Физические приложения двойного интеграла

Вычисление массы плоской пластинки

Если $\mu = \mu(x, y)$ — переменная плотность плоской пластики D, то масса m_i элементарной области S_i приближенно равна $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$, а масса всей пластинки $m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i)\Delta S_i$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $max\, d_i \to 0$, получим формулу для вычисления массы плоской пластики:

$$m = \iint_D \mu(x, y) dS. \tag{9}$$

Вычисление статических моментов плоской пластики относительно осей ox и oy и координат центра масс

Статические моменты плоской пластики D с переменной плотностью $\mu = \mu(x, y)$ относительно координат осей определяются по формулам:

$$M_x = \iint_D \mu y dx dy \quad ; \tag{10}$$

$$M_y = \iint_D \mu x dx dy \quad . \tag{11}$$

Координаты центра масс пластинки находят по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \qquad y_c = \frac{M_x}{m}. \tag{12}$$

Вычисление моментов инерции плоской пластины

Момент инерции относительно начала координат и осей координат Ox и Oy плоской пластинки D с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\mu = \mu(x, y)$, которая лежит в плоскости Oxy, вычисляются соответственно по формулам:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\mu(x, y) dS; \tag{13}$$

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dS; \tag{14}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dS; \tag{15}$$