

Прочитайте вступление к учебной лекции.

Если читали ранее – можно пропустить этот блок информации.

Учебная лекция в ДО – это учебный материал для конспектирования

Инструкция для работы с учебным материалом (для конспектирования):

1. Первый раз прочитайте всю лекцию, ничего не записывая.
2. Ответьте мысленно на вопрос, что главное в лекции, из скольких основных частей лекция состоит (*на сколько частей ее можно мысленно разбить*), придумайте название для каждой части – это будет план конспекта.
3. Откройте тетрадь для лекций и запишите в тетради тему, дату лекции и план конспекта.
4. Второй раз начинайте читать лекцию и приступайте к конспектированию: в соответствии с планом – в каждой части плана пишите определения величин, формулы законов, формулировки законов, делайте рисунки к разбираемым примерам или другому. Чем больше будет ваших записей, поясняющих о чем идет речь, тем лучше вы поймете и запомните учебный материал.

Внимание! Важно обращать внимание на то, что вы описываете – явление, закон, величину или другое понятие (например, модель объекта).

Руководствуйтесь правилами:

А) если описываете явление – запишите особенности рассматриваемого явления (*в чем заключается явление, каковы условия его возникновения, какие законы и величины используются для исследования явления*)

В) если описываете величину – запишите определение величины (*укажите физическая скалярная или векторная величина, формулу/ы для определения величины, единицу величины, поясните, что характеризует и, если векторная величина, то она как направлена*),

С) если описываете понятие (не величину) – запишите одно предложение, которое раскрывает смысл понятия (*для примера см. система отсчета, материальная точка, система материальных точек и др.*),

Д) если описываете закон – название, формулу, формулировку, физический смысл запишите закона. **Помните, что при записи формулы надо расшифровать названия величин, входящих в данную формулу.**

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Затухающие колебания. Особые характеристики затухания колебаний. Затухающие механические колебания. Затухающие электромагнитные колебания.

Введение

Любые колебания с течением времени прекращаются, если в системе не происходит возобновление энергии. Это происходит потому, что любая колебательная система, любой осциллятор взаимодействует с внешним миром. Это взаимодействие, как правило, проявляется в виде сил трения, сил сопротивления колебательному движению. Действие сил трения приводит к диссипации энергии в осцилляторе и постепенно колебания затухают (прекращаются).

Свойства затухающих колебаний не зависят от природы колебаний. То есть они будут одинаковыми для затухающих механических и затухающих электромагнитных колебаний.

Какому закону подчиняются затухающие колебания? Эти колебания подчиняются закону затухающих колебаний, представленного в форме специального дифференциального уравнения, решение которого предстает в форме гармонического закона, умноженного на закон затухания амплитуды (назовем его уравнением затухающих колебаний).

Каковы свойства затухающих колебаний? Начальная амплитуда затухающих колебаний и начальная фаза зависят только от начальных условий, а частота затухающих колебаний (или период, или циклическая частота) зависит теперь и от параметров системы и от коэффициента затухания. Напомним, что к параметрам системы относятся, например, масса груза m и жесткость пружины k пружинного маятника или емкость C и индуктивность L колебательного контура. Циклическую частоту затухающих колебаний называют в этом случае условной и она не совпадает с собственной частотой осциллятора. В зависимости от того, больше она или

меньше собственной частоты будут проявляться разные случаи затухания колебаний.

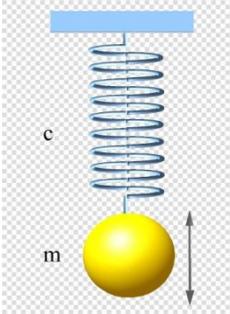
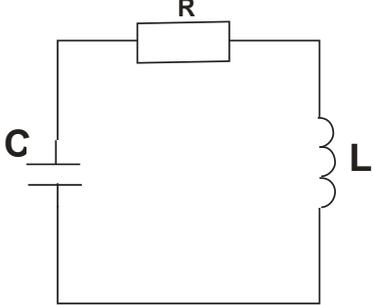
В затухающих колебаниях переход одного вида энергии в другой сопровождается диссипацией энергии.

Затухающие колебания

В реальной физической системе, совершающей колебания, всегда происходит постепенное уменьшение амплитуды колебаний – наблюдается процесс затухания колебаний. Это вызвано тем, что на систему действуют силы трения, которые и приводят к прекращению колебаний. Процесс рассеивания энергии физической системой получил название *диссипация энергии*. На «языке энергий» затухание колебаний объясняется тем, что работа сил трения переводит часть энергии колебаний во внешнюю среду, в тепловую энергию, то есть происходит диссипация энергии.

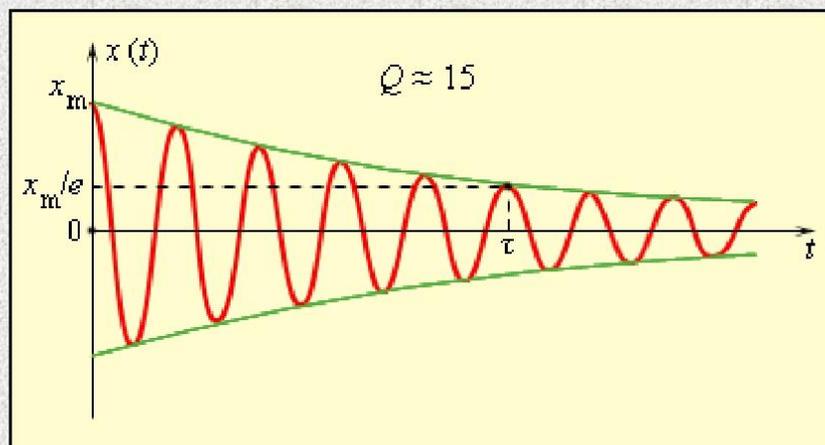
Затухающие колебания – колебательный процесс, который характеризуется уменьшением амплитуды колебаний с течением времени, обусловленный наличием сил трения, диссипацией энергии колебательной системы (осциллятора).

Рассмотрим затухающие колебания на примере двух осцилляторов.

Механический осциллятор	Электромагнитный осциллятор
 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $F_{\text{упр}} = -kx$ $F_c = -\gamma V$ <p>γ – коэффициент сопротивления, характеризует свойства среды (разные вещества по разному препятствуют движению).</p> $-kx - \gamma V = ma$ </div>	 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> $U_c + U_R = \epsilon_S$ $U_c = \frac{q}{C}$ $U_R = I \cdot R$ $\epsilon_S = -L \frac{dI}{dt}$ $I = \frac{dq}{dt}$ </div>

$a = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad v = \frac{dx}{dt} \quad (: m)$	$\frac{q}{C} + I \cdot R = -L \frac{dI}{dt} \quad (: L)$
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma dx}{m dt} + \frac{k}{m} x = 0$ – основной закон	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$ – основной
<p>затухающих колебаний. Пружинный маятник совершает колебания по закону</p>	<p>затухающих колебаний. В колебательном контуре возникают колебания заряда по закону</p>
$x = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ – уравнение	$q = q_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ – уравнение
<p>затухающих колебаний (*). 1. Амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону $A = x_0 \cdot e^{-\beta t}$, где x_0 – начальная амплитуда.</p>	<p>затухающих колебаний (**). 1. Амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону $A = q_0 \cdot e^{-\beta t}$, где q_0 – начальная амплитуда.</p>

Затухающие колебания



$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Рис.1. Пример затухающих колебаний, совершаемых по закону $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

2. Циклическая частота затухающих колебаний осциллятора определяется по формуле $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

ω_0 – собственная циклическая частота колебаний

ω – условная циклическая частота колебаний. При этом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \text{ где } T \text{ – условный период колебаний.}$$

Условная циклическая частота – физическая скалярная величина, характеризует быстроту колебаний в затухающих колебаниях, показывает

число колебаний за 2π секунды в затухающих колебаниях, численно равная $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, единица измерения 1 рад/с.

β – коэффициент затухания – физическая скалярная величина, характеризует быстроту затухания колебаний во времени, зависит от свойства среды и инертности осциллятора, коэффициент затухания численно равен:

$$\beta = \frac{1}{\tau}, \quad [\beta] = 1\text{с}^{-1}.$$

Отметим, от чего зависит коэффициент затухания для рассматриваемых осцилляторов:

а) для механического $\beta = \frac{\gamma}{2m}$;

б) для электромагнитного $\beta = \frac{R}{2L}$.

3. Исследуя реальную физическую систему, необходимо описать ее поведение с помощью уравнений вида (*) или (**), а затем проанализировать величину β .

Первый случай. Если β можно считать равным нулю, то колебания будут свободными, незатухающими, то есть уравнение преобразуется к виду

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) .$$

Или в общем случае к виду $\xi = \xi_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

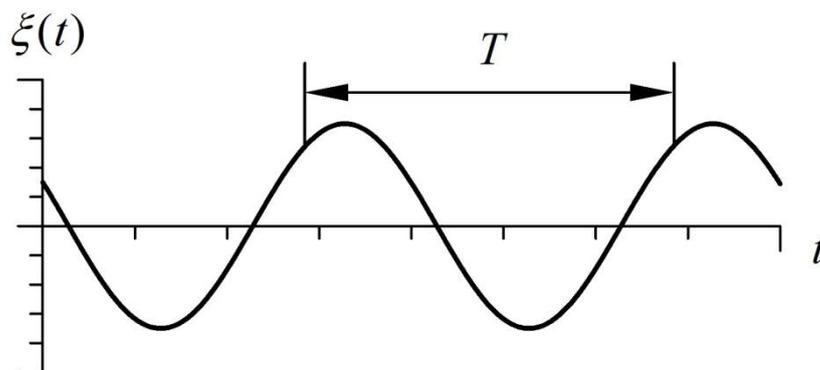


Рис.2. Пример свободных колебаний, совершаемых по гармоническому закону $\xi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

Второй случай. Если $\beta \ll \omega_0$, то в системе наблюдается слабое затухание, колебания в этом случае будут подчиняться полученному выше уравнению $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Графически они будут представлены так, как на рис.1 и 3.

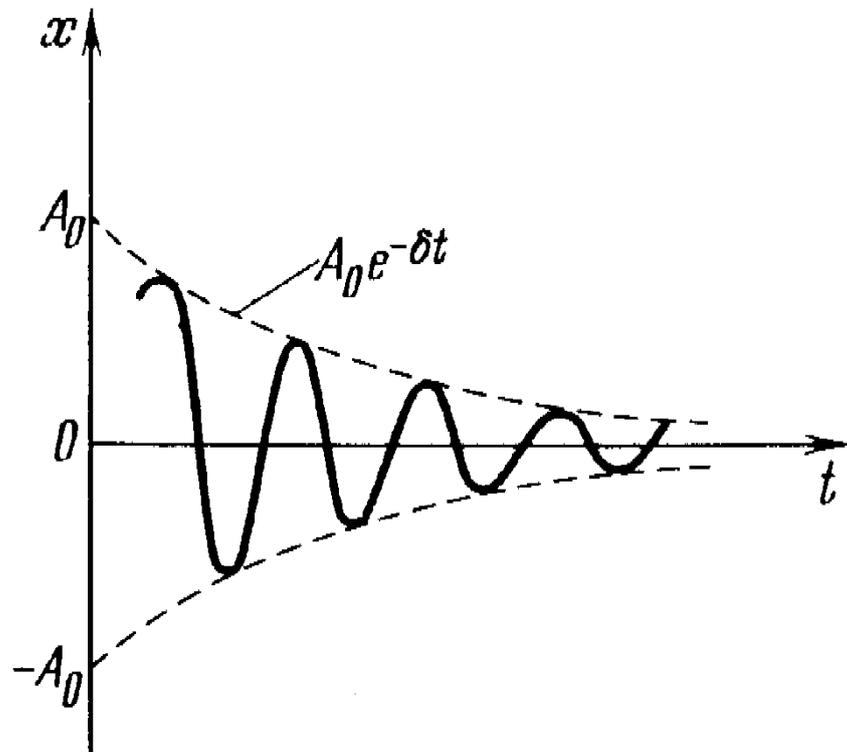


Рис.3. Пример затухающих колебаний, совершаемых по закону $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

Третий случай. если β сравнимо или значительно больше ω_0 , то колебания носят аperiodический характер, уравнение для них имеет вид, отличный от рассмотренного во втором случае. График этих колебаний представлен на рисунке

Уравнение затухающих колебаний

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

введены обозначения:

частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и φ_0 - начальная фаза

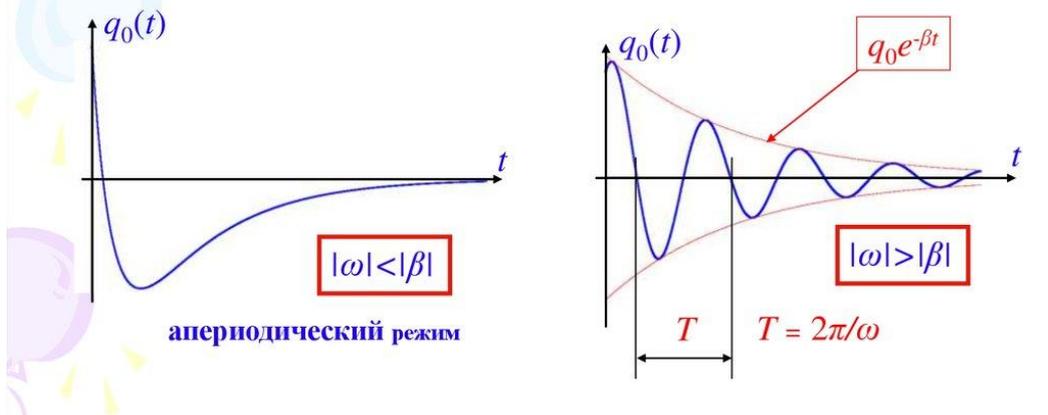


Рис.4. Примеры затухающих колебаний заряда в RLC-контуре: слева – сильное затухание и колебания – аперриодические; справа – слабое затухание.

τ – *время релаксации* – физическая скалярная величина, характеризует затухание колебания по времени, численно равна времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. $\tau = \frac{1}{\beta}$, $[\tau] = 1\text{с}$.

Логарифмический декремент затухания δ – это физическая скалярная величина, характеризующая затухание колебания по амплитуде за один период, она численно равна логарифму отношения двух последовательных амплитуд, отстоящих друг от друга на период

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\delta = \ln \frac{\xi_0 e^{-\beta t}}{\xi_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

Последнее уравнение показывает, что существует связь между логарифмическим декрементом затухания δ и периодом T :

$$\delta = \beta T .$$

Если учесть, что $\beta = \frac{1}{\tau}$, то можно обнаружить, что величина, обратная логарифмическому декременту затухания $\frac{1}{\delta} = \frac{\tau}{T}$ показывает число колебаний $N = \frac{\tau}{T}$, которое совершает осциллятор за время τ , то есть за время уменьшения амплитуды в e раз.

За каждый условный период осциллятор теряет энергию. Потери энергии за период характеризует еще одна важная характеристика – добротность.

Добротность – физическая безразмерная величина, она характеризует потери энергии за период, добротность численно равна умноженному на 2π отношению запасенной энергии к теряемой за период:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\langle W(t) - W(t+T) \rangle}$$

Теряемую за период энергию можно определить только как среднюю (см. знаменатель в формуле).

Большому значению Q соответствует меньшее значение затухания осциллятора. Для слабого осциллятора справедлива формула $Q = \frac{W}{2\beta}$.

Энергия колебания осциллятора уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону $W(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t}$.

W_0 – энергия осциллятора в начальный момент времени при $t=0$.

Фазовый портрет затухающих колебаний очень легко представить – это спираль, которая с ненулевых значений стремится к нулю. Нулевая точка – это точка равновесия системы и точка, в которой скорость маятника становится равной нулю, то есть колебания прекращаются

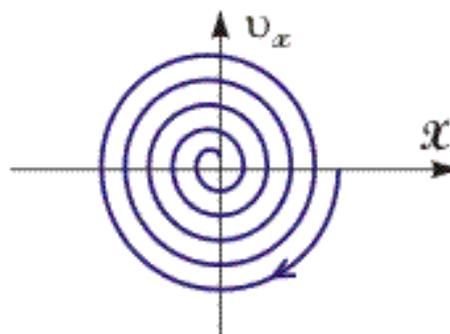


Рис.5. Примеры затухающих колебаний заряда в RLC-контуре:
слева – сильное затухание и колебания – аperiodические; справа – слабое затухание.

Выводы:

1. В реальной физической системе всегда происходит затухание колебаний вследствие сопротивления среды колебательному движению системы.
2. Затухающие колебания осциллятора подчиняются закону в общем виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\xi}{dt} + \omega^2\xi = 0$$

3. Затухающие колебания осциллятора изменяются со временем по закону $\xi = \xi_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$, причем колебания происходят с частотой, меньшей, чем собственная циклическая частота осциллятора $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Начальная амплитуда ξ_0 и начальная фаза φ_0 зависят только от начальных условий.
4. Для характеристики затухания колебаний вводятся *коэффициент затухания β* , *время релаксации τ* и *логарифмический декремент затухания δ* .
5. Различают три случая значений коэффициента затухания. Если $\beta = 0$, колебания – незатухающие, если β больше собственной циклической частоты ω_0 , то наблюдается сильное затухание (aperiodическое колебание), если β меньше собственной циклической частоты ω_0 , то наблюдается слабое затухание.
 - б. При описании затухающих колебаний для характеристики энергетических потерь за период используется *добротность*.