Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если $f(x, y)$ есть однородная функция.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной*, если при умножении каждого ее множителя на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т.е. $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$).

Однородное уравнение $y' = f(x, y)$ бывает удобнее записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.3}$$

Для решения уравнения (1.3) вводят замену $\frac{y}{x} = t$, т.е.

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t,$$

и при подстановке в уравнение получается уравнение с разделяющимися переменными относительно t.

Примеры

1) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$ умножим обе части на x

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

$$y = tx, \qquad y' = t'x + t$$

$$t'x + t = t\ln t$$

$$t'x = t\ln t - t$$

$$\frac{dt}{dx}x = t(\ln t - 1)$$ умножим обе части на dx

$$xdt = t(\ln t - 1)dx$$ разделим обе части на $xt(\ln t - 1)$

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d(\ln t - 1)}{(\ln t - 1)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\ln(t-1)\right| = \ln(x) + \ln C$$

$$\ln|t-1| = \ln|C\cdot x|$$

$$t - 1 = C\cdot x$$

$$\frac{y}{x}-1=C\cdot x$$ — искомое решение.

2) $\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0$ разделим обе части на dx

$$\left(x^2-y^2\right)+2xyy'=0$$

$$2xyy'=y^2-x^2$$

$$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

$$y'=\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{2\frac{y}{x}}$$

$$\frac{y}{x}=t \qquad y'=t'x+t$$

$$t'x+t=\frac{t^2-1}{2t}$$

$$t'x=\frac{t^2-1}{2t}-t \quad \lfloor 2t$$

$$t'x=\frac{t^2-1-2t^2}{2t}$$

$$t'x=\frac{-1-t^2}{2t}$$

$\frac{dt}{dx}x=-\frac{1+t^2}{2t}$ умножим обе части на dx

$xdt=-\frac{1+t^2}{2t}dx$ разделим обе части на $x\frac{1+t^2}{2t}$

$$\frac{2tdt}{1+t^2}=-xdx$$

$$\int\frac{d\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=-\int xdx$$

$$\ln\left|1+t^2\right|=-\frac{x^2}{2}+C$$

$$\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=-\frac{x^2}{2}+C$$ — искомое решение.