1°. Находим область определения функции.

2°. Исследуем функцию на четность — нечетность.

3°. Находим вертикальные асимптоты.

4°. Исследуем поведение функции в бесконечности, находим горизонтальные или наклонные асимптоты.

5°. Находим экстремумы и интервалы монотонности функции.

6°. Находим интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7°. Находим точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Заметим, что *исследование функции проводится одновременно с построением ее графика*.

Пример 8.14. Исследовать функцию $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1°. Находим область определения функции: $(-\infty,-1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,+\infty)$, т.е. $x\neq\pm1$.

2°. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

3°. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $x = \pm1$. Так как пределы функции при $x\to 1-0$ (слева) и $x\to 1+0$ (справа) бесконечны, $\left(\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty \text{ и } \lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty\right)$, то прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика $f(x)$ прямая $x = -1$ также является вертикальной асимптотой.

4°. Исследуем поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$. В силу четности имеем также $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$, т.е. прямая $y = -1$ — горизонтальная асимптота.

5°. Находим экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем $y'=\dfrac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$; $y' = 0$ при $x = 0$, и y' не существует при $x = \pm1$.

Однако критической является только точка $x = 0$ (так как значения $x = \pm 1$ не входят в область определения функции). Поскольку при $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$ (рис. 8.21), то $x = 0$ — точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ — минимум функции. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ функция убывает, на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ она возрастает.

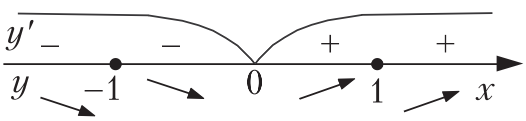

Рис. 8.21

6°. Находим интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем

$$y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Очевидно, что $y'' > 0$ на интервале $(-1, 1)$ и функция выпукла вниз на этом интервале; $y'' < 0$ на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, и на этих интервалах функция выпукла вверх. Точек перегиба нет.

7°. Находим точки пересечения с осями. Значение $f(0) = 1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0; 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

График функции изображен на рис. 8.22. ►

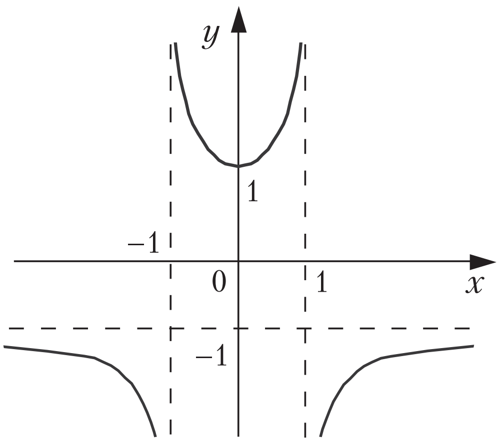

Рис. 8.22

Пример 8.15. Исследовать функцию $y = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$ и построить ее график.

Решение. 1°. Находим область определения функции $(-\infty, +\infty)$.

2°. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$ и график ее симметричен относительно начала координат.

3°. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных значениях x.

8.14. Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков

8.110. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1°. Область определения: $(-\infty; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Точки $x = -1$ и $x = 1$ — точки разрыва функции.

2°. $f(-x) = -f(x)$, т.е. функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат и достаточно провести исследование функции на интервале $[0; +\infty)$.

3°. $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{2x}{1-x^2} = +\infty; \ \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{2x}{1-x^2} = -\infty.$

Прямые $x = 1$ и (в силу симметрии графика) $x = -1$ — вертикальные асимптоты.

4°. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{1-x^2} = 0.$ Прямая $y = 0$ (ось абсцисс) — двусторонняя горизонтальная асимптота.

5°. $y' = \dfrac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} > 0$ при всех допустимых значениях x. Экстремумов нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

6°. $y'' = \dfrac{4x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $y'' = 0$ при $x = 0$. Знаки второй производной показаны на рис. 8.35.

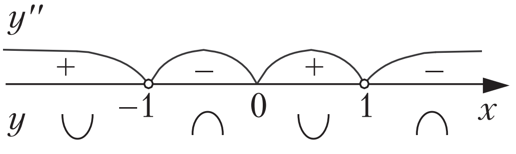

Рис. 8.35

Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ и выпукла вверх на интервалах $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$. Хотя $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через три точки: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, но график функции имеет только одну точку перегиба $x = 0$, ибо в двух других точках $x = -1$, $x = 1$ — функция не определена.

7°. Точка пересечения графика с осями единственная — начало координат $(0; 0)$.

График функции показан на рис. 8.36.

8.111. Исследовать функцию $y = (x - 1)e^x$ и построить ее график.

Решение. 1°. Область определения: $(-\infty; +\infty)$.

2°. Функция общего вида, так как $f(-x) = (-x - 1)e^x \neq \pm f(x)$.

3°. Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

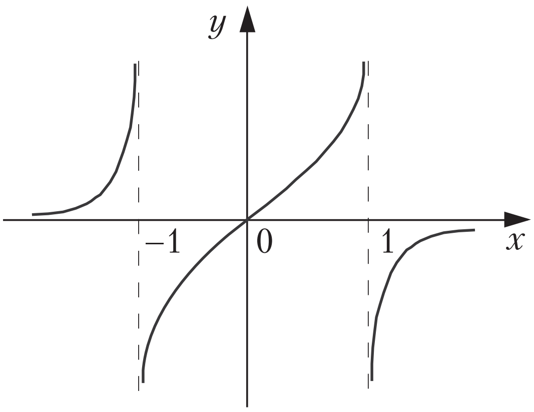

Рис. 8.36

4°. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x = [\infty\cdot 0] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)}{e^{-x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$. Следовательно, прямая $y = 0$ (ось абсцисс) является левосторонней горизонтальной асимптотой.

5°. $y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$. Производная обращается в нуль в точке $x = 0$. Знаки производной показаны на рис. 8.37.

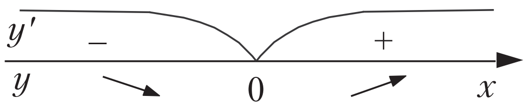

Рис. 8.37

Таким образом, функция убывает на интервале $(-\infty; 0)$, возрастает на интервале $(0; +\infty)$; $x = 0$ — точка минимума и $f_{\min}(0) = -1$.

6°. $y'' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$; $y'' = 0$ при $x = -1$. Производная $y'' < 0$, если $x + 1 < 0$, т.е. на интервале $(-\infty; -1)$. На интервале $(-1; +\infty)$ $y'' > 0$. Таким образом, функция выпукла вверх на интервале $(-\infty; -1)$ и выпукла вниз на интервале $(-1; +\infty)$; $x = -1$ — точка перегиба.

7°. Точка пересечения с осью ординат — $(0; -1)$, с осью абсцисс — $(1; 0)$.

График функции изображен на рис. 8.38. ►

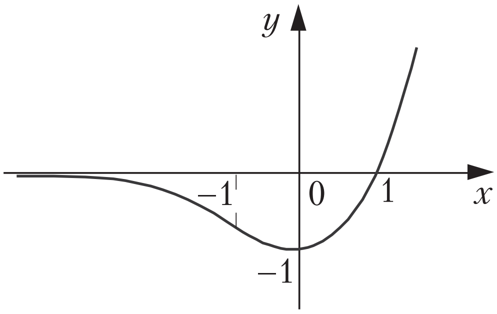

Рис. 8.38

8.112. Исследовать функцию $y = x \ln x$ и построить ее график.

Решение. 1°. Область определения функции — $(0; +\infty)$.

нельзя, но для схематического построения графика это несущественно.

Схематически график функции показан на рис. 8.47. ►

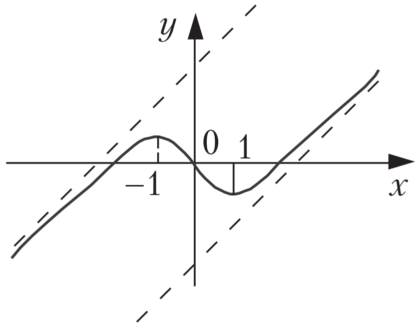

Рис. 8.47

Найти асимптоты графиков функций:

8.116. $y = \dfrac{1-x^3}{(2-x)(1+3x^2)}$.

8.117. $\dfrac{2+xe^x}{3+e^x}$.

8.118. $y = \dfrac{(2x^2-1)}{x}e^{-x}$.

8.119. $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

8.120. $y = \dfrac{\arccos x}{x^2 - \frac{\pi}{4}}$.

8.121. $y = \sqrt{3x^3 - x^2}$.

8.122. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

8.123. $y = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

Исследовать функции и построить их графики:

8.124. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

8.125. $y = x^2(x-4)^2$.

8.126. $y = \dfrac{2x}{2+x^3}$.

8.127. $y = (x+1)e^{-x}$.

8.128. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

8.129. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

8.130. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

8.131. $y = \sqrt[3]{1-\ln x}$.

8.132. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

8.133. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

8.134. $y = \dfrac{1}{1-e^x}$.

8.135. $y = \sin x + \cos^2 x$.