lambda_2-6\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\1&-1&5&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&-2&8&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&1&-6&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&0\\0&1&-4&0\\0&0&1&0\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0,\\ \qquad\lambda_2-4\lambda_3=0,\\ \qquad\qquad\lambda_3=0.\end{cases}$$

$$\lambda_3=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_1=0.$$

2-й способ. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-6) + 1\cdot(-3)\cdot 1 +$$

$$+1\cdot 5\cdot 0 - 0\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-6) = 6-3-5+6 = 4.$$

Так как определитель не равен нулю, то векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми и образуют базис.

Разложим вектор $b = (2;\ \text{-}1;\ 1)$ по базису: $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ -1;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (-3;\ 5;\ -6)$.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{b}.$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 2, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = -1, \\ \qquad \lambda_2 - 6\lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1.5 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1.5 \\ 0 & 0 & -2 & -0.5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 2, \\ \qquad \lambda_2 - 4\lambda_3 = 1.5, \\ \qquad\qquad \lambda_3 = 0.25. \end{cases}$$

$\lambda_3 = 0{,}25$, $\lambda_2 = 2{,}5$, $\lambda_1 = 0{,}25$.

$$0{,}25\boldsymbol{a}_1 + 2{,}5\boldsymbol{a}_2 + 0{,}25\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{b}$$

7.6. Пример решения заданий № 101—120

Пример 6.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Составляем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований уравнение примет вид

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0,$$

$$(\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ — собственные значения матрицы A.

2) Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases} (1-9)x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 + (7-9)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 + (1-9)x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на (–4), второе — на (–2), третье — на (–4), получим уравнение, равносильное системе

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \text{ или } x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3,$$

где x_2, x_3 — свободные неизвестные. Полагая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, получим вектор $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2\right)$, который при любых значениях c_1, c_2, одновременно неравных нулю, есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda = 9$.

3) Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -9$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases} (1+9)x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 + (7+9)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 + (1+9)x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & 16 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили систему ступенчатого вида

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -x_3, \\ 2x_2 = x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

где x_3 — свободная неизвестная. Полагая $x_3 = c_3$, получим вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\ \dfrac{1}{2}c_3;\ c_3\right)$, который при любых значениях $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda = -9$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$;

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\; c_1;\; c_2 \right),\; \boldsymbol{x}^{(2)} = \left(c_3;\; \frac{1}{2}c_3;\; c_3 \right).$$

7.7. Пример решения заданий № 121—140

Пример 7.

Привести к каноническому виду квадратичную форму $5x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ и определить знак квадратичной формы.

Решение

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = 5(x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2) + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= 5(x_1^2 + 2x_1\frac{2}{5}x_2 + \frac{4}{25}x_2^2) - \frac{4}{5}x_2^2 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= 5(x_1 + \frac{2}{5}x_2)^2 + \frac{11}{5}(x_2^2 + \frac{20}{11}x_2x_3) + 4x_3^2 =$$

$$= 5(x_1 + \frac{2}{5}x_2)^2 + \frac{11}{5}(x_2^2 + 2x_2\frac{10}{11}x_3 + \frac{100}{121}x_3^2) =$$

$$= 5(x_1 + \frac{2}{5}x_2)^2 + \frac{11}{5}(x_2 + \frac{10}{11}x_3)^2 + \frac{24}{11}x_3^2.$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y_1 = (x_1 + \frac{2}{5}x_2), \\ y_2 = (x_2 + \frac{10}{11}x_3), \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

После такой замены квадратичная форма примет вид: $= 5{y_1}^2 + \frac{11}{5}{y_2}^2 + \frac{24}{11}y_3^2.$

Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{11} \end{pmatrix}.$

Так как главные миноры матрицы

$$\Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} \end{vmatrix} = 11 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{11} \end{vmatrix} = 24 > 0$$

то квадратичная форма является положительно определенной.

Учебно-методическое издание

Линейная алгебра : учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, А.Е. Берёзкина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 44 с.

Учебно-методическое пособие издаётся в авторской редакции.