ЛЕКЦИЯ

Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т. е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции (см. рис. 152).

Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания: 1. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет *лишь одну критическую точку* и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. На рисунке 152 $f(x_0) = f_{\text{нб}} = f_{\max}$ (нб — наибольшее, max — максимальное).

2. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ не имеет критических точек, то это озачает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение (M) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) — на другом.

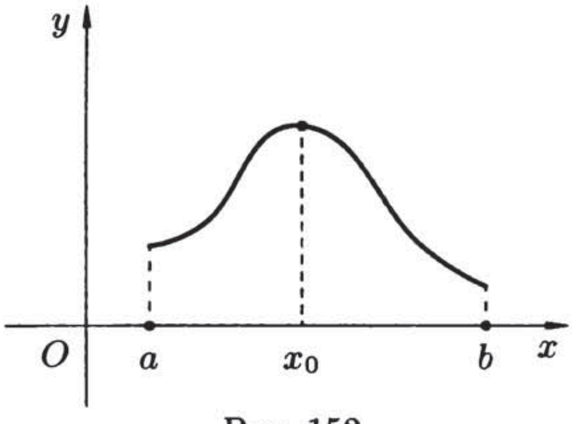

Рис. 152

Пример 25.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение: Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1);$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2; 1]$ и при $x_2 = -1 \in [-2; 1]$. Находим $f(0) = 1$, $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$, $f(1) = 8$. Итак, $f_{\text{нб}} = 17$ в точке $x = -2$, $f_{\text{нм}} = 0$ в точке $x = -1$.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Решение. $y' = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ (см. пример 1 из § 31).

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Заданному лучу $[0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = \dfrac{1}{1 + 1^2} = \dfrac{1}{2}$.

Поскольку $x = 1$ — единственная стационарная точка функции на заданном промежутке, причем точка максимума, то по теореме

$$y_{\text{наиб}} = y_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Ранее (см. рис. 220) был построен график функции на заданном луче — он хорошо иллюстрирует полученный результат.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \dfrac{1}{2}$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

Практические задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

Рассмотрим более простую *задачу*.

Пример. Определить размеры силосного сооружения, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, объемом 108 м^3, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной.

Решение

Пусть x (м) — сторона основания силосного сооружения, а y (м) — его глубина. Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x,\,y)=x^2+4xy.$$

Так как объем сооружения 108 м^3 и $V=x^2y$, то $y=\dfrac{108}{x^2}$.

Тогда суммарная площадь поверхности дна и стенок

$$S(x)=x^2+4x\cdot\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{432}{x},\ \text{где}\ x>0.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение x, при котором функция $S(x)$ принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$S'=2x-\frac{432}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x-\frac{432}{x^2}=0.$$

Решая это уравнение относительно x, получим $x=6$.

На числовую ось нанесем область определения функции $S(x)$ и критическую точку $x = 6$. В полученных промежутках расставляем знак производной S' (рис. 4).

Рис. 4. Знаки производной

По достаточному условию экстремума в точке $x = 6$ функция $S(x)$ имеет минимум. Так как функция $S(x)$ непрерывна при $x > 0$ и имеет единственную точку экстремума $x = 6$ и это точка минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение, то есть $S_{наим}=S(6)$. Тогда глубина сооружения

$$y=\frac{108}{x^2}=\frac{108}{36}=3\ \text{м}.$$

Ответ: длина основания 6 м, глубина 3 м.

Пример. Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности *S*.

Решение

Обозначим радиус основания цилиндра через *R*, а высоту — через *h*.

Объем цилиндра находится по формуле

$$V = \pi R^2 h .$$

Площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh .$$

Выразим из этого равенства высоту *h*:

$$h = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} .$$

Подставим полученное выражение для *h* в формулу нахождения объема цилиндра, получим:

$$V = V(R) = \pi R^2 \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR - 2\pi R^3}{2} = \frac{S}{2} R - \pi R^3 .$$

Задача сводится к исследованию функции $V(R)$ на наибольшее значение при $R > 0$.

Найдем производную функции $V(R)$:

$$V'(R) = \frac{S}{2} - 3\pi R^2 .$$

Приравняем $V'(R)$ к нулю:

$$\frac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 .$$

Решая это уравнение относительно *R*, получим

$$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} .$$

Найдем производную второго порядка функции $V(R)$:

$$V''(R) = -6\pi R .$$

Вычислим значение второй производной $V''(R)$ при $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$:

$$V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}} .$$

Так как $V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) < 0$, то согласно достаточному условию точки экстремума, $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ является точкой максимума функции $V(R)$.

Непрерывная на интервале $(0;+\infty)$ функция $V(R)$ имеет единственную точку экстремума $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ (точку максимума). Следовательно, в точке $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ функция $V(R)$ принимает наибольшее значение.

Тогда соответствующее значение высоты цилиндра будет равно

$$h=\frac{S-2\pi R^2}{2\pi R}=\frac{S-2\pi\cdot\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}=\frac{\frac{2S}{3}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}=\frac{S}{3\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}=\frac{S}{\sqrt{\frac{9\pi^2S}{6\pi}}}=$$

$$=\frac{S}{\sqrt{\frac{3\pi S}{2}}}=S\sqrt{\frac{2}{3\pi S}}=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

Заметим, что $h=2R$. Следовательно, объем цилиндра будет наибольшим при заданном значении площади поверхности тогда, когда его осевое сечение является квадратом.

Ответ: объем цилиндра наибольший при $h=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$, $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.