Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида (1.4) называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка* (y и y' входят в первой степени и не перемножаются между собой):

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{1.4}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции.

Посредством замены искомой функции y произведением двух вспомогательных функций, зависящих от x, $y = uv$ (причем одну из них можно выбрать произвольно), уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'.$$

Уравнение (1.4) примет вид

$$u'v + uv' + uvp(x) = f(x).$$

Сгруппируем:

$$u'v + \left(uv' + uvp(x)\right) = f(x)$$

$$u'v + u\left(v' + vp(x)\right) = f(x).$$

Так как одну из функций можно выбрать произвольно, возьмем функцию v так, чтобы

$$v' + vp(x) = 0,$$

тогда $u'v = f(x)$.

Решив систему

$$\begin{cases} v' + vp(x) = 0 \\ u'v = f(x), \end{cases}$$

найдем функции u и v, а затем найдем y. Рассмотренный метод называется *методом Бернулли.*

Примеры

1) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$

$$y = uv \qquad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = x^2 \end{cases}$$

$$v' = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u'v = x^2$$

$$u'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

$$u' = x^3$$

$$du = x^3 dx$$

$$\int du = \int x^3 dx$$

$$u = \frac{x^4}{4} + C$$

$$y = uv \qquad y = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{C}{x}$ — искомое решение.

2) $y'\cos x - 2y\sin x = 2 \qquad y(0) = 3$

$y'\cos x - 2y\sin x = 2$ делим обе части на $\cos x$, $\cos x \neq 0$

$$y' - 2ytgx = \frac{2}{\cos x}$$

$$y = uv \qquad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - 2uvtgx = \frac{2}{\cos x}$$

$$u'v + u\left(v' - 2vtgx\right) = \frac{2}{\cos x}$$

$$\begin{cases} v' - 2vtgx = 0 \\ u'v = \dfrac{2}{\cos x} \end{cases}$$

$$v' = 2vtgx$$

$$\frac{dv}{dx} = 2vtgx$$

$$\frac{dv}{v} = 2tgxdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

$$\ln v = -2\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|v| = -2\ln|\cos x|$$

$$v = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u'v = \frac{2}{\cos x}$$

$$u' \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

$$u' = 2\cos x$$

$$du = 2\cos xdx$$

$$\int du = 2\int \cos xdx$$

$$u = 2\sin x + C$$

$$y = (2\sin x + C)\frac{1}{\cos^2 x}$$ — общее решение.

Найдем частное решение

$$3 = (2\underbrace{\sin 0}_{=0} + C)\frac{1}{\underbrace{\cos^2 0}_{=1}}$$

$$C = 3$$

$$y = \frac{2\sin x + 3}{\cos^2 x}$$ — искомое решение.